Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 7
Separabilität und Satz vom primitiven Element

Aufgabe 1
(3 Punkte)
Geben Sie für jede der folgenden Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ ein primitives Element an:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$
b) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-3})$

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Sei p eine Primzahl und sei $L = \mathbb{F}_p(x, y) = \mathrm{Quot}(\mathbb{F}_p[x, y])$ der rationale Funktionenkörper in den Variablen x und y über $\mathbb{F}_p$ und sei $K = L^p$. Zeigen Sie:

a) $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p)$
b) Es ist $[L : K] = p^2$.
c) Die Erweiterung L/K hat kein primitives Element.
d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$ sei $K_n := K(x + y^n)$. Dann sind alle K_n Zwischenkörper von L/K mit $K_n \neq L$ und es ist $K_n \neq K_m$ für $n \neq m$.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$, sei $a \in K$ und sei $f = X^p - X + a$.
Zeigen Sie:

a) Es gilt $f(X) = f(X + 1)$ und f ist separabel.
b) Ist $\alpha \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f, so ist $K(\alpha)$ der Zerfällungskörper von f.
c) Hat f keine Nullstelle in K, so ist f irreduzibel über K.

Aufgabe 4
(4 Punkte)
Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) = p > 0$. Zeigen Sie:

a) Ist K vollkommen, so auch jede algebraische Körpererweiterung von K.
b) Sei
$$L := \bigcup_{r \in \mathbb{N}} K^{p^{-r}} := \{\alpha \in \overline{K} \ : \ \exists r \in \mathbb{N} : \alpha^{p^r} \in K\}.$$
Dann ist L ein vollkommener Körper und rein inseparabel über K.

Abgabe: Montag, 5. Dezember 2011, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.