Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 5
Endliche Körpererweiterungen

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Sei L/K eine Körpererweiterung und $\alpha \in L^\times$ algebraisch über K mit Minimalpolynom

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0.$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Ring $K[\alpha] = \sum_{i=0}^{n-1} K\alpha^i$ schon ein Körper ist. Dies kann man auch ohne Rückgriff auf die Eigenschaften von Hauptidealringen sehen:

a) Zeigen Sie, dass α in $K[\alpha]$ invertierbar ist, indem Sie α^{-1} explizit als K-Linearkombination von $1, \alpha, ..., \alpha^{n-1}$ schreiben.
b) Sei nun $0 \neq \beta \in K[\alpha]$ beliebig. Zeigen Sie, dass β^{-1} eine K-Linearkombination von $1, \beta, ..., \beta^{n-1}$ ist und folgern Sie, dass β in $K[\alpha]$ invertierbar ist.

Aufgabe 2
(4 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f = X^3 - 2X + 2$, und sei $\beta := \alpha^2 + 1$.

a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel und $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\beta)$.
b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$.
c) Schreiben Sie α^{-1} und β^{-1} als Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2$.

Aufgabe 3
(3 Punkte)
Sei L/K eine endliche Körpererweiterung, so dass $p = [L : K]$ prim ist. Zeigen Sie:

a) Ist $K \subsetneq F \subset L$ ein Zwischenkörper, so ist $F = L$.
b) Es existiert ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Sei K ein Körper. Für $c \in K$ sei $K(\sqrt{c})$ der Zerfällungskörper von $X^2 - c$ über K. Zeigen Sie:

a) Ist $c \in K$ kein Quadrat, so ist $[K(\sqrt{c}) : K] = 2$.
b) Für $c, d \in K^\times$ gilt:

$$K(\sqrt{c}) \cong_K K(\sqrt{d}) \Leftrightarrow \exists u \in K^\times \text{ mit } d = u^2 c$$

c) Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und L/K eine Körpererweiterung mit $[L : K] = 2$, so gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ und $\alpha^2 = c \in K$, es ist also $L \cong_K K(\sqrt{c})$.

Hinweis zu b): Überlegen Sie sich zunächst, welche Elemente aus $K^\times$ in $K(\sqrt{c})$ zu einem Quadrat werden.

Abgabe: Montag, 21. November 2011, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.