Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

21. Februar 2017

Klausur zur Numerik I

Name	Vorname	Matrikel-Nr.	Studiengang

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **sechs** verschiedene Aufgaben (Rückseiten beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden. Das Aufgabenblatt muss wieder abgegeben werden.
2. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer (oder Ihren Namen).
4. Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 Seiten (DIN A 4) mit eigenen Notizen (erstellt mit Latex), welche dieser Klausur beigefügt sind.
   Alle anderen Hilfsmittel sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Die Klausur dauert **90 Minuten**.
7. Zum Bestehen sind mindestens 15 Punkte erforderlich.

Viel Erfolg!

Korrektur

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	gesamt	Note
Punkte	5	4	6	6	6	5	32	–
erreicht								

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer regulären Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$.
Erstellen Sie eine Matlab-Funktion `gauss(A,b)`, welche dieses lineare Gleichungssystem mittels Gauss-Elimination mit **betragsmaximaler Spaltenpivotwahl** löst.

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $p(x) = a + bx^2$ möglichst gut durch die Paare

$$(-1, 0),\ (0, 1),\ (1, 1),\ (2, 11)$$

geht.

Aufgabe 3: (6 Punkte)

a) Es sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ f(t) = \sin(-3t)$. Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ seien paarweise verschiedene Stützstellen $t_{m0}, \dots, t_{mm} \in [-1, 1]$ gegeben. Es bezeichne $p_m(t)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu f bzgl. dieser Stützstellen. Zeigen Sie

$$\lim_{m\to\infty} \| f - p_m \| = 0 \quad .$$

b) Gegeben sei die $(n \times n)$ - Matrix

$$B_n := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Weiter bezeichne E_n die $(n \times n)$ - Einheitsmatrix
Zeigen Sie, dass die Tschebyscheff-Polynome T_n die Beziehung

$$T_n(x) = 2^{n-1} \det(xE_n - B_n) \qquad (n = 1, 2 \dots)$$

erfüllen.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

a) Zeigen Sie:

(1) Ist Q eine orthogonale Matrix, so gilt $\mathrm{lub}_2(Q) = 1$.

(2) Orthogonale Ähnlichkeitstransformationen sind stör**un**empfindlich.

b) Zeigen Sie:

(1) Die Spaltensummennorm N_S ist verträglich mit der $\|\cdot\|_1$ - Norm.

(2) Die Spaltensummennorm N_S ist nicht verträglich mit der $\|\cdot\|_\infty$ - Norm.

bitte wenden

Aufgabe 5: (6 Punkte)

a) Gegeben sei die Iterationsfunktion

$$\Phi(x) \;=\; \frac{2x^2}{3x-2} \quad .$$

(1) Bestimmen Sie alle Fixpunkte von Φ.

(2) Welche Konvergenzordnung besitzt das von Φ erzeugte Verfahren in diesen Fixpunkten (mit Beweis)?

b) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad , \qquad b \;=\; \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

(1) Berechnen Sie mit dem Startwert $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$ einen Iterationsschritt mit dem Einzelschritt-Verfahren (Gauß-Seidel-Verfahren).

(2) Konvergiert das Einzelschritt-Verfahren für den Startwert $x^{(0)} = (100,100,100,100)^T$ (mit Begründung)?

Aufgabe 6: (5 Punkte)

a) Was leistet im folgenden Matlab-Programm die Funktion `unbekannt` (numerische Aufgabenstellung)?

b) Was leistet das folgende Matlab-Programm (numerische Aufgabenstellung)?

```
clear all;
fid = fopen('Aufgabe6.aus','w');
t=0:0.01:3;
k=length(t);
for i=1:k
    z(i) = unbekannt(@f,0,t(i),50);
    fprintf(fid,'  %7.4f     %18.14f \n',t(i),z(i));
end
plot(t,z);
fclose(fid);

function y = unbekannt(f,a,b,N)
  j=0:N;
  x=a + j./N.*(b-a);
  z=(x(1:N)+x(2:N+1))./2;
  y=(b-a)./(6.*N) .* sum( f(x(1:N)) + 4.*f(z) + f(x(2:N+1)) );

 function y = f(t)
   y = 1/sqrt(2*pi)*exp(-0.5.*t.^2);
```