Kompetenzen für Mathematik-orientierte Studiengänge

Michael Dreher, Universität Konstanz, FB Mathematik und Statistik

10.10.2012

Zusammenfassung

Dies ist eine Auflistung von Kenntnissen und Kompetenzen, die zu Beginn eines mathematischen Studiums (Bachelor oder Lehramt), aber teilweise auch zu Beginn eines Physikstudiums, präsent sein sollten, um einen reibungsarmen Start ins Studium zu erleichtern. Eine Vorbereitung in der Sommerpause vor dem Beginn des ersten Semesters sei empfohlen. Es wird in diesem Text unterschieden nach Kenntnissen und Fähigkeiten, die

- auf jeden Fall präsent sein sollten und auch in den Schulen unterrichtet werden,
- *wünschenswerte* Kenntnisse und Fähigkeiten, die in den Schulen vermutlich nicht überall vermittelt werden, aber trotzdem nicht übermäßig schwierig und deshalb für das Selbststudium geeignet sind (markiert mit *ww*). Die Verwendung von Nachschlagewerken ist für das Selbststudium ausdrücklich erwünscht.

Mit „präsent" ist gemeint: Wenn Sie nachts um drei geweckt werden, sollten entsprechende Fragen beantwortet werden können.

Wahrscheinlich ist die Liste unvollständig !

1 Kenntnisse aus verschiedenen Themenfeldern der Mathematik

Die hier aufgelisteten Dinge sollten Sie sicher kennen, und einige der genannten Aussagen sollten Sie begründen können.

1.1 Elementare Algebra und Polynome

- binomische Formel $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. (ww: einer von zwei Beweisen — kombinatorisch oder mittels vollständiger Induktion)
- die Formel $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
- als Folgerung davon: die Summenformel für die Teilsumme $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ der geometrischen Reihe
- Polynomdivision

1.2 Zahlentheorie

- schriftliche Division von Zahlen
- Division mit Rest
- Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers mittels Euklidischem Algorithmus. Sie sollten begründen können, daß dieser Algorithmus tatsächlich den ggT liefert.
- die Existenz unendlich vieler Primzahlen (mit Beweis)

- ww: Primzahlsieb des Eratosthenes
- Teilbarkeitsregeln für 3, 9, 11 (mit Beweis)
- Primfaktorzerlegung

1.3 Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen und quadratische Gleichungen

- Potenzgesetze $(ab)^n = a^n b^n$ usw. für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{Z}$ sowie $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ für $x, y > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$
- Lösungsformel für quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$, mit Begründung
- ww: Vieta–Formeln für quadratische Polynome $P(x) = ax^2 + bx + c$

1.4 Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion

- Exponentialgesetz $e^{x+y} = e^x e^y$ fur $x, y \in \mathbb{R}$
- Definition des natürlichen Logarithmus als Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion
- Logarithmengesetze $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ usw. für positive x, y
- Ableitungen von Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion kennen (ww: Beweis von $\ln'(x) = \frac{1}{x}$)
- ww: Stammfunktionen von ln kennen

1.5 Winkelfunktionen

- Lokalisieren von sin, cos, tan, cot am Einheitskreis
- Periodizitätseigenschaften dieser Funktionen
- Beziehungen zwischen den vier Winkelfunktionen wie z.B. $\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha)$ und $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- spezielle Werte (Sinus und Kosinus von 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, mit Begründung)
- Graphen der vier Winkelfunktionen skizzieren
- Ableitungen der Winkelfunktionen kennen
- Additionstheoreme $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$ und $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- ww: Additionstheoreme für tan und cot aus den Additionstheoremen von sin und cos herleiten
- ww: Graphen der Umkehrfunktionen arcsin, arccos, arctan zeichnen

1.6 Analysis

- die Begriffe „Funktion“ und „Monotonie“ definieren können
- Umkehrfunktionen graphisch finden
- Anstieg einer Tangente definieren können
- Ableitungsregeln für Summe, Produkt, Verkettung kennen (ww: die Produktregel mit Begründung)
- Ableitungsregel für allgemeine Potenzfunktionen $x \mapsto x^\alpha$ für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ kennen
- $(x^n)' = nx^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ beweisen können (per Induktion oder mit binomischer Formel)
- Ableitungsregel für Quotienten begründen können (z.B. als Kombination von Produktregel und Kettenregel)

1.7 Analytische Geometrie

- Darstellungsmöglichkeiten für eine Gerade im $\mathbb{R}^2$:
  - $\{(x, y) \colon ax + by = c\}$
  - $\{(x, y) \colon y = mx + n\}$
  - $\{(x, y) = (x_0, y_0) + t\vec{r} \colon t \in \mathbb{R}\}$
  - $\{(x, y) \colon \frac{x}{y} + \frac{y}{b} = 1\}$
  - Hessesche Normalform
- Umwandlungen zwischen diesen Darstellungen, Gültigkeitseinschränkungen, geometrische Interpretationen
- analog für den Fall einer Ebene im $\mathbb{R}^3$
- analog für den Fall einer Geraden im $\mathbb{R}^3$ (Sie sollten begründen können, warum einige der obigen Darstellungen jetzt nicht mehr funktionieren !)
- Bestimmung von Abständen: Punkt–Gerade in der Ebene, Punkt–Ebene im Raum, Punkt–Gerade im Raum
- Bestimmung des Abstands zweier windschiefer Geraden im Raum (ww: mittels zweier Rechenwege — Hessesche Normalform bzw. Kreuzprodukt)
- zwei Definitionen für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j$, und Beweis der jeweils anderen Darstellung
- ww: Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ und seine Eigenschaften
- Bedeutung von $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

1.8 Elementare Geometrie

Jeden der hier genannten Sätze sollten Sie formulieren, und (abgesehen von den Kongruenzsätzen für Dreiecke) die Mehrheit der folgenden Sätze sollten Sie beweisen können:

- Kongruenzsätze für Dreiecke
- Satz des Pythagoras und seine Umkehrung, Kathetensatz und seine Umkehrung
- Thalessatz und seine Umkehrung
- Mittelpunkts–Umfangswinkelsatz und dessen Umkehrung (gelegentlich auch bekannt als Peripherie–Zentriwinkel–Satz)
- der erweiterte Sinussatz: wenn a, b, c die Seiten eines Dreiecks sind und α, β, γ die Innenwinkel in üblicher Bezeichnungsweise, dann ist $\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2R$, wobei R der Umkreisradius ist.
- Kosinussatz

Ein Teil der hier genannten Sätze ist vorwiegend aus kulturellen Gründen interessant und hat nur minimale Bedeutung für bspw. industrielle Anwendungen. Viel wertvoller sind diese Sätze allerdings, weil man an ihnen das Finden und das Aufschreiben von Beweisen üben kann (und dies sind nun mal die studentischen Hauptbeschäftigungen im Mathematikstudium).

1.9 Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung

- Fakultät und deren kombinatorische Bedeutung
- Binomialkoeffizient
  - kombinatorische Bedeutung
  - Beziehung zum Pascal–Dreieck
  - Definition
- Binomialverteilung (Einzelwahrscheinlichkeit, Erwartungswert, Streuung)
- Normalverteilung als Grenzwert der Binomialverteilung

1.10 Weiteres

- die Funktion $x \mapsto e^{-x^2}$ skizzieren und ihre Bedeutung angeben
- einige Beweismethoden sollten Sie kennen:
  - direkter Beweis
  - indirekter Beweis
  - Beweis mittels vollständiger Induktion
  - evtl. weitere Methoden wie z.B. Extremalmethode oder Invarianten

2 Problemlösen

Das Problemlösen ist ein Prozeß, der folgende vier Schritte umfaßt:

1. das Problem verstehen
2. einen Plan entwerfen
3. den Plan durchführen
4. die erhaltene Lösung des Problems prüfen

Folgende Probleme seien zum Üben empfohlen. Jedes hat einen Lösungsweg, der aus recht wenigen Gedankenschritten besteht, aber trotzdem ist es völlig normal, wenn man für ein Problem mehrere Tage benötigt, um diese Schritte zu entdecken. Die Freude ist dann aber riesig !

- Man errate und begründe die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion (nach einem Blick auf die Graphen und die Anstiegsdreiecke, oder nach einem Blick auf die Kettenregel).
- Man beweise den erweiterten Sinussatz.
- Es ist $\frac{1}{12} = 0.0833333\ldots$, und der Abschnitt „08“ heißt „Vorperiode“, weil die Dezimalbruchentwicklung erst hinter ihm periodisch ist. Man zeige für jede Primzahl p (mit $p \neq 2$ und $p \neq 5$), daß die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{p}$ keine Vorperiode besitzt.
- Man zeige: wenn p eine Primzahl ist (aber $p \neq 2$ und $p \neq 5$), dann hat die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{p}$ eine Periodenlänge, die ein Teiler von $p-1$ ist (der Beweis ist für jedes p zu führen !).
- Man zeige: wenn a, b beliebige natürliche Zahlen sind, und p ist eine Primzahl mit $p|ab$, dann ist $p|a$ oder $p|b$. Darauf aufbauend beweise man, daß für jede natürliche Zahl die Primfaktorzerlegung eindeutig ist.[1]
- Man begründe folgenden Kopfrechentrick: es ist $\sqrt{2} \approx 1.414$ und $\sqrt{3} \approx 1.732$ (das kann man sich merken). Nun ist aber $1.414 = \frac{7}{5}(1+1\%)$ und $1.732 \approx \frac{7}{4}(1-1\%)$, also ist dann ungefähr $\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \frac{7/5}{7/4}(1+1\%-(-1\%)) = \frac{4}{5}(1+2\%) = 0.816$. Auf diesem Wege kann man $\sqrt{\frac{2}{3}}$ im Kopf auf drei zuverlässige Stellen bestimmen.[2]
- Man begründe folgenden Kopfrechentrick: die Zeit in Jahren, die ein Kapital zur Verdoppelung benötigt, wenn es mit einem Zinssatz von $p\%$ angelegt wird (bei Gewährung von Zinseszins), ist ungefähr $\frac{70}{p}$.
- Wir haben eine zylinderförmige gerade Salami, um die wir mehrere Lagen Papier eng wickeln. Dann schneiden wir die Wurst mitsamt Papier schräg durch, wodurch das Papier in zwei Teile zerfällt. Wir wickeln das Papier ab. Was ist die Schnittfigur (mit vollständiger Begründung) ?
- Gegeben sei ein Stück Papier mit der Form eines Kreissektors. Dieser kann zu einem Kegel gerollt werden, sodaß die Radien des Kreissektors zu Mantellinien des Kegels werden. Ermitteln Sie denjenigen Kreissektorwinkel, für den das Kegelvolumen maximal wird (hierbei sei der Kreissektorradius konstant).
- Die Formel $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ soll bewiesen werden.
- Gesucht ist eine explizite Formel für die Kapitalentwicklung eines Banksparplans, bei dem man zu Beginn eines jeden Jahres denselben Betrag einzahlt, und bei dem das aktuelle Guthaben mit einem konstanten Zinssatz verzinst wird.

[1] Man begründe, daß es logisch unzulässig ist, die beiden Aussagen in umgekehrter Reihenfolge zu beweisen.
[2] Wer den Rechenweg begründen kann, hat die Idee hinter der Differentialrechnung verstanden !

3 Kritisches Denken

Die folgenden Aussagen sind allesamt falsch. Sie sollten begründen können, warum:

- Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$, dann ist $\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha)}$, denn $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
- $F(x) = x^2 + 7x$ ist die Stammfunktion zu $f(x) = 2x + 7$.
- Es ist
$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = ((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = +2.$$
- Wenn eine differenzierbare Funktion $f = f(x)$ in einem Punkt x_0 ein Minimum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.
- Wenn die reellen Zahlen x, y als kartesische Koordinaten eines Punktes im $\mathbb{R}^2$ mit den Polarkoordinaten r und φ desselben Punktes in Beziehung stehen gemäß $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$, dann ist $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$.
- Wenn zwei Vektoren orthogonal aufeinander stehen, dann sind sie linear unabhängig.
- Wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ die Beziehung $\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$ erfüllen, dann ist $\vec{a} = \vec{b}$.
- Die Zahl $-x$ ist negativ, weil da vorne ein Minus dransteht.

Sie dürfen gerne in geeigneten Lexika (oder auch in der Wikipedia) nachschlagen, was z.B. Polarkoordinaten sind !