Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 10

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 10.1. (Restglieder modulo Gröbnerbasen) (2+2 Punkte)
Wir betrachten das Ideal $I = \langle x - z^4, y - z^5 \rangle \trianglelefteq k[x, y, z]$.

(a) Bestimmen Sie eine Gröbnerbasis G von I bezüglich $<_{\text{lex}}$ und finden Sie eine Familie von Monomen, die den Raum der Restglieder modulo G aufspannt.

(b) Wiederholen Sie die vorherige Teilaufgabe mit $<_{\text{grlex}}$ statt $<_{\text{lex}}$ als Monomordnung. Vergleichen Sie die Familien von Monomen, die Sie erhalten.

(*Hinweis: Lesen Sie die Beispiele im Kapitel 5, §3 im Buch.*)

Nullstellensatz in $k[V]$. Sei k algebraisch abgeschlossen, sei $V \subseteq k^n$ eine affine Varietät und sei $J \subseteq k[V]$ ein Ideal. Dann gilt

$$\mathcal{I}_V(\mathcal{V}_V(J)) = \sqrt{J}.$$

Aufgabe 10.2. (Leere Untervarietät) (3+1 Punkte)

(a) Sei k algebraisch abgeschlossen, V eine nicht-leere k-Varietät und $\varphi \in k[V]$. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathcal{V}_V(\varphi) = \emptyset$, wenn $\varphi \in k[V]^*$.

(*Hinweis: Sie dürfen den Nullstellensatz in $k[V]$ (siehe oben) verwenden.*)

(b) Gilt diese Aussage auch für beliebige unendliche Körper? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 10.3. (Hyperebene Darstellung) (4 Punkte)
Seien $f \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ und $V \subseteq k^n$ die durch folgende Gleichung beschriebene Varietät:

$$x_n - f(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0.$$

Zeigen Sie, dass V und k^{n-1} isomorphe k-Varietäten sind.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Nicht-isomorphe Varietäten) (2+1+1+2 Punkte)

Wir betrachten die Varietät $V = \mathcal{V}(y^5 - x^2) \subseteq \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass $y^5 - x^2$ irreduzibel in $\mathbb{R}[x, y]$ ist, zeigen Sie $\mathcal{I}(y^5 - x^2) = \{y^5 - x^2\}$ und folgern Sie, dass der Koordinatenring $\mathbb{R}[V]$ integer ist.

(*Hinweis:* $\mathbb{R}$ *ist nicht algebraisch abgeschlossen.*)

(b) In dieser Teilaufgabe soll gezeigt werden, dass V und $\mathbb{R}$ als Varietäten nicht isomorph sind.

(i) Zeigen Sie mit Hilfe von Gröbnerbasen-Algorithmen (vgl. Kapitel 5, Abschnitt §3), dass jedes Element aus $\mathbb{R}[V]$ eine eindeutige Darstellung der Form $a(y) + b(y)x$ mit $a, b \in \mathbb{R}[y]$ besitzt.

(ii) Seien $a, a', b, b' \in \mathbb{R}[y]$. Schreiben Sie $(a + bx)(a' + b'x) \in \mathbb{R}[V]$ in der Form aus (i).

(iii) Führen Sie die Annahme, dass ein Ringisomorphismus $\varphi : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[V]$ existiert, zu einem Widerspruch.

(*Hinweis: Da* φ *surjektiv ist, liegen die Restklassen von* x *und* y *im Bild von* φ*.*)

Abgabe: Donnerstag, den 15. Januar 2026, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.