Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Laura Wirth

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2025

---

**Übungen zur Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie***
**Blatt 6**

**Allgemeiner Hinweis:** Dies ist ein freiwilliges Zusatzblatt, welches weder korrigiert noch besprochen wird, für die Vorbereitung auf die Klausur jedoch hilfreich ist. Die Lösungen stehen auf der Homepage der Vorlesung zur Verfügung.

**Aufgabe 6.1.**
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

(a) Sei $p \neq 2$.

(i) Beweisen Sie die Existenz geeigneter ganzer Zahlen $m$ und $n$ mit

$$m^2 + n^2 + 1 \equiv 0 \mod p.$$

(ii) Fixieren Sie $m, n \in \mathbb{Z}$ gemäß (i) und betrachten Sie die Menge

$$\Gamma := \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid c \equiv ma + nb \mod p,\ d \equiv mb - na \mod p\}.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma$ ein vollständiges Gitter in $\mathbb{R}^4$ ist.

(iii) Sei $T_\Gamma$ ein fundamentales Parallelotop von $\Gamma$ mit Volumen $v(T_\Gamma) = p^2$. Beweisen Sie unter Verwendung von *Satz 21.8 (Minkowski)* die Existenz geeigneter ganzer Zahlen $a, b, c$ und $d$ mit

$$p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(b) Folgern Sie, dass jede natürliche Zahl eine Summe aus vier Quadraten ganzer Zahlen ist.

**Aufgabe 6.2.**
Bestimmen Sie die Klassengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.

**Aufgabe 6.3.**
Sei $0 < d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei.

(a) Sei $d \equiv 2, 3 \mod 4$. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$ unendlich viele Lösungen besitzt.

(b) Sei $d \equiv 1 \mod 4$. Beweisen Sie, dass die Gleichung $x^2 - dy^2 = 4$ unendlich viele Lösungen besitzt.