Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

18. April 2017

Nachklausur zur **Numerik I**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **sechs** verschiedene Aufgaben (Rückseiten beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden. Das Aufgabenblatt muss wieder abgegeben werden.
2. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer (oder Ihren Namen).
4. Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 Seiten (DIN A 4) mit eigenen Notizen (erstellt mit Latex), welche dieser Klausur beigefügt sind.
   Alle anderen Hilfsmittel sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Die Klausur dauert **90 Minuten**.
7. Zum Bestehen sind mindestens 15 Punkte erforderlich.

Viel Erfolg!

Korrektur

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	gesamt	Note
Punkte	5	5	5	5	5	6	31	–
erreicht								

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Ergänzen Sie das unten stehende Matlab-Programm so, dass die Anfangswertaufgabe

$$\ddot{x} \;=\; -10\sin(x)\,, \quad x(0) = 0,\; \dot{x}(0) = 5$$

im Intervall $[0, 2]$ näherungsweise durch das explizite RKV mit der Verfahrensmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & & \\ 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

zur Schrittweite $h = 0.1$ gelöst wird. (Hinweis: Die zu ergänzenden Stellen sind eingerahmt.)

```
clear all;
fid = fopen('ergebnis.aus','w');
```

```
h =
t0 =
y0 =
b =
```

```
y = y0;
t = t0;
while t < b
  t = t+h;
  y = rkv(@F,y,h);
  fprintf(fid,'   %10.5f         %15.8f        %15.8f \n',t,y);
end;
```

```
function z = rkv(F,y,h);
% berechnet einen Schritt eines expliziten RKV:
% z = y + h*V(h,y)
```

```
function dx = F(x);
% Funktion fuer die Dgl. xpunkt = F(x)
```

Aufgabe 2: (5 Punkte)

a) Erstellen Sie eine Matlab-Funktion `sekanten(g,x0,x1,eps)` zur Berechnung einer Nullstelle von der Funktion $g(x)$ mit dem Sekantenverfahren. Dabei bedeuten `x0` und `x1` zwei Startwerte und `eps` eine Genauigkeitsschranke. Das Verfahren soll abbrechen, falls gilt

$$|x_i - x_{i-1}| < \texttt{eps} \quad \text{und} \quad |g(x_i)| < \texttt{eps} \quad .$$

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm, welches unter Verwendung der Matlab-Funktion aus a) eine Nullstelle von $f(t) = \exp(-t^2) + t^2 - 5$ berechnet (Startwerte $\texttt{x0} = 2$, $\texttt{x1} = 3$, Toleranz $\texttt{eps} = 10^{-10}$) und auf dem Bildschirm ausgibt.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

Maximiere $x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &\leq 9 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_4 &\leq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 &\leq 10 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (5 Punkte)

a) Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine unzerlegbare obere Hessenberg-Matrix. Weiter sei λ eine Eigenwert und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ein zugehöriger Eigenvektor.

Zeigen Sie: $y_n \neq 0$.

b) Berechnen Sie die Stabilitätsfunktion des Runge-Kutta-Verfahrens mit der Verfahrensmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{3} & & \\ 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array} \right) \quad .$$

Aufgabe 5: (5 Punkte)

a) Berechnen Sie $\text{lub}_2(A)$ und $\text{cond}_2(A)$ für

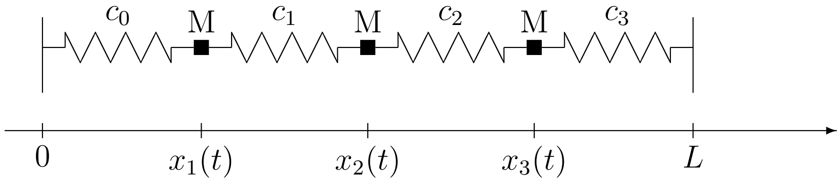
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad .$$

b) Zeigen Sie, dass eine Quadraturformel mit $m + 1$ Stützstellen höchstens den Exaktheitsgrad $M = 2m + 1$ hat.

bitte wenden

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Gegeben sei die lineare Kette (das schwingende Federsystem)



mit Massen $M = 1$, Gesamtlänge $L = 26$, Ruhelänge der Federn jeweils $L_0 = 5$ und Federkonstanten $c_0 = 1,\ c_1 = 2,\ c_2 = 2,\ c_3 = 4$.

Die Bewegungsgleichungen für die Massenpunkte führen auf das Differentialgleichungssystem $\ddot{x}(t) \ = \ b \ - \ Ax(t)$.

a) Geben Sie für die obige Kette A und b an.

b) Bestimmen Sie einen möglichst kleinen Bereich, in dem alle Eigenwerte von A liegen.

c) Berechnen Sie mit dem Verfahren von Hyman das charakteristische Polynom von A an der Stelle $\mu = 4$.