Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 12

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 12.1. (Birationale Äquivalenz I) (4 Punkte)
Seien $V \subseteq k^m$ und $W \subseteq k^n$ irreduzible affine Varietäten. Sei ferner $\varphi\colon V \dashrightarrow W$ eine rationale Abbildung, die auf $V \setminus V'$ definiert ist, wobei V' eine Untervarietät von V ist, und sei W' eine Untervarietät von W. Zeigen Sie, dass

$$V'' = V' \cup \{p \in V \setminus V' \mid \varphi(p) \in W'\}$$

eine Untervarietät von V ist.

Aufgabe 12.2. (Birationale Äquivalenz II) (2+2 Punkte)
Seien $V \subseteq k^m$ und $W \subseteq k^n$ irreduzible affine Varietäten.

(a) Seien V und W via $\varphi\colon V \dashrightarrow W$ und $\psi\colon W \dashrightarrow V$ birational äquivalent und seien $V' \subseteq V$ (bezüglich $\varphi \circ \psi$) und $W' \subseteq W$ (bezüglich $\psi \circ \varphi$) wie in Bedingung (11) im Beweis von Satz 8.12. Seien ferner

$$\mathcal{V} = \{p \in V \setminus V' \mid \varphi(p) \in W \backslash W'\}$$

und

$$\mathcal{W} = \{q \in W \setminus W' \mid \psi(q) \in V \backslash V'\}.$$

Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ und $\psi\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ zueinander inverse Bijektionen sind.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 12.1, dass $\mathcal{V} = V \backslash V_1$ und $\mathcal{W} = W \backslash W_1$ für gewisse echte Untervarietäten $V_1 \subsetneq V$ und $W_1 \subsetneq W$.

Aufgabe 12.3. (Verknüpfung von rationalen Abbildungen) (2 Punkte)
Seien $\varphi\colon \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}^3$ und $\psi\colon \mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}$ die rationalen Abbildungen definiert durch

$$\varphi(t) = (t, 1/t, t^2) \qquad \text{und} \qquad \psi(x, y, z) = \frac{x + yz}{x - yz}.$$

Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $\psi \circ \varphi$ nicht definiert ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (Körper der rationalen Funktionen) (2+2+2 Punkte)
Sei $V \subseteq k^n$ eine irreduzible Varietät und sei

$$\Phi\colon \operatorname{Quot}(k[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(V)) \to k(V)$$

die Funktion, welche ein Element $\overline{f}/\overline{g} \in \operatorname{Quot}(k[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I}(V))$ auf die durch f/g repräsentierte rationale Abbildung schickt, d.h. es gilt

$$\Phi\left(\overline{f}/\overline{g}\right) : V \dashrightarrow k, (a_1, \ldots, a_n) \mapsto \frac{f(a_1, \ldots, a_n)}{g(a_1, \ldots, a_n)}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine wohldefinierte Abbildung ist.

(Hinweis: Wann sagen wir, dass zwei rationale Abbildungen gleich *sind?)*

(b) Versehen Sie den Zielbereich von Φ mit einer geeigneten Addition und Multiplikation und weisen Sie deren Wohldefiniertheit nach.

(c) Zeigen Sie, dass Φ ein ein Ringisomorphismus ist und folgern Sie, dass $k(V)$ mit den Verknüpfungen aus (a) ein Körper ist (vgl. Definition 8.3).

Abgabe: Donnerstag, den 29. Januar 2026, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.