Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
M. Dreher 09.12.2011

Übungen zur Mathematik für Physiker I, Blatt 8

Die Lösungen sind abzugeben am Freitag, 16.12.2011, vor Beginn der Vorlesung.

1. Es sei V ein K–Vektorraum. Es seien Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus V gegeben, die linear abhängig sind. Zusätzlich setzen wir voraus, daß jeweils $n-1$ dieser Vektoren linear unabhängig sind. Beweisen Sie die beiden folgenden Aussagen:

   (a) Es existieren Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$ mit $\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j = 0$.

   (b) Die Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seien so wie eben. Wenn es weitere Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n$ gibt mit der Eigenschaft, daß $\sum_{j=1}^n \mu_j v_j = 0$ gilt, dann ist immer

$$\frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\lambda_2} = \cdots = \frac{\mu_n}{\lambda_n}.$$

2. Es sei P_N der Vektorraum der Polynome in einer reellen Variablen (mit reellen Koeffizienten) vom Grad höchstens gleich $N \in \mathbb{N}_+$. Weiterhin betrachten wir die Abbildungen *Differentiation* und *Translation*:

$$D\colon P_N \to P_{N-1}, \qquad T_\gamma\colon P_N \to P_N,$$
$$D\colon f \mapsto f', \qquad T_\gamma\colon f \mapsto T_\gamma f,$$

   wobei $(T_\gamma f)(x) := f(x-\gamma)$, und hier ist $\gamma \in \mathbb{R}$ fixiert.

   (a) Zeigen Sie: die Abbildungen D und T_γ sind linear.

   (b) Finden Sie geeignete Basen in den beteiligten Vektorräumen und stellen Sie die Abbildungsmatrizen für D und T_γ in Bezug auf diese Basen dar. *Hinweis:* Im Zielvektorraum kann man eine andere Basis wählen als im Ausgangsvektorraum.

3. **(LR–Zerlegung)** Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Man bringe A auf Dreiecksform (das heißt: unterhalb der Diagonalen ausräumen, aber nicht oberhalb; und die Diagonaleneinträge auch nicht auf 1 normieren).

   (b) Man finde Matrizen B und C mit $A = BC$ und der Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}.$$

   (c) Wo finden Sie die Einträge b_{ij} aus (b) in (a) wieder ?

   (d) Wenn eine solche Zerlegung $A = BC$ bekannt ist — wie kann man dann Gleichungssysteme der Form $Ax = b$ ganz einfach lösen ?

4. (a) Finden Sie eine lineare Abbildung f im $\mathbb{R}^3$, die Ihnen aus dem alltäglichen Leben bekannt ist, mit $f \circ f = f$, und mit nicht–banalem Kern.

   (b) Sei $f \in \mathcal{L}(V \to V)$ mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, daß dann $\ker f \oplus \operatorname{img} f = V$. *Hinweis:* Zwei Dimensionsformeln könnten im weiteren Beweisverlauf nützlich werden.

Aufgabe zum Gegenseitigkorrigieren

5. (a) Man löse das Gleichungssystem $Ax = b$, mit

$$A = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1 \\ 1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

   (b) Im Vektorraum $\mathbb{C}^3$ über dem Körper $K = \mathbb{C}$ sei der Vektor $b_1 = (1, \mathrm{i}, 2-\mathrm{i})^\top$ gegeben. Man ermittle Vektoren $b_2 \neq 0$ und $b_3 \neq 0$, sodaß (b_1, b_2, b_3) ein Orthogonalsystem bilden.

Hinweis: Gram-Schmidt-Verfahren. Aufpassen mit dem Konjugieren eines Faktors des Skalarprodukts.

Adventsaufgabe

6. Im n-Advent-Land (n sei eine natürliche Zahl) dauert die Adventszeit n Wochen. Auch dort ist es üblich, daß zum 1. Advent eine von n Kerzen für eine Brenndauer von D Stunden angezündet wird, zum 2. Advent zwei Kerzen angezündet werden und so weiter bis zum n-ten Advent, wenn alle n Kerzen angezündet werden. Wir nehmen an, daß die Brenndauer bei jedem Advent für jede Kerze gleichlang ist, und daß die Abbrenngeschwindigkeiten immer gleich sind, so daß nach jedem Anzünden eine gleiche Höhe (und diese ist positiv) abbrennt. Zum Beginn sind alle Kerzen gleichlang. Für welche n kann man für die Kerzen ein Anzündschema so finden, daß nach dem n-ten Advent alle Kerzen rückstandsfrei verbrannt sind?

```
, ,    ,      ,    ,     ,     ,   ,      ,     ,     ,      ,     ,
,       ,     ,    ,       ,   .____. ,   ,     ,      ,      ,      ,
 ,    ,   ,    ,     ,   ,   , |   :|         ,   , ,   ,   ,      ,
   ,        ,    ,     ,     __|====|__ ||||||  ,        ,      ,     ,
 ,   ,    ,   ,     ,    , *  / o  o \  ||||||,   ,  ,        ,    ,
,   ,   ,         ,   ,     * | -=   |  \====/ ,       ,   ,    ,     ,
   ,  ,    ,   ,           , U==\__//__. \\//    ,  ,        ,    ,
,   ,  ,    ,    ,    ,  ,   / \\==// \ \ ||  ,   ,      ,         ,
 ,  ,    ,    ,     ,      ,|    o ||  | \||   ,      ,     ,   ,     ,
,      ,    ,    ,      ,   |    o ""  |\_|B),    ,  ,    ,       ,
  ,  ,    ,   ,     ,      , \__  --__/   ||  ,        ,      ,    ,
,  ,   ,       ,     ,   ,  /          \  ||,   ,   ,      ,    ,    ,
 ,      ,   ,     ,        |            | ||      ,  ,   ,    ,   ,
,    ,    ,   ,  ,    ,   ,|            | || ,  ,  ,   ,   ,     , ,
 ------_____---------____---\__ --_  __/__LJ__---------________-----___
```