Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

13. April 2018

Nachklausur zur Numerik I

Name	Vorname	Matrikel-Nr.	Studiengang

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **sechs** verschiedene Aufgaben (Rückseiten beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden. Das Aufgabenblatt muss wieder abgegeben werden.
2. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer auf dieses Deckblatt und auf jedes einzelne Blatt. Die Angabe des Namens erfolgt freiwillig.
4. Schreiben Sie die Lösungen **mit Tinte oder Kugelschreiber**.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** 2 Seiten (DIN A 4) mit eigenen Notizen (erstellt mit Latex), welche dieser Klausur beigefügt sind.
   Alle anderen Hilfsmittel sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Die Klausur dauert **90 Minuten**.
7. Zum Bestehen sind mindestens 15 Punkte erforderlich.

Viel Erfolg!

Korrektur

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	gesamt	Note
Punkte	5	5	6	6	4	6	32	–
erreicht								

Aufgabe 1: (5 Punkte)
Ergänzen Sie das unten stehende Matlab-Programm so, dass die Anfangswertaufgabe

$$\ddot{x} \;=\; 3x^2 - 8x + 4\,, \quad x(1) = 1,\; \dot{x}(1) = 2$$

im Intervall $[1,4]$ näherungsweise durch das explizite RKV mit der Verfahrensmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & & \\ -1 & 2 & \\ \hline \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{array}\right)$$

zur Schrittweite $h = 0.1$ gelöst wird. (Hinweis: Die zu ergänzenden Stellen sind eingerahmt.)

```
clear all;
fid = fopen('ergebnis.aus','w');
```

```
h =
t0 =
y0 =
b =
```

```
y = y0;
t = t0;
while t < b
  t = t+h;
  y = rkv(@F,y,h);
  fprintf(fid,'   %10.5f          %15.8f        %15.8f \n',t,y);
end;
```

```
function z = rkv(F,y,h);
% berechnet einen Schritt eines expliziten RKV:
% z = y + h*V(h,y)
```

```
function dx = F(x);
% Funktion fuer die Dgl. xpunkt = F(x)
```

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Welche Funktion der Form $p(x) = a + bx^2 + cx^4$ geht möglichst gut durch die Paare

$$(-1, 0),\ (0, 1),\ (1, -1),\ (2, 1)\ ?$$

Aufgabe 3: (6 Punkte)

Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem:
Maximiere $3x_1 + 2x_2 + x_3$ unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 12 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &\geq -15 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 2 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Es seien $l_i(t),\ i = 0, \ldots, m$ die Lagrange-Grundpolynome zu den $m + 1$ Stützstellen $a \leq t_0 < \ldots < t_m \leq b$.

a) (1) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `grundpolynom(t,i,m,T)` für das Lagrange-Grundpolynom $l_i(t)$. Dabei sei `T`$= (t_0, \ldots, t_m)$ der Vektor mit den Stützstellen.

(2) Erstellen Sie ein Matlab-Programm, welches über den Bildschirm die Zahl m einliest und dann im Intervall $[a, b] = [-1, 1]$ bei äquidistanter Stützstellenwahl die Funktion

$$L(t) = \sum_{i=0}^{m} |l_i(t)|$$

zeichnet.

b) Es sei p_m das Interpolationspolynom zu den Stützpaaren $(t_i, s_i),\ i = 0, \ldots, m$, und q_m das Interpolationspolynom zu den Stützpaaren $(t_i, r_i),\ i = 0, \ldots, m$. Zeigen Sie: Für jedes $t \in [a, b]$ gilt

$$|p_m(t) - q_m(t)| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{m} |l_i(t)|$$

mit $\varepsilon := \max\{|s_i - r_i| : i = 0, \ldots, m\}$.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Gauß-Quadraturformel mit $m+1$ Stützstellen den Exaktheitsgrad $M = 2m + 1$ hat.

bitte wenden

b) Von der stetig differenzierbaren Funktion $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei ein lokales Minimum gesucht. Zur näherungsweisen Berechnung wird ein Abstiegsverfahren mit dem Anfangswert $y^{(0)}$ verwendet, welches nach dem k-ten Schritt im Punkt $y^{(k)}$ angelangt ist. Weiter sei A eine positiv definite $n \times n$-Matrix.
Zeigen Sie: Gilt $\operatorname{grad} h(y^{(k)}) \neq 0$, so ist

$$p^{(k)} = -A \cdot \operatorname{grad} h(y^{(k)})$$

eine Abstiegsrichtung (dabei wird $\operatorname{grad} h(y^{(k)})$ als Spaltenvektor aufgefasst).

Aufgabe 6: (6 Punkte)

a) Ist die euklidsche Matrixnorm (Schur-Norm) N_E verträglich mit der Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ (mit Beweis)?

b) Es sei $p(t)$ das charakteristische Polynom von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

Berechnen Sie mit dem **Verfahren von Hyman** $p(-1)$ und $p'(-1)$.