



## Übungen zur Vorlesung Algebra

### Blatt 6

#### Zerfällungskörper und algebraischer Abschluss

##### Aufgabe 1

(5 Punkte)

Sei  $p \in \mathbb{N}$  eine Primzahl und sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $f = X^3 - 2$  über  $\mathbb{F}_p$ . Bestimmen Sie den Grad  $[L : \mathbb{F}_p]$  für die Fälle  $p = 2, 3, 5, 7, 11$ .

##### Aufgabe 2

(3 Punkte)

Geben Sie den Zerfällungskörper  $L$  von  $X^3 - 7 \in \mathbb{Q}[X]$  über  $\mathbb{Q}$  an und bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung  $[L : \mathbb{Q}]$ .

##### Aufgabe 3

(4 Punkte)

Zeigen Sie:

- Jeder algebraisch abgeschlossene Körper besitzt unendlich viele Elemente.
- Sei  $\mathbb{F}$  ein Primkörper. Dann ist  $[\overline{\mathbb{F}} : \mathbb{F}] = \infty$ .

##### Aufgabe 4

(4 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper und  $f \in K[X]$  ein Polynom mit  $\deg(f) = n > 0$ . Sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $f$  über  $K$ . Zeigen Sie:

- $[L : K]$  ist ein Teiler von  $n!$ .
- Ist  $[L : K] = n!$ , so ist  $f$  irreduzibel.

**Abgabe:** Montag, 28. November 2011, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.