Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra II*
Blatt 2

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Sei R stets ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 2.1. (2+2 Punkte)
Sei M ein R-Modul und sei N ein Untermodul von M.

(a) Zeigen Sie, dass falls M endlich erzeugt ist, auch M/N endlich erzeugt ist.

(b) Zeigen Sie, dass falls N und M/N endlich erzeugt sind, auch M endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2.2. (1+1+2 Punkte)
Seien M, N R-Moduln, sei $\varphi\colon M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus und sei $S \subseteq M$.

(a) Zeigen Sie, dass M_{tor} ein Untermodul von M ist und beweisen Sie $\varphi(M_{\mathrm{tor}}) \subseteq N_{\mathrm{tor}}.$.

(b) Beweisen Sie $(M \oplus N)_{\mathrm{tor}} = M_{\mathrm{tor}} \oplus N_{\mathrm{tor}}$.

(c) Sei nun R ein Integritätsbereich und sei M torsionsfrei. Zeigen Sie: M ist genau dann frei mit Basis S, wenn $M = \bigoplus_{s \in S} Rs$ gilt.

Zusatzaufgabe für Interessierte.
Sei M ein R-Modul und seien S, T Untermoduln von M.

(a) Zeigen Sie $(S + T)/T \simeq S/(S \cap T)$.

(b) Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $M = S \oplus T$
(ii) $M = S + T$ und $S \cap T = \{0\}$
(iii) Für jedes $m \in M$ existiert ein eindeutiges $s \in S$ und ein eindeutiges $t \in T$ mit $m = s + t$.

Abgabe: Dienstag, den 29. April 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.