
Übungen zur Vorlesung *Algorithmische Algebraische Geometrie*
Blatt 13 – Lösung

Seien stets $n \in \mathbb{N}$ und k ein Körper.

Aufgabe 13.1. (Hyperebene im Unendlichen)

Sei $H = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_0 = 0\}$ die Hyperebene im Unendlichen. Zeigen Sie, dass H mit $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ identifiziert werden kann, d.h. es gibt eine Bijektion von H nach $\mathbb{P}^{n-1}(k)$.

Lösung:

Betrachte die Abbildung $\pi: H \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k)$, $(0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto (x_1 : \dots : x_n)$.

- π ist wohldefiniert bzw. vertreterunabhängig:

Seien $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in k^n$ mit $(0 : x_1 : \dots : x_n) = (0 : y_1 : \dots : y_n)$, d.h. es gibt ein $\lambda \in k^\times$ mit $y_i = \lambda x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Dies zeigt bereits

$$\pi(0 : x_1 : \dots : x_n) = (x_1 : \dots : x_n) = (y_1 : \dots : y_n) = \pi(0 : y_1 : \dots : y_n).$$

- π ist injektiv:

Seien $(0 : x_1 : \dots : x_n), (0 : y_1 : \dots : y_n) \in H$ mit $\pi(0 : x_1 : \dots : x_n) = \pi(0 : y_1 : \dots : y_n)$, d.h. $(x_1 : \dots : x_n) = (y_1 : \dots : y_n)$. Dann gibt es ein $\lambda \in k^\times$ mit $y_i = \lambda x_i$ für $i = 1, \dots, n$. Da auch $\lambda 0 = 0$ gilt, zeigt dies $(0 : x_1 : \dots : x_n) = (0 : y_1 : \dots : y_n)$.

- π ist surjektiv:

Sei $(x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^{n-1}(k)$. Dann ist $(0 : x_1 : \dots : x_n) \in H$ und es gilt $\pi(0 : x_1 : \dots : x_n) = (x_1 : \dots : x_n)$.

Aufgabe 13.2. (Affine Varietäten und Projektive Varietäten)

Sei $U_0 := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_0 \neq 0\}$ und sei $\varphi: k^n \rightarrow U_0$ die Abbildung aus Proposition 9.3.

- Sei $V = \mathbb{V}(x_1^2 - x_0^2) \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie eine affine Varietät $W' \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $\varphi(W') = V \cap U_0$ gilt. Beschreiben Sie die Punkte von $V \cap U_0$.
- Sei $W' = \mathbb{V}(y^3 - 4x + 7xy - 1, x^4 + y - 3) \subseteq \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie eine projektive Varietät $V \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ so, dass $\varphi(W') = V \cap U_0$ gilt.

Lösung:

- Sei $f(x_1) = x_1^2 - 1$, d.h. $f(x_1) = g(1, x_1)$ für $g(x_0, x_1) = x_1^2 - x_0^2$, und $W' = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt $W' = \{1, -1\}$ und nach Proposition 9.9 gilt $\varphi(W') = V \cap U_0$, weil $V = \mathbb{V}(g)$. Man erhält somit $V \cap U_0 = \{(1 : 1), (1 : -1)\}$.

- (b) Seien $f^h(x, y, z) = y^3 - 4xz^2 + 7xyz - z^3$ und $g^h(x, y, z) = x^4 + yz^3 - 3z^4$ die Homogenisierungen von $f(x, y) = y^3 - 4x + 7xy - 1$ und $g(x, y) = x^4 + y - 3$ und sei $V = \mathbb{V}(f^h, g^h)$. Dann gilt $\varphi(W') = V \cap U_0$ nach Korollar 9.12, weil $W' = \mathcal{V}(f, g)$.

Aufgabe 13.3. (Homogene Polynome und Homogene Ideale)

- (a) Seien $f, f_1, \dots, f_s \in k[x_0, \dots, x_n]$ homogene Polynome. Nach Anwendung des Divisionsalgorithmus sei $f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r$. Zeigen Sie, dass $a_1, \dots, a_s, r \in k[x_0, \dots, x_n]$ ebenfalls homogene Polynome sind.
- (b) Zeigen Sie, dass für homogene Polynome $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ auch das S -Polynom $S(f, g)$ homogen ist.
- (c) Beweisen Sie, dass ein homogenes Ideal eine homogene Gröbnerbasis besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie den Buchberger-Algorithmus.
- (d) Sei $I \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ ein Ideal. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- (i) $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ für gewisse homogene Polynome $f_1, \dots, f_s \in k[x_0, \dots, x_n]$.
 - (ii) Eine reduzierte Gröbnerbasis von I (bzgl. einer beliebigen monomialen Anordnung) besteht aus homogenen Polynomen.

Lösung:

- (a) Sei $d = \deg(f)$.

Erinnerung: Im k -ten Schritt des Divisionsalgorithmus werden Polynome P_k, r_k, a_k und Indizes i_k berechnet mit $f = P_k + r_k + a_1 f_{i_1} + \dots + a_{k-1} f_{i_{k-1}}$.

Behauptung: In jedem Schritt des Algorithmus sind die Polynome P_k, r_k, a_k homogen (oder null).

Die Behauptung gilt für den Schritt $k = 0$, denn es gilt $P_0 = f$ und $a_1 = \dots = a_s = r_0 = 0$.

Angenommen, die Behauptung gilt an einem gewissen Schritt des Algorithmus, und seien P, r, a_i ($i = 1, \dots, s$) die entsprechenden Zwischenergebnisse. Wir nehmen dabei an, dass die Polynome P und r jeweils entweder null sind oder Grad d haben und der Quotient a_i entweder null ist oder Grad $d - \deg(f_i)$ hat ($i = 1, \dots, s$).

Falls es ein i gibt, für das der Leitterm $LT(f_i)$ den Leitterm $LT(P)$ teilt, dann wird $LT(P)/LT(f_i)$ zu a_i addiert. Da $LT(P)/LT(f_i)$ homogen von Grad $d - \deg(f_i)$ ist, ist auch die Summe wieder homogen von Grad $d - \deg(f_i)$. Außerdem ersetzen wir P durch $P - (LT(P)/LT(f_i))f_i$. Weil beide Summanden homogen von Grad d sind, ist das neue P auch wieder homogen von Grad d . Das Polynom r ändert sich bei diesem Schritt nicht.

Falls keiner der Leitterme $LT(f_i)$ den Leitterm $LT(P)$ teilt, dann ersetzen wir r durch die Summe $r + P - LT(P)$. Weil P und r homogen von Grad d sind, gilt dies auch für das neue r und das neue P .

(b) Sei $x^\gamma = \text{kgV}(LM(f), LM(g))$. Nach Definition ist also

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)}f - \frac{x^\gamma}{LT(g)}g$$

Nun ist $\frac{x^\gamma}{LT(f)}f$ homogen von Grad $\gamma - \deg(f) + \deg(f) = \gamma$ und auch $\frac{x^\gamma}{LT(g)}g$ ist homogen von Grad $\gamma - \deg(g) + \deg(g) = \gamma$. Also ist $S(f, g)$ entweder null oder homogen von Grad γ .

- (c) Sei I ein homogenes Ideal mit homogenen Erzeugern $f_1, \dots, f_s$. Buchbergers Algorithmus beginnt mit der Basis $G = \{f_1, \dots, f_s\}$, welche aus homogenen Polynomen besteht. Wenn ein Polynom hinzugefügt wird, ist dieses der Rest eines S -Polynoms nach Division durch G . Die Teilaufgaben (a) und (b) zeigen, dass dieses Polynom wieder homogen ist, weil G aus homogenen Polynomen besteht. Die Erweiterung der Basis G besteht also wieder aus homogenen Polynomen. In jedem Schritt des Algorithmus erhält man also eine Basis, die nur aus homogenen Polynomen besteht.
- (d) (ii) $\Rightarrow$ (i). Eine reduzierte Gröbnerbasis, die aus homogenen Polynomen besteht, ist erzeugend.
(i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Teilaufgabe (c) existiert eine Gröbnerbasis G , die aus homogenen Polynomen besteht. Um eine reduzierte Gröbnerbasis zu bekommen, teilen wir die Elemente von G durch Konstanten oder wir löschen Terme von den Polynomen. Beide Operationen liefern bei Anwendung auf homogene Polynome wieder homogene Polynome.

Aufgabe 13.4. (Operationen auf Homogenen Idealen und Projektiven Varietäten)

Seien $I_1, \dots, I_\ell \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ homogene Ideale. Ferner bezeichne $\mathbb{V}(J)$ für ein homogenes Ideal $J \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ die zugehörige projektive Varietät.

- (a) Zeigen Sie, dass $I_1 + \dots + I_\ell$ und $I_1 \cap \dots \cap I_\ell$ und $I_1 \cdots I_\ell$ wieder homogene Ideale sind.
- (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 + \dots + I_\ell) = \mathbb{V}(I_1) \cap \dots \cap \mathbb{V}(I_\ell)$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{V}(I_1 \cap \dots \cap I_\ell) = \mathbb{V}(I_1 \cdots I_\ell) = \mathbb{V}(I_1) \cup \dots \cup \mathbb{V}(I_\ell)$.

Lösung:

- (a) Homogene Ideale sind von homogenen Polynomen erzeugt. Schreibe also

$$I_1 = \langle f_{11}, \dots, f_{1s_1} \rangle, \dots, I_\ell = \langle f_{\ell 1}, \dots, f_{\ell s_\ell} \rangle,$$

wobei alle f_{ij} homogen sind.

Dann gilt $I_1 + \dots + I_\ell = \langle f_{11}, \dots, f_{1s_1}, \dots, f_{\ell 1}, \dots, f_{\ell s_\ell} \rangle$. Also wird $I_1 + \dots + I_\ell$ von homogenen Polynomen erzeugt und ist somit homogen.

Sei nun $g \in (I_1 \cap \dots \cap I_\ell)$. Da alle I_j homogen sind, gehören alle homogenen Komponenten von g zu jedem I_j . Somit gehören alle homogenen Komponenten von g auch zu $I_1 \cap \dots \cap I_\ell$, was zeigt, dass $I_1 \cap \dots \cap I_\ell$ homogen ist.

Das Produkt $I_1 \cdots I_\ell$ wird von Produkten der Erzeuger der I_j 's erzeugt, also von homogenen Polynomen, und ist somit homogen.

- (b) Wir haben in Teilaufgabe (a) bemerkt, dass $I_1 + \dots + I_\ell = \langle f_{11}, \dots, f_{1s_1}, \dots, f_{\ell 1}, \dots, f_{\ell s_\ell} \rangle$ gilt. Wenn also $p \in \mathbb{V}(I_1 + \dots + I_\ell)$, dann verschwinden alle Polynome aus allen I_j auf p , d.h. $p \in \mathbb{V}(I_j)$ für alle j , und somit $p \in (\mathbb{V}(I_1) \cap \dots \cap \mathbb{V}(I_\ell))$. Umgekehrt, wenn $p \in (\mathbb{V}(I_1) \cap \dots \cap \mathbb{V}(I_\ell))$, dann ist $p \in \mathbb{V}(I_j)$ für alle j , also alle f_{ij} verschwinden auf p , also alle homogenen Erzeuger von $I_1 + \dots + I_\ell$ verschwinden auf p und somit alle (homogenen) Polynome aus $I_1 + \dots + I_\ell$.
- (c) Ähnliche Argumentation wie in Teilaufgabe (b).

Aufgabe 13.5. (Homogene Radikal- und Primideale und Irreduzible Projektive Varietäten)

- (a) Zeigen Sie, dass ein homogenes Ideal $I \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ genau dann prim ist, wenn für alle homogenen Polynome $f, g \in k[x_0, \dots, x_n]$ gilt: $fg \in I \Rightarrow (f \in I \text{ oder } g \in I)$.
- (b) Sei nun k algebraisch abgeschlossen und $I \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass die projektive Varietät $\mathbb{V}(I)$ irreduzibel ist, falls I prim ist. Zeigen Sie ferner, dass die Umkehrung ebenfalls gilt, falls I ein Radikalideal ist.
- (c) Sei k erneut algebraisch abgeschlossen. Zeigen Sie, dass die Abbildungen $\mathbb{V}$ und $\mathbb{I}$ zueinander inverse Bijektionen zwischen den homogenen, in $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$ enthaltenen Primidealen von $k[x_0, \dots, x_n]$ und den nichtleeren, irreduziblen, projektiven Varietäten in $\mathbb{P}^n(k)$ sind.

Lösung:

- (a) Wenn I prim ist, dann gilt die Aussage für alle Paare von Polynomen, insbesondere für homogene Polynome. Angenommen, die Implikation $fg \in I \Rightarrow (f \in I \text{ oder } g \in I)$ gilt für homogene Polynome. Seien nun f, g beliebige Polynome mit $fg \in I$ und $g \notin I$.

Schreibe f und g als Summen ihrer homogenen Komponenten:

$$f = \sum_{i=0}^s f_i, \quad g = \sum_{j=0}^t g_j,$$

wobei $s = \deg(f)$ und $t = \deg(g)$. Da $g \notin I$ gibt es ein j mit $g_j \notin I$. Sei $\ell \leq t$ maximal mit dieser Eigenschaft, d.h. $g_\ell \notin I$. Die homogene Komponente von fg mit Grad d ist gegeben durch $\sum_{i+j=d} f_i g_j$. Also ist die Komponente von fg mit dem höchsten Grad gegeben durch $f_s g_t$. Gilt $t \neq \ell$, dann ist $g_t \in I$. Wenn wir diese Komponente von g subtrahieren, erhalten wir $f(g - g_t) \in I$. Wir betrachten dann die homogene Komponente von $f(g - g_t)$ mit dem höchsten Grad und wiederholen das Verfahren bis wir $f(g - \sum_{j=\ell+1}^t g_j)$ erreichen. Die homogene Komponente mit dem höchsten Grad ist dann gegeben durch $f_s g_\ell \in I$. Da nach Annahme $g_\ell \notin I$ gilt, folgt somit $f_s \in I$. Nun subtrahieren wir f_s von f , und wiederholen denselben Prozess mit $(f - f_s)(g - \sum_{j=\ell+1}^t g_j)$. Da $g_\ell \notin I$ gilt, erhalten wir schließlich $f_i \in I$ für alle i , und somit $f \in I$. Also I ist prim.

- (b) Sei I ein homogenes Primideal. Wenn $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, dann gibt es nichts zu zeigen. Sei also $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$ und $\mathbb{V}(I) = V_1 \cup V_2$. Bemerke, dass $I(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I} = I$ gilt, weil k algebraisch abgeschlossen ist und I als homogenes Primideal radikal ist. Gelte $V \neq V_1$. Wir zeigen $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(V_2)$. Da $V_2 \subseteq V$, gilt $\mathbb{I}(V) \subseteq \mathbb{I}(V_2)$. Für die andere Inklusion, bemerken wir, dass $\mathbb{I}(V) \subsetneq \mathbb{I}(V_1)$, weil $V_1 \subsetneq V$. Wir können also ein $f \in \mathbb{I}(V_1) \setminus \mathbb{I}(V)$ wählen. Sei nun $g \in \mathbb{I}(V_2)$ beliebig. Aus $V = V_1 \cup V_2$ folgt,

dass fg auf V verschwindet und daher gilt $fg \in \mathbb{I}(V)$. Da I prim ist, folgt nun $f \in \mathbb{I}(V)$ oder $g \in \mathbb{I}(V)$. Also impliziert $f \notin \mathbb{I}(V)$ bereits $g \in \mathbb{I}(V)$. Dies zeigt $\mathbb{I}(V) = \mathbb{I}(V_2)$, also $V = V_2$. Folglich ist V eine irreduzible projektive Varietät.

Umgekehrt, sei I nun radikal. Wenn $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, ist I nach Aufgabe 13.6 entweder $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ oder $k[x_0, \dots, x_n]$. Es wurde schon bewiesen, dass diese beiden Ideale prim sind. Sei also $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$. Dann gilt $I = \mathbb{I}(\mathbb{V}(I))$. Wir nehmen zudem an, dass $\mathbb{V}(I)$ irreduzibel ist. Sei nun $fg \in I$. Dann verschwindet fg auf $\mathbb{V}(I)$. Setze $V_1 := \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(f)$ und $V_2 := \mathbb{V}(I) \cup \mathbb{V}(g)$. Dann folgt $\mathbb{V}(I) = V_1 \cup V_2$. Da $\mathbb{V}(I)$ nach Annahme irreduzibel ist, gilt entweder $V_1 = \mathbb{V}(I)$ oder $V_2 = \mathbb{V}(I)$. Also gilt entweder $\mathbb{V}(f) \supseteq \mathbb{V}(I)$ oder $\mathbb{V}(g) \supseteq \mathbb{V}(I)$. Damit gilt entweder $f \in I$ oder $g \in I$. Dies zeigt, dass I ein Primideal ist.

- (c) $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ und $k[x_0, \dots, x_n]$ sind die einzigen homogene Primideale mit $\mathbb{V}(I) \neq \emptyset$ (vgl. Aufgabe 13.6). Ist also $I \subsetneq \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ ein homogenes Primideal, dann ist die projektive Varietät $\mathbb{V}(I)$ nichtleer und nach Teilaufgabe (b) irreduzibel. In der Vorlesung wurde zudem gezeigt, dass $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) = \sqrt{I} = I$ gilt.

Sei nun umgekehrt $\emptyset \neq V$ eine irreduzible projektive Varietät in $\mathbb{P}^n(k)$. Dann ist $\mathbb{I}(V)$ ein homogenes Primideal, das echt im Ideal $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ enthalten ist. Da $V = \mathbb{V}(\mathbb{I}(V))$ gilt, folgt aus Teilaufgabe (b), dass $\mathbb{I}(V)$ prim ist.

Aufgabe 13.6. (Leere Projektive Varietät)

Sei k algebraisch abgeschlossen und $I \trianglelefteq k[x_0, \dots, x_n]$ ein homogenes Ideal. Zeigen Sie, dass genau dann $\mathbb{V}(I) = \emptyset$ in $\mathbb{P}^n(k)$ gilt, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Es existiert ein $r \geq 1$ so, dass jedes homogene Polynom von Totalgrad $\geq r$ in I enthalten ist.
- (ii) Das Radikal von I ist entweder $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ oder $k[x_0, \dots, x_n]$.

Bemerkung: Die Formulierung der Aufgabe ist nicht ganz eindeutig. Zu zeigen waren folgende zwei Äquivalenzen:

$$[\mathbb{V}(I) = \emptyset \Leftrightarrow (i)] \text{ sowie } [\mathbb{V}(I) = \emptyset \Leftrightarrow (ii)].$$

Lösung:

- (i) Sei $\mathbb{V}(I) = \emptyset$. Nach Satz 9.25 gibt es ein $r \geq 1$ mit $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subseteq I$. Jedes homogene Polynom vom Grad $\geq r$ liegt in $\langle x_0, \dots, x_n \rangle^r \subseteq I$. Wenn umgekehrt Bedingung (i) gilt, dann sind $x_0^r, \dots, x_n^r \in I$. Damit folgt $V = \emptyset$.
- (ii) Wegen der Gleichheit $\mathbb{V}(I) = \mathbb{V}(\sqrt{I})$ gilt $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, wenn $\sqrt{I} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ oder $\sqrt{I} = k[x_0, \dots, x_n]$. Gilt umgekehrt $\mathbb{V}(I) = \emptyset$, dann folgt $\sqrt{I} \supseteq \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ (siehe Beweis von Satz 9.25). Das Ideal $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ ist radikal. Somit gilt entweder $\sqrt{I} = \langle x_0, \dots, x_n \rangle$ oder $\sqrt{I} = k[x_0, \dots, x_n]$.