Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 11

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 11.1. (Endliche Varietäten) (2+2 Punkte)

(a) Sei k algebraisch abgeschlossen, sei $<$ eine monomiale Anordnung, sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Radikalideal und sei $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ eine Gröbnerbasis von I bzgl. $<$ so, dass es für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein geeignetes $m_i \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $\mathrm{LM}(g_i) = x_i^{m_i}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I)$ genau $\prod_{i=1}^{n} m_i$ viele Punkte enthält.

(b) Sei $V = \mathcal{V}(x_3 - x_1^2, x_4 - x_1x_2, x_2x_4 - x_1x_5, x_4^2 - x_3x_5) \subseteq \mathbb{C}^5$. Entscheiden Sie (mit Beweis), ob $\mathcal{V}(I)$ endlich ist.

Aufgabe 11.2. (Monome von beschränktem totalem Grad) (1+3 Punkte)

Sei k unendlich. In dieser Aufgabe wird die Anzahl der Monome in $k[x_1, \ldots, x_n]$ von totalem Grad $\leq d$ untersucht.

(a) Sei $V = k^n$. Zeigen Sie, dass jedes Monom aus $k[x_1, \ldots, x_n]$ im Komplement von $\langle \mathrm{LT}(\mathbf{I}(V)) \rangle$ liegt.

(b) Seien $d, n \in \mathbb{N}_0$ und sei $M_d := \{x^\alpha \mid |\alpha| \leq d\}$. Zeigen Sie, dass

$$|M_d| = \binom{n+d}{d}$$

gilt.

Aufgabe 11.3. (Quotientenringe durch Radikalideale) (1+1+1+1 Punkte)

Sei $I \trianglelefteq k[x_1, \ldots, x_n]$ ein Ideal so, dass $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ ein endlich-dimensionaler k-Vektorraum ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\dim(k[x_1, \ldots, x_n]/\sqrt{I}) \leq \dim(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{V}(I)$ höchstens $\dim(k[x_1, \ldots, x_n]/\sqrt{I})$ viele Elemente enthält.

(c) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass in (b) nicht immer Gleichheit gilt.

(d) Sei nun k algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass I genau dann ein Radikalideal ist, wenn die Dimension $\dim(k[x_1, \ldots, x_n]/I)$ gleich der Anzahl der Punkte von $\mathcal{V}(I)$ ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Rationale Funktionen) (1+1+1+1 Punkte)

Ist V eine irreduzible Varietät und $f \in k(V)$, etwa $f = \varphi/\psi$, wobei $\varphi, \psi \in k[V]$, $\psi \neq 0$, so ist f auf $V \backslash \mathcal{V}_V(\psi)$ offensichtlich stets definiert, wobei $\mathcal{V}_V(\psi) := \{\underline{a} \in V : \psi(\underline{a}) = 0\}$.
In dieser Aufgabe werden wir sehen, dass der Definitionsbereich von f diese Menge echt enthalten kann. Sei hierzu $V = \mathcal{V}(xz - yw) \subseteq \mathbb{C}^4$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle xz - yw \rangle$ ein Primideal ist.

(b) Folgern Sie, dass V irreduzibel ist und $\mathcal{I}(V) = \langle xz - yw \rangle$ gilt.

(c) Sei $f = [x]/[y] \in \mathbb{C}(V)$, d.h. f ist auf $V \backslash \mathcal{V}_V([y])$ definiert. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{V}_V([y]) = \{(0, 0, z, w) : z, w \in \mathbb{C}\} \cup \{(x, 0, 0, w) : x, w \in \mathbb{C}\}.$$

(d) Beweisen Sie, dass $f = [w]/[z]$, und folgern Sie, dass f außerhalb der Menge $\{(x, 0, 0, w) : x, w \in \mathbb{C}\}$ überall definiert ist.

Abgabe: Donnerstag, den 22. Januar 2026, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.