Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

**Übungen zur Vorlesung Algebra**

**Blatt 9**
**Semidirektes Produkt und zyklische Gruppen**

**Aufgabe 1**
**(3 Punkte)**
Sei $S_3$ die Gruppe der Permutationen der Zahlen 1,2,3 (siehe $B1$ Kapitel 5.2). Zeigen Sie:

a) $S_3$ besitzt genau eine zyklische Untergruppe $N$ der Ordnung 3 und diese ist ein Normalteiler.
b) $N$ besitzt ein Komplement $H$ in $S_3$. Also ist $S_3 = H \ltimes N$.
c) Sei $\alpha : H \longrightarrow Aut(N), h \longmapsto \alpha_h$ der zugehörige Automorphismus und $1 \neq h \in H$. Dann gilt $n^{\alpha_h} = n^{-1}$ für alle $n \in N$.

**Aufgabe 2**
**(4 Punkte)**
Sei $\phi$ die Eulersche $\phi$-Funktion. Zeigen Sie:

a) Für eine natürliche Zahl $n \in N$ gilt $n = \sum \phi(d)$, wobei über alle Teiler $d \in \mathbb{N}$ von $n$ summiert wird.
b) Eine Gruppe $G$ der Ordnung $n$ ist genau dann zyklisch, wenn es zu jedem Teiler $d$ von $n$ höchstens eine Untergruppe der Ordnung $d$ von $G$ gibt.

*Hinweis: Betrachten Sie für eine zyklische Untergruppe von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Ordnung $d$ die Anzahl der Erzeuger.*

**Aufgabe 3**
**(6 Punkte)**
Sei $O_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T A = 1\}$ die Gruppe der orthogonalen Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$, und sei $n \in \mathbb{N}$. Die Untergruppe von $O_2(\mathbb{R})$, die von der Rotation
$R := \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$ und der Spiegelung $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, heißt die *Diedergruppe $D_n$*.

a) Zeigen Sie: $S^{-1}RS = R^{-1}$, $R^n = 1$, und $D_n$ hat Ordnung $2n$.
b) Zeigen Sie, dass $D_n = \langle R \rangle \rtimes \langle S \rangle$.
c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist $D_n$ abelsch? Zu welchen Ihnen bekannten Gruppen sind $D_1$, $D_2$ und $D_3$ jeweils isomorph?
d) Zeigen Sie, dass eine endliche Gruppe $G$ genau dann zu einer der Diedergruppen $D_n$ isomorph ist, wenn es zwei *Involutionen* (d.h. Elemente der Ordnung 2) $x, y \in G$ gibt mit $G = \langle x, y \rangle$.

*Hinweis zur d): Zeigen Sie zunächst, dass die von $xy$ erzeugte Untergruppe Index 2 hat.*

**Aufgabe 4**
**(3 Punkte)**
Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 6 ist isomorph zur $S_3$ oder zur $C_6$.

**Abgabe:** Montag, 19. Dezember 2011, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.