Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Wintersemester 2025/2026

Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 13

Allgemeiner Hinweis: Dies ist ein freiwilliges Zusatzblatt, welches weder korrigiert noch besprochen wird, für die Vorbereitung auf die Klausur jedoch hilfreich ist. Die Lösungen stehen auf der Homepage der Vorlesung zur Verfügung.

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 13.1. (Hyperebene im Unendlichen)
Sei $H = \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_0 = 0\}$ die Hyperebene im Unendlichen. Zeigen Sie, dass H mit $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ identifiziert werden kann, d.h. es gibt eine Bijektion von H nach $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.

Aufgabe 13.2. (Affine Varietäten und Projektive Varietäten)
Sei $U_0 := \{(x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_0 \neq 0\}$ und sei $\varphi\colon k^n \to U_0$ die Abbildung aus Proposition 9.3.

(a) Sei $V = \mathbb{V}(x_1^2 - x_0^2) \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie eine affine Varietät $W' \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(W') = V \cap U_0$ gilt. Beschreiben Sie die Punkte von $V \cap U_0$.

(b) Sei $W' = \mathbf{V}(y^3 - 4x + 7xy - 1, x^4 + y - 3) \subseteq \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ so, dass $\varphi(W') = V \cap U_0$ gilt.

Aufgabe 13.3. (Homogene Polynome und Homogene Ideale)

(a) Seien $f, f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Polynome. Nach Anwendung des Divisionsalgorithmus sei $f = a_1 f_1 + \ldots + a_s f_s + r$. Zeigen Sie, dass $a_1, \ldots, a_s, r \in k[x_0, \ldots, x_n]$ ebenfalls homogene Polynome sind.

(b) Zeigen Sie, dass für homogene Polynome $f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ auch das S-Polynom $S(f, g)$ homogen ist.

(c) Beweisen Sie, dass ein homogenes Ideal eine homogene Gröbnerbasis besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie den Buchberger-Algorithmus.

(d) Sei $I \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ für gewisse homogene Polynome $f_1, \ldots, f_s \in k[x_0, \ldots, x_n]$.

   (ii) Eine reduzierte Gröbnerbasis von I (bzgl. einer beliebigen monomialen Anordnung) besteht aus homogenen Polynomen.

Aufgabe 13.4. (Operationen auf Homogenen Idealen und Projektiven Varietäten)
Seien $I_1, \ldots, I_\ell \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ homogene Ideale. Ferner bezeichne $\mathbb{V}(J)$ für ein homogenes Ideal $J \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ die zugehörige projektive Varietät.

(a) Zeigen Sie, dass $I_1 + \ldots + I_\ell$ und $I_1 \cap \ldots \cap I_\ell$ und $I_1 \cdots I_\ell$ wieder homogene Ideale sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 + \ldots + I_\ell) = \mathbb{V}(I_1) \cap \ldots \cap \mathbb{V}(I_\ell)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 \cap \ldots \cap I_\ell) = \mathbb{V}(I_1 \cdots I_\ell) = \mathbb{V}(I_1) \cup \ldots \cup \mathbb{V}(I_\ell)$.

Aufgabe 13.5. (Homogene Radikal- und Primideale und Irreduzible Projektive Varietäten)

(a) Zeigen Sie, dass ein homogenes Ideal $I \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ genau dann prim ist, wenn für alle homogenen Polynome $f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ gilt: $fg \in I \Rightarrow (f \in I$ oder $g \in I)$.

(b) Sei nun k algebraisch abgeschlossen und $I \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die projektive Varietät $\mathbb{V}(I)$ irreduzibel ist, falls I prim ist. Zeigen Sie ferner, dass die Umkehrung ebenfalls gilt, falls I ein Radikalideal ist.

(c) Sei k erneut algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{I}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den homogenen, in $\langle X_0, \ldots, X_n \rangle$ enthaltenen Primidealen von $k[x_0, \ldots, x_n]$ und den nichtleeren, irreduziblen, projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ sind.

Aufgabe 13.6. (Leere Projektive Varietät)
Sei k algebraisch abgeschlossen und $I \trianglelefteq k[x_0, \ldots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathbb{V}(I) = \emptyset$ in $\mathbb{P}^n(k)$ gilt, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(i) Es existiert ein $r \geq 1$ so, dass jedes homogene Polynom von Totalgrad $\geq r$ in I enthalten ist.

(ii) Das Radikal von I ist enweder $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ oder $k[x_0, \ldots, x_n]$.