

## Bruchrechnung

### 1. Einleitung

Die Bruchrechnung ist sowohl für das alltägliche Leben, als auch für die weitere mathematische Bildung der Schüler von großer Bedeutung, z. B.

- beim Messen und Beschreiben von Größen,
- beim Rechnen mit Größen,
- bei der Zins- und Prozentrechnung,
- bei Anwendungen der Mathematik in Alltagssituationen,
- im Rahmen von Gleichungen und Ungleichungen

### 2. Behandlung und Definition

Behandlung der Bruchrechnung: 6.Klasse

Meist zwei Blöcke:

umfangreicher Block = gemeine Brüche

kleinerer Block = Dezimalbrüche

Definition „gemeiner Bruch“ (Stark-Verlag):

$\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \frac{17}{11}, \dots$  werden **Bruchzahlen** oder **gemeine Brüche** genannt.

Allgemein:

$\frac{a}{b}$	→	Zähler	}	Bruch
	→	Bruchstrich		
	→	Nenner		

Der **Nenner** gibt an, in wie viele gleich große Teile das Ganze zerlegt wird.  
Der **Zähler** gibt an, wie viele solcher Teile vorhanden sind.

Definition „Dezimalbruch“:

Ein Dezimalbruch oder Zehnerbruch ist ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von Zehn mit natürlichem Exponenten ist; d.h. im Nenner steht 10, 100, 1000, etc.

Dezimalbruch im Zehnersystem = Dezimalzahl

Bruchstellen vom ganzzahligen Teil mit Dezimaltrennzeichen (Komma) abgetrennt

Bsp.:  $35/100 = 0,35$

### 3. Schülervorstellungen

Brüche werden zu schnell unter abstraktem Rechenzahlaspekt behandelt

Versäumnis: auf Erfahrungen und Verständnis beruhende Grundvorstellung

→ Geringe inhaltliche Vorstellungen: Brüche = Rechenausdrücke, mit deren Bestandteilen nach bestimmten Regeln umgegangen wird

Lösungsansätze:

- Betrachtung aller Aspekte von Brüchen: Teil vom Ganzen, Maßzahl, Operator, Verhältnis, Quotient
- Schon in der 5.Klasse: Rechenoperationen anschaulich erarbeiten  
sonst: nur Erwerb von Fachtermini und auswendig gelernten Regeln
- Die Regelableitung ist nicht überflüssig!  
Durchführung: sorgfältig und möglichst spät  
→ besseres Verständnis, längerfristige Rückerinnerung, Möglichkeit der Rekonstruktion

### 4. Bruchrechenkonzepte

Was ist eine Bruchzahl?

- Größe (Größenkonzept),
- Funktion (Operatorkonzept)
- Äquivalenzklasse (Äquivalenzklassenkonzept),
- Lösung einer linearen Gleichung (Gleichungskonzept)

In der Schule:

Vor allem das Größenkonzept und das Operatorkonzept

Größenkonzept

- Ausgangspunkt: konkrete Brüche aus dem Alltag  
z.B.  $\frac{1}{2}$  Liter,  $\frac{3}{4}$  Stunde, ...
- Durch Verallgemeinerung gelangt man zu fester Bezugsgröße „das Ganze“ (= E)  
Bruchzahl  $m/n$  bezeichnet die Größe  $m/n$  E

Vorteile	Nachteile
- Nähe zur Anwendung im Alltag - Rückgriff auf Vorkenntnisse - geeignet für Erweitern, Kürzen, Anordnung, Addition, Subtraktion	- Grenzen bei der Multiplikation und Division

Operatorkonzept

- Ausgangspunkt: übliche Sprechweise aus dem Alltag, wie z.B. „ $\frac{2}{3}$  von 6kg sind 4kg“  
→ durch „ $\frac{2}{3}$  von“ wird der Größe 6kg die Größe 4kg zugeordnet
- Bruchzahl = Funktion/Operator

Vorteile	Nachteile
- Einfache Einführung der Multiplikation und Division	- typische Fehler bei Addition - keine anschauliche Vorstellung für Kürzen und Erweitern - Herleitung der Anordnung der Bruchzahlen aufwändig

Oftmals: Ausnutzung der jeweiligen Vorteile des Größen- und Operatorkonzepts und Verknüpfung der Konzepte

#### Äquivalenzklassenkonzept

- Definition einer Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Paare  $(a,b)$  natürlicher Zahlen  
 $(a,b) \sim (c,d)$  genau dann, wenn  $a*d = b*c$
- Bruchzahl = Äquivalenzklasse  
 $m/n = \{ (a,b) \mid a,b \in \mathbb{N} \text{ und } m*b = n*a \}$
- Rechenoperationen werden definiert

Vorteile	Nachteile
- mathematisch einwandfreie Definition	- Rechenoperationen unmotiviert und zu formal - knüpft nicht an Vorwissen der Schüler an - Bruchzahlen = Menge geordneter Paare – schwer vorstellbar

#### Gleichungskonzept

- Bruchzahl  $m/n$  als Lösung der linearen Gleichung  $n*x = m$

Vorteile	Nachteile
- einfache, mathematisch einwandfreie Einführung der Rechenoperationen	- Lösbarkeit der Gleichung wird vorausgesetzt - Vorkenntnisse über Gleichungssysteme nicht vorhanden - sehr formal - Probleme bei Einführung der Division

## 5. Gruppenarbeit

Betrachtet in der Gruppe ob im jeweiligen Schulbuch gemeine Brüche und Dezimalbrüche getrennt oder gemeinsam eingeführt werden und wie die Bruchzahlen eingeführt werden!

Was sind die Vor- und Nachteile?

Teilt dazu die Gruppe in 2 Parteien.

→ 15 min.

Danach:

Diskussion über die Vor- und Nachteile der jeweiligen Einführungsweise.

→ 15 min.

## 6. Gemeine Brüche und Dezimalbrüche im Vergleich

Jeweilige Vorteile von Dezimalbrüchen und gemeinen Brüchen

Dezimalbrüche:

- Dezimale Schreibweise aus Grundschule bekannt (z.B. bei Längen); Rechnen wie mit natürlichen Zahlen
- Rechenoperationen sind einfach und wie bei natürlichen Zahlen; im Vergleich zu gemeinen Brüchen - seltener Fehler

Gemeine Brüche:

- Leichte Veranschaulichung der gemeinen Brüche (kleiner Nenner)
- Rechenregeln = Voraussetzung für die der Dezimalbrüche (v. a. wenn Dezimalbruch = Bruch mit Zehnerpotenz als Nenner)

Getrennte oder parallele Behandlung?

→ Parallelbehandlung verhindert die falsche Vorstellung:

gemeine Brüche und Dezimalbrüche sind zwei verschiedene Arten von Zahlen

Einführung der Rechenoperationen:

- Multiplikation und Division – Beginn mit gemeinen Brüchen  
→ Multiplikation und Division besser begründet und Vermeidung von Fehlern bei Multiplikation und Division der Dezimalbrüche
- Addition und Subtraktion – Beginn mit beiden möglich  
Sinnvoll Beginn mit gemeinen Brüchen → alle 4 Rechenoperationen können übernommen werden
- Ergebnisse in beiden Schreibweisen angeben lassen (→ 2 Schreibweisen, gleiche Zahl); sinnvoller Einsatz des Taschenrechners

## 7. Hausaufgabe

Wie würdest du den Schülern klarmachen, dass erweitern nicht „größer machen“ und kürzen nicht „kleiner machen“ bedeutet?

## 8. Quellen

- MU Der Mathematik-Unterricht, Didaktik der Bruchrechnung; Jahrgang 46 – Heft 2 – März 2000
- Padberg, Friedhelm: „Didaktik der Bruchrechnung“, Verlag Herder Freiburg im Breisgau 1978
- [http://www.stark-verlag.de/upload\\_file/Muster/900061m1.pdf](http://www.stark-verlag.de/upload_file/Muster/900061m1.pdf)
- <http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/arithmetik/bruchrechnen/didaktik/>