Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 8
Gruppen

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Ist G eine Gruppe mit $a^2 = 1$ für alle $a \in G$, dann ist G abelsch.
b) Ist G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $(G : H) = 2$, dann ist H ein Normalteiler von G.
c) Ist $p \in \mathbb{N}$ prim und G eine Gruppe mit $|G| = p$, dann ist G zyklisch.

Aufgabe 2
(4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

a) $K := \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$ ist ein Normalteiler von G mit $K \subseteq H$ und jeder in H enthaltene Normalteiler von G ist in K enthalten.
b) $N := \{g \in G : g^{-1}Hg = H\}$ ist eine Untergruppe von G mit $H \lhd N$, und jede Untergruppe L von G mit $H \lhd L$ ist in N enthalten.

Man nennt N wie oben den Normalisator von H, i.Z. $N = N_G(H)$.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Seien G, H Gruppen und $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist $U \leq G$, so ist $\varphi(U) \leq H$.
b) Ist $W \leq H$, so ist $\varphi^{-1}(W) \leq G$.
c) Ist $N \lhd H$, so ist $\varphi^{-1}(N) \lhd G$.
d) Ist φ surjektiv und $N \lhd G$, so ist $\varphi(N) \lhd H$.

Aufgabe 4
(4 Punkte)
Zeigen Sie, ohne Theorem 2.4 zu verwenden, dass es bis auf Isomorphie nur eine Gruppe der Ordnung 4 gibt, die nicht zyklisch ist.
Man nennt diese Gruppe die Kleinsche Vierergruppe V_4.
Hinweis: Erstellen Sie eine Multiplikationstabelle

Abgabe: Montag, 12. Dezember 2011, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.