
Übungen zur Vorlesung *Algebra II*
Blatt 1

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 1.1. (2+1+1 Punkte)

- (a) Beweisen Sie die Irreduzibilität von 2 , 3 , $1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.
- (b) Zeigen Sie, dass 2 , 3 , $1 + \sqrt{-5}$ und $1 - \sqrt{-5}$ nicht paarweise assoziiert in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.
- (c) Folgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ kein faktorieller Ring ist.

Aufgabe 1.2. (2+2 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass $\langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle$, $\langle 2, 1 - \sqrt{-5} \rangle$ und $\langle 3, 1 + \sqrt{-5} \rangle$ Primideale von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ sind.
- (b) Beweisen Sie über $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ die Gültigkeit der folgenden Gleichungen:
 - (i) $\langle 3, 1 + \sqrt{-5} \rangle \langle 3, 1 - \sqrt{-5} \rangle = \langle 3 \rangle$
 - (ii) $\langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle \langle 3, 1 + \sqrt{-5} \rangle = \langle 1 + \sqrt{-5} \rangle$
 - (iii) $\langle 2, 1 - \sqrt{-5} \rangle \langle 3, 1 - \sqrt{-5} \rangle = \langle 1 - \sqrt{-5} \rangle$
 - (iv) $\langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle \langle 2, 1 - \sqrt{-5} \rangle \langle 3, 1 + \sqrt{-5} \rangle \langle 3, 1 - \sqrt{-5} \rangle = \langle 6 \rangle$.

Zusatzaufgabe für Interessierte.

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass der Ring der Gauß'schen Zahlen $\mathbb{Z}[i] := \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ versehen mit der Norm

$$\begin{aligned} N : \mathbb{Z}[i] &\rightarrow \mathbb{Z} \\ a + bi &\mapsto a^2 + b^2 \end{aligned}$$

ein euklidischer Ring ist. Betrachten Sie hierfür zunächst $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\beta \neq 0$.

(a) Beweisen Sie, dass geeignete $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\alpha}{\beta} = r + si$ über $\mathbb{Q}(i)$ existieren.

Fixieren Sie nun geeignete $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{\alpha}{\beta} = r + si$ über $\mathbb{Q}(i)$.

(b) Begründen Sie die Existenz geeigneter ganzer Zahlen p und q mit $|r - p|, |s - q| \leq \frac{1}{2}$.

Fixieren Sie geeignete $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $|r - p|, |s - q| \leq \frac{1}{2}$.

(c) Zeigen Sie, dass für $\rho := p + qi \in \mathbb{Z}[i]$ ein $\sigma \in \mathbb{Z}[i]$ mit $\alpha = \rho\beta + \sigma$ und $N(\sigma) \leq \frac{1}{2}N(\beta)$ existiert.

(d) Folgern Sie, dass $(\mathbb{Z}[i], N)$ ein euklidischer Ring ist.

Abgabe: Dienstag, den 22. April 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.