

Ergänzung zu Anhang C

Im Kapitel C des Anhangs werden die im Buch verwendeten methodischen und axiomatischen Ansätze kurz zusammengefasst, um erfahrenen Mathematikern und Mathematikerinnen eine rasche Einordnung des Inhalts zu ermöglichen.

Als weitere Hilfestellung für Lehrende, die das Buch (zum Beispiel im Rahmen eines Vorkurses) einsetzen oder einfach auf dessen Inhalt Bezug nehmen wollen, dient die hier vorgestellte kommentierte Liste der verwendeten Notation. Besonderheiten werden dabei durch Fettdruck hervorgehoben.

Logik

Die Junktoren der Aussagenlogik werden in üblicher Form geschrieben.

Ausdruck	Bemerkung
$E \wedge F$	Und-Verknüpfung
$E \vee F$	Oder-Verknüpfung
$E \Rightarrow F$	Implikation
$E \Leftrightarrow F$	Äquivalenz
$\neg E$	Negation

Die Quantorausdrücke der Prädikatenlogik werden hier beispielhaft vorgestellt.

Ausdruck	Bemerkung
$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$	Für-alle-Aussage
$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$	Existenzaussage
$\exists! x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 = 2$	Aussage zur eindeutigen Existenz
$\forall x, y \in K, v \in V : (x \cdot y) \odot v = x \odot (y \odot v)$	mehrfache Quantifizierung

Für die quantifizierte Variable wird in allen Fällen die **Angabe einer Menge** (bzw. Klasse $\rightarrow$ Abschnitt **Mengen**) gefordert. Andere Einschränkungen wie zum Beispiel $\forall \varepsilon > 0 : \dots$ oder $\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta : \dots$ sind **nicht** vorgesehen, um die Syntax-Regeln und die darauf aufbauenden Beweisregeln übersichtlich zu halten. Nach Durcharbeiten des Buches sollte der Umgang mit solchen Schreibweisen allerdings kein Problem darstellen.

Mengen

Zwar ist die Mengenlehre Grundlage aller Vorlesungen im ersten Semester, aber ein axiomatischer Aufbau aus der Mengenlehre heraus ist praktisch nicht realisierbar. Daher wird oft auf die sogenannte naive Mengenlehre zurückgegriffen, um einen raschen Einstieg mit der Konzentration auf die wesentlichen Hilfsmittel zu erreichen. Die dabei auf Cantor zurückgehende „Mengendefinition“ ist aber keine Definition im modernen Sinne und stellt damit eine ungewollte Schwammigkeit gerade an den Anfang aller Betrachtungen.

Ersetzt man die *wohlunterschiedenen Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens* aus Cantors Definition durch einen abstrakten *Elementbegriff*, dann verwandelt sich das Konzept der Menge faktisch in das Konzept der *Klasse* als beliebiger Zusammenfassung von Elementen. Die Mengen im engeren Sinne (der ZF-Mengenlehre) sind dann Klassen, die selbst wieder Elemente sind.

Genau dieser Zugang wird im Buch verwendet: Statt von Klassen wird von (naiven) Mengen gesprochen, wobei das Wort *naiv* an fast allen Stellen unterdrückt wird, um die Leichtigkeit des Cantorsche Ansatzes beizubehalten. Allerdings wird durch Axiome präzise geregelt, welche Mengen als Elemente in anderen Mengen zusammengefasst werden können (diese Mengen werden auch als *fassbar* bezeichnet, im Unterschied zu den *unfassbaren* Mengen, die in Klassentheorien unter dem Begriff echte Klassen bekannt sind).

Bedingt durch diesen Ansatz gibt es die naive Menge aller Elemente und die naive Menge aller Mengen.

Ausdruck	Bemerkung
$\mathcal{U}$	Die naive Menge aller Elemente - das Elementuniversum .
$\mathcal{M}$	Die naive Menge aller Mengen in $\mathcal{U}$.
$\emptyset$	Die leere Menge.
$\mathbb{N}$	Die natürlichen Zahlen beginnend mit 1 .
$\mathbb{N}_0$	Die natürlichen Zahlen beginnend mit 0 .
$n \in \mathbb{N}$	Elementaussage.
$A \subset B$	Teilmengenaussage mit möglicher Gleichheit $\forall x \in A : x \in B$.

Der einzige Grundausdruck zur Bildung naiver Mengen ist die Aussonderungsmenge. Da aus dem Universum $\mathcal{U}$ ausgesondert werden kann, sind beliebige (durch mathematische Aussagen formulierbare) Zusammenfassungen von Elementen möglich.

Ausdruck	Bemerkung
$\{x \in \mathbb{R} : (0 \leq x) \wedge (x \leq 1)\}$	Aussonderungsmenge - die Angabe einer (naiven) Menge für den Platzhalter ist obligatorisch.

Mit der Aussonderungsmenge lassen sich dann alle üblichen konkreteren Zusammenfassungen formulieren.

Ausdruck	Bemerkung
$\{a\}$	Einemenge zum Element a , also $\{x \in \mathcal{U} : x = a\}$.
$\{42, 17, 111\}$	Rekursiv durch $(\{42\} \cup \{17\}) \cup \{111\}$ oder als Bildmenge zum Tupel $(42, 17, 111)$ definiert ($\rightarrow$ Abschnitt <i>Funktionen</i>).
$A \cup B$	Die Mengenvereinigung $\{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.
$A \cap B$	Der Mengenschnitt $\{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$.
$A \setminus B$	Die Mengendifferenz $\{x \in \mathcal{U} : (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$.
$\mathcal{P}(A)$	Die Potenzmenge $\{V \in \mathcal{M} : V \subset A\}$.

Die allgemeinen Vereinigungs- und Schnittoperationen werden für **Mengenfamilien** (also Teilmengen von $\mathcal{M}$) formuliert. Indizierte Mengenfamilien (also mengenwertige Funktionen) werden im Zusammenhang mit Produktmengen benutzt $\rightarrow$ Abschnitt *Funktionen*).

Ausdruck	Bemerkung
$\bigcup \mathcal{A}$	Vereinigung der Familie $\mathcal{A}$, also $\{x \in \mathcal{U} : \exists A \in \mathcal{A} : x \in A\}$.
$\bigcap \mathcal{A}$	Schnitt der Familie $\mathcal{A}$, also $\{x \in \mathcal{U} : \forall A \in \mathcal{A} : x \in A\}$.

Neben den Aussonderungsmengen spielen auch Bildmengen eine wichtige Rolle. Das Trennzeichen $|$ anstelle von $:$ weist auf die unterschiedliche Bedeutung hin. Hier als Beispiel die Definition der geraden Zahlen:

Ausdruck	Bemerkung
$\{2 \cdot n \mid n \in \mathbb{N}\}$	Bildmenge von $n \in \mathbb{N} \mapsto 2 \cdot n$ (siehe Abschnitt <i>Funktionen</i>).

Funktionen

In der Mengenlehre werden Funktionen als spezielle Relationen eingeführt, die wiederum als Mengen von Elementpaaren dargestellt werden, wobei Paare ebenfalls durch spezielle Mengen realisierbar sind. Während dieser Zugang seine Vorteile im minimalistischen Einsatz der benötigten Grundobjekte hat (alles basiert auf Mengen), ist er in der Praxis der ersten Studiensemester genau wegen des erforderlichen schrittweisen Aufbaus eher ineffizient.

Darüberhinaus unterscheidet sich der später übliche Umgang mit Paaren, Relationen und Funktionen wegen der unterschiedlichen Aktionsmöglichkeiten sowieso stark vom Umgang mit Mengen. Es liegt deshalb nahe, die Objekte durch spezielle Ausdrucksformen und zugehörige Axiome separat einzuführen.

In diesem Sinne werden **Funktionen als Objekte** vorgestellt, die durch bestimmte

Ausdrücke vereinbart werden können und für die bestimmte Folgeausdrücke zur Verfügung stehen. Die grundlegende Notation zur Vereinbarung von Funktionen wird an folgendem Beispiel deutlich:

Ausdruck	Bemerkung
$x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + 1$	Notation für ein Funktionsobjekt.

Die benötigten Informationen sind also die Definitionsmenge und die Zuordnungsvorschrift (wobei gewährleistet sein muss, dass für jedes Element der Definitionsmenge das Ergebnis ebenfalls ein *Element* ist - Funktionen sind damit durch eine zugehörige (naive) Graphmenge repräsentierbar). Dual hierzu kann man für jedes Funktionsobjekt f folgende Ausdrücke verwenden:

Ausdruck	Bemerkung
$\text{Def}(f)$	Die Definitionsmenge von f .
$\text{Bild}(f)$	Die Menge aller Funktionswerte von f .
$f(x)$	Der Funktionswert an einer Stelle $x \in \text{Def}(f)$.

Für die **Zielfmenge** einer Funktion f gibt es in diesem Zugang **keine** Zugriffsmöglichkeit (was der gängigen Praxis weitestgehend entspricht - die Surjektivität als Ausnahme wird weiter unten behandelt). Dennoch kann eine Zielfmenge bei der Vereinbarung von Funktionsnamen als Zusatzinformation nützlich sein, um danach etwa verschachtelte Funktionsauswertungen schnell auf Wohldefiniertheit überprüfen zu können. Hier wird die inline-Notation $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$ oder auch die zweizeilige Variante verwendet:

$$f := \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 + 1 \end{cases}$$

Eine zentrale Stelle, an der normalerweise auf die Zielfmenge einer Funktion zurückgegriffen wird, ist die Definition der **Surjektivität**. Allerdings verlangen Aussagen wie zum Beispiel: *Die reelle Exponentialfunktion ist nicht surjektiv*, dabei zwangsläufig einen Blick zurück auf die Zielfmenge in der Funktionsvereinbarung. Der im Buch benutzte Ansatz, etwas ausführlicher von *Surjektivität auf eine bestimmte Menge* zu sprechen, ist dagegen immer nützlich, auch wenn die Zielfmenge (gerade) nicht erkennbar ist (etwa wenn wir sagen, dass $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ surjektiv auf die Menge $\mathbb{R}_{>0}$ ist).

Für Bild und Urbildmengen einer Funktion f wird die in der Mengenlehre übliche Notation mit eckigen Klammern verwendet, da runde Klammern im Allgemeinen missverständlich sind (z.B. bei $\text{Def}(f) = \{0, \{0\}\}$ ist nicht klar, ob mit $f(\{0\})$ der Funktionswert oder die Bildmenge gemeint ist).

Ausdruck	Bemerkung
$f[A]$	Das Bild von A unter f , also $\{y \in \mathcal{U} : \exists x \in A : y = f(x)\}$.
$f^{-1}[A]$	Das Urbild von A unter f , also $\{x \in \text{Def}(f) : f(x) \in A\}$.

Weitere wichtige Ausdrücke im Zusammenhang mit Funktionen sind

Ausdruck	Bemerkung
$f \circ g$	Die Verkettung von f und g , wobei $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
$f : A \rightarrow B$	Abkürzung für $(\text{Def}(f) = A) \wedge (\text{Bild}(f) \subset B)$.
$\mathcal{F}(A, B)$	Menge aller Funktionen von A nach B .
$\text{Bij}(A, B)$	Menge der Bijektionen zwischen A und B .
f^{-1}	Inverse Funktion zu einer Bijektion f .
$f _A$	Einschränkung von f auf die Menge A .

Tupel

Ist A eine Menge, dann werden die n -Tupel aus Elementen von A als Funktionen von $\mathbb{N}_{\leq n} = \{1, \dots, n\}$ nach A eingeführt. Die Indeschreibweise x_i für $x \in A$ ist nur eine Abkürzung der Auswertung $x(i)$.

Ausdruck	Bemerkung
A^n	Menge der n -Tupel entspricht $\mathcal{F}(\{1, \dots, n\}, A)$.
x_i	Alternative Schreibweise für $x(i)$.

Produktmengen werden nur im Spezialfall der Tupelmengen mit Einträgen in komponentenabhängigen Zielmengen eingeführt. Die zur Beschreibung notwendige **indizierte Mengenfamilie** (mengenwertige Funktion) ist dann als Mengentupel T darstellbar (d.h. die Indexmenge ist von der Form $\{1, \dots, n\}$).

Ausdruck	Bemerkung
$\prod T$	Produkt der Mengenkomponenten T_i des Tupels $T \in \mathcal{M}^n$.
$\prod_{i=1}^n T_i$	Alternative Schreibweise für $\prod T$.
$T_1 \times \dots \times T_n$	Alternative Schreibweise für $\prod T$.

Relationen

Zweistellige Relationen werden wie Funktionen als **grundlegende Objekte** behandelt. Im Unterschied zur Konstruktion mit Mengen erlaubt dies eine geradlinigere Definition und eine einfachere Verwendung in Beweisen. Die Einführung einer Relation wird an folgendem Beispiel erläutert:

Ausdruck	Bemerkung
$(x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \sim (y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}) :\Leftrightarrow x_1 \cdot y_2 = y_1 \cdot x_2$	Definition einer Relation $\sim$.
$(3, 4) \sim (6, 8)$	Auswertung der Relation.
$\text{links}(\sim)$	Linke Definitionsmenge.
$\text{rechts}(\sim)$	Rechte Definitionsmenge.

Weitere Ausdrücke

Um auf eindeutig existierende Elemente syntaktischen Zugriff zu haben, wird ein Kennzeichnungsoperator verwendet. Die positive Quadratwurzel von 2 lässt sich damit so beschreiben:

Ausdruck	Bemerkung
$\text{das } x \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x^2 = 2$	Kennzeichnungsoperator.

Schließlich wird der bedingte Ausdruck in der üblichen Form verwendet, hier als Beispiel in der Definition der Indikatorfunktion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}$:

Ausdruck	Bemerkung
$x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	Bedingter Ausdruck als Funktionswert.