Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

Übungen zur Vorlesung *Algebra II*
Blatt 3

Allgemeiner Hinweis: Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 3.1. (2+2 Punkte)

(a) Erläutern Sie ein Beispiel für einen kommutativen Ring R mit 1, einen endlich erzeugten R-Modul M und einen Untermodul N von M, sodass N nicht endlich erzeugt ist.

(b) Erläutern Sie ein Beispiel für einen Hauptidealbereich R und einen torsionsfreien R-Modul M, sodass M nicht frei ist.

Aufgabe 3.2. (1+1+0,5+1+0,5 Punkte)

Sei R ein Hauptidealbereich, sei p ein Primelement von R, sei $\nu \in \mathbb{N}$ und sei M ein nichttriviales p^ν-Torsionsmodul von R.

(a) Zeigen Sie, dass für $x \in M$ die Periode von x (bis auf Einheit) durch p^l mit $0 \leq l \leq \nu$ gegeben ist.

(b) Sei ν nun insbesondere minimal mit der Eigenschaft, dass M ein p^ν-Torsionsmodul ist. Beweisen Sie die Existenz eines $x \in M$ mit Periode p^ν.

Habe von nun an $x \in M$ die Periode p^ν und sei $\overline{M} := M/Rx$.

(c) Beweisen Sie, dass $\overline{M}$ ein p^ν-Torsionsmodul ist.

(d) Sei $y \in M$ der Periode p^l ein Vertreter von $\overline{y} \in \overline{M}$ mit Periode $p^{\bar{l}}$. Zeigen Sie $\bar{l} \leq l$.

(e) Sei nun ν insbesondere minimal mit der Eigenschaft, dass M ein p^ν-Torsionsmodul ist und $\overline{\nu} \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft, dass $\overline{M}$ ein $p^{\overline{\nu}}$-Torsionsmodul ist. Beweisen Sie $\overline{\nu} \leq \nu$.

Aufgabe 3.3. (2+2 Punkte)

Sei K ein Körper, sei V ein K-Vektorraum und sei $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie die Verknüpfung

$$\begin{array}{rcl} \cdot\colon K[X] \times V & \to & V \\ (f, v) & \mapsto & f(\varphi)(v). \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass V mit $\cdot$ ein $K[X]$-Modul ist.

Seien nun ferner V endlich-dimensional und φ injektiv.

(b) Zeigen Sie, dass V ein endlich erzeugtes $K[X]$-Torsionsmodul ist.

Zusatzaufgabe für Interessierte. (ohne Abgabe)

Sei K ein Körper und sei V ein $K[X]$-Modul.

(a) Zeigen Sie, dass V ein K-Vektorraum ist.

(b) Beweisen Sie die Existenz einer eindeutigen K-linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ von $K[X]$-Moduln, sodass die Skalarmultiplikation $\cdot$ auf V als $K[X]$-Modul für alle $f \in K[X]$ und alle $v \in V$ durch $f(x) \cdot v = f(\varphi)(v)$ gegeben ist.

(c) Folgern Sie die Existenz einer Bijektion

$$\psi\colon \{V \mid V \text{ ist } K[X]\text{-Modul}\} \to \{(V, \varphi) \mid V \text{ ist } K\text{-Vektorraum}, \varphi\colon V \to V \text{ ist } K\text{-linear}\}.$$

Abgabe: Dienstag, den 6. Mai 2025, um 10:00 Uhr in den Briefkasten Nr. 17. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung und heften Sie Ihre einzelnen Blätter zusammen.