D Determinanten

Im Vorkapitel hatten wir Determinanten von drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kennengelernt und geometrisch gedeutet. Wir werden diesen Begriff nun ausdehnen zur Determinante von n Vektoren im $\mathbb{R}^n$, bzw. von $n \times n$-Matrizen. Diese Determinante werden wir benutzen für mehr theoretische Überlegungen bei linearen Gleichungssystemen und der Bestimmung der inversen Matrix, später bei der Eigenwerttheorie von Endomorphismen und außerhalb der linearen Algebra bei der Intergralrechnung in mehreren Veränderlichen.
Zunächst ein paar Vorüberlegungen: Messen wir im $\mathbb{R}^2$ Abstände auf die übliche Weise, sodaß also der Abstand des Punktes $x = (\xi_1, \xi_2)$ vom Nullpunkt gerade $|x|_2 = \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)}$ ist, so können wir auch auf naive Weise zu je zwei Punkten x, y den Inhalt $V(x, y)$ des von ihnen aufgespannten Parallelogramms mit den Ecken $0, x, y, x + y$ bestimmen.

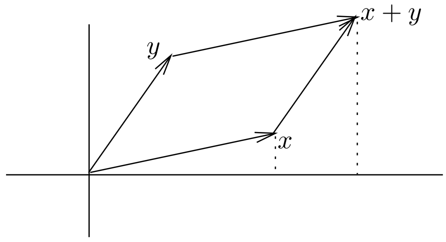


Abbildung 4

Man rechnet nach:

$$\begin{aligned} V(x,y) &= 2\left(\frac{1}{2}(\xi_1+\eta_1)(\xi_2+\eta_2) - \frac{1}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{1}{2}\eta_1\eta_2 - \eta_1\xi_2\right) \\ &= \xi_1\xi_2 + \xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2 - 2\eta_1\xi_2 \\ &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2. \end{aligned}$$

Eine ähnlich gebaute, aber kompliziertere Formel für das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Spates hatten wir im Vorkapitel bereitgestellt. Untersuchen wir die eben gewonnene Formel auf strukturelle Eigenschaften. Es gelten:

1. $V(x, y)$ ist linear in jeder Variablen, d.h. $V(u + v, y) = V(u, y) + V(v, y)$ und $V(\alpha x, y) = \alpha V(x, y)$. Analoges gilt in der zweiten Variablen. Daß hierbei negative Werte für V auftreten könne, sollte Sie nicht stören. Bei der Deutung des Integrals als Flächeninhalt ist sowas ja auch schon aufgetreten.

2. Sind x und y linear abhängig, so ist $V(x, y) = 0$. Geometrisch ist dies klar, da dann das Parallelogramm "zusammenklappt". Sie können es aber auch in der Formel nachrechnen.

3. Für die kanonischen Einheitsvektoren e_i ist $V(e_1, e_2) = 1$.

Diese drei Eigenschaften von $V(x, y)$ werden wir als Grundlage der Definition der "Determinante" nehmen.

Determinantenfunktionen

Im weiteren sei wieder $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.

Definition und Satz D.1 (Determinantenfunktion) *Zu jeder natürlichen Zahl n existiert genau eine Abbildung*

$$\Delta : \underbrace{K^n \times K^n \times ... \times K^n}_{n \; mal} \to K : (x_1, ..., x_n) \mapsto \Delta(x_1, ..., x_n)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

D1: *Δ ist linear in jedem einzelnen Argument, man sagt "n-linear".*

D2: *Sind $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig, so ist $\Delta(x_1, ..., x_n) = 0$, man sagt "alternierend".*

D3: *Für die kanonischen Einheitsvektoren e_i ist $\Delta(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.*

Eine Funktion Δ mit D1 und D2 heißt "Determinantenfunktion", sie heißt "normiert", wenn zusätzlich noch D3 gilt.
Die Bedingung D1 bedeutet dabei, daß für alle $i = 1, ..., n$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, \alpha x + \beta y, x_{i+1}, ..., x_n) &= \alpha\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) \\ &\quad + \beta\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n).\end{aligned}$$

Zum Beweis zeigen wir zunächst ein auch später für das Umgehen mit Determinanten nützliches Lemma:

Lemma D.2 *Für eine Abbildung $\Delta : (K^n)^n \to K$ mit den Eigenschaften D1 und D2 gelten*

1. *Addiert man zu einem Argument ein Vielfaches eines anderen Argumentes, so ändert sich der Wert der Determinantenfunktion nicht, d.h.*

$$\forall_{i \neq j} \forall_{\lambda \in K} \; \Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = \Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, ..., x_n).$$

2. *Multipliziert man ein (nicht gleich alle!) Argument mit einem Faktor $\lambda \in K$, so multipliziert sich der Wert der Determinantenfunktion mit λ, d.h.*

$$\forall_i \forall_{\lambda \in K} \; \Delta(x_1, ..., x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = \lambda\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n).$$

3. *Vertauscht man zwei Argumente, so multipliziert sich der Wert der Determinantenfunktion mit -1, d.h.*

$$\forall_{i \neq j} \; \Delta(..., x_i, ..., x_j, ...) = (-1)\Delta(..., x_j, ..., x_i, ...).$$

Beweis: Zu 1.: Nach D1 ist

$$\Delta(..., x_j, ..., x_i + \lambda x_j, ...) = \Delta(..., x_j, ..., x_i, ...) + \lambda\Delta(..., x_j, ..., x_j, ...).$$

Im letzten Term sind zwei Argumente gleich, also die n Argumente linear abhängig, sodaß er nach D2 verschwindet.
Zu 2.: Dies ist ein Spezialfall von D1.
Zu 3.: Mit dem eben gezeigten ist

$$\begin{aligned}\Delta(..., x_i, ..., x_j, ...) &= \Delta(..., x_i - x_j, ..., x_j, ...) \\ &= \Delta(..., x_i - x_j, ..., x_j + (x_i - x_j), ...) \\ &= \Delta(..., x_i - x_j, ..., x_i, ...) \\ &= \Delta(..., -x_j, ..., x_i, ...) \\ &= -\Delta(..., x_j, ..., x_i, ...).\end{aligned}$$

□

Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit der normierten Determinantenfunktion. Hierzu zeigen wir etwas allgemeiner

Satz D.3 *Sind Δ und Δ' zwei Determinantenfunktionen auf dem K^n und ist dabei Δ normiert, so existiert eine Konstante c, sodaß für alle $x_1, ..., x_n \in K^n$ gilt*

$$\Delta'(x_1, ..., x_n) = c\Delta(x_1, ..., x_n).$$

Da eine normierte Determinantenfunktion auf den kanonischen Einheitsvektoren den Wert 1 annimmt, folgt daraus sofort

Korollar D.4 *Auf dem K^n gibt es höchstens eine normierte Determinantenfunktion.*

Satz D.3 impliziert also die eingangs behauptete Eindeutigkeit der normierten Determinantenfunktion.

Beweis: (von Satz D.3) Wir setzen $c := \Delta'(e_1, ..., e_n)$ und zeigen, daß mit dieser Konstanten die Gleichung

$$\Delta'(y_1, ..., y_n) = c\Delta(y_1, ..., y_n)$$

für beliebige Argumente $(y_1, ..., y_n) \in (K^n)^n$gilt.
Trivialerweise gilt sie natürlich für die Einheitsvektoren.
Sei nun $(y_1, ..., y_n) \in (K^n)^n$ gegeben. Ist diese Familie linear abhängig, so ist

$$\Delta'(y_1, ..., y_n) = 0 = c \cdot 0 = c\Delta(y_1, ..., y_n)$$

und die Formel gilt.
Sei also $(y_1, ..., y_n) \in (K^n)^n$ linear unabhängig. Die Matrix Y, die die y_i als Zeilen hat, ist dann invertierbar, ihre GAUSS-JORDAN-Form ist damit die Einheitsmatrix I_n, die gerade die Einheitsvektoren e_i als Zeilen hat. Die GAUSS-JORDAN-Form läßt sich aber aus Y herstellen durch eine Folge von Operationen von folgendem Typ:

- Addiere zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen.
- Multipliziere eine Zeile mit einem Faktor λ.
- Vertausche zwei Zeilen.

Dies sind aber gerade die in Lemma D.2 beschriebenen Operationen, sodaß sich

- bei der ersten $\Delta(y_1, ..., y_n)$ und $\Delta'(y_1, ..., y_n)$ beide nicht ändern,
- bei den anderen beiden Operationen $\Delta(y_1, ..., y_n)$ und $\Delta'(y_1, ..., y_n)$ jeweils um denselben Faktor $\neq 0$ ändern.

Am Ende werden $\Delta(e_1, ..., e_n)$ bzw. $\Delta'(e_1, ..., e_n)$ erreicht, wofür die Gleichung gilt. Dann muß aber schon $\Delta'(y_1, ..., y_n) = c\Delta(y_1, ..., y_n)$ gewesen sein. □

Die Konstruktion einer Determinatenfunktion

Für $n = 1$ ist $(K^1)^1 = K$ und

$$\Delta_1 : (K^1)^1 \to K : x := (\xi) \mapsto \xi$$

ist die normierte Determinantenfunktion.

Für $n = 2$ sei $x_j = \begin{pmatrix} \xi_{1j} \\ \xi_{2j} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2$ und

$$\Delta_2 : (K^2)^2 \to K : (x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} \mapsto \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21}$$

ist die normierte Determinantenfunktion.
Von hier aus konstruieren wir nun rekursiv für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine normierte Determinantenfunktion Δ_n.
Wir verabreden folgende

Bezeichnung D.5 *Zu $x \in K^n$ und $1 \leq i \leq n$ bezeichne $x^{(i)} \in K^{n-1}$ den durch Streichen der i-ten Komponente entstehenden Vektor.*

Damit gilt:

Satz D.6 *Für jedes $n > 1$ und jedes $i : 1 \leq i \leq n$ bzw. jedes $j : 1 \leq j \leq n$ ist*

$$\begin{aligned} \Delta_n(x_1, ..., x_n) :&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} \Delta_{n-1}(x_1^{(i)}, ..., x_{j-1}^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, ..., x_n^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} \Delta_{n-1}(x_1^{(i)}, ..., x_{j-1}^{(i)}, x_{j+1}^{(i)}, ..., x_n^{(i)}) \end{aligned}$$

die normierte Determinantenfunktion zur Dimension n, d.h. die durch die Summen dargestellten Funktionen sind unabhängig von dem Parameter $i = 1, ..., n$ in der ersten bzw. $j = 1, ..., n$ in der zweiten und stellen sämtlich die einzige normierte Determinantenfunktion auf $(K^n)^n$ dar.

Der Beweis geschieht durch Nachrechnen der Eigenschaften D1, D2, D3. Er sei übergangen.

Die Determinante einer Matrix

Im folgenden bezeichne Δ die normierte Determinantenfunktion zu der jeweils aktuellen Dimension.

Definition D.7 (Determinante einer Matrix) *Für eine $n \times n$ - Matrix $A \in (K^n)^n$ mit Spalten $(a_{.1}, ..., a_{.n})$ heißt*

$$\det A := \Delta(a_{.1}, ..., a_{.n})$$

die "Determinante der Matrix A."

Dafür gilt

Satz D.8 *Für $n \times n$ - Matrizen A, B und die $n \times n$ Einheitsmatrix I gelten*

1. *Es ist* $\det I = 1$.
2. *Es ist* $\det BA = \det B \cdot \det A$.
3. *Ist A invertierbar, so ist* $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.
4. *Es ist* $\det A = 0$ *genau dann, wenn* $\operatorname{rg} A < n$ *und damit* $\ker A \neq (0)$.
5. *Es ist* $\det A \neq 0$ *genau dann, wenn* $\operatorname{rg} A = n$, *d.h. wenn A invertierbar ist.*
6. *Ist B invertierbar, so ist* $\det(B^{-1}AB) = \det A$, *d.h. ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante*

Beweis:

1. Dies ist die Eigenschaft D3 von Δ.

2. Betrachte die Abbildung

$$\Delta_B(x_1, ..., x_n) := \Delta(Bx_1, ..., Bx_n).$$

Man rechnet leicht nach, daß sie die Eigenschaften D1 und D2 hat, somit eine Determinantenfunktion ist und folglich eine Darstellung als

$$\Delta_B(x_1, ..., x_n) = \Delta(Bx_1, ..., Bx_n) = c \cdot \Delta(x_1, ..., x_n)$$

besitzt, wobei sich die Konstante c zu

$$c = c\Delta(e_1, ..., e_n) = \Delta(Be_1, ..., Be_n) = \Delta(b_{.1}, ..., b_{.n}) = \det B$$

ergibt. Dann haben wir aber für eine Matrix $A = (a_{.1}, ..., a_{.n})$

$$\begin{aligned}\det(BA) &= \Delta(Ba_{.1}, ..., Ba_{.n}) = \Delta_B(a_{.1}, ..., a_{.n}) \\ &= \det B \cdot \Delta(a_{.1}, ..., a_{.n}) = \det B \det A.\end{aligned}$$

3.-5. Ist A invertierbar, so ist dann wegen $A^{-1}A = I$ auch

$$\det A^{-1} \det A = \det(A^{-1}A) = \det I = 1,$$

somit insbesondere auch $\det A \neq 0$.

Ist $\operatorname{rg} A < n$, so sind die Spalten linear abhängig, und somit ist insbesondere nach D2 dann $\det A = 0$.

6. folgt trivial aus dem vorigen.

□

Zum Berechnen der Determinante stehen uns über obige Definition D.7 natürlich die Rekursionsformeln von Satz D.6 zur Verfügung, bekannt als

Satz D.9 (Entwicklungssatz von Laplace) *Für eine $n \times n$-Matrix $A = (\alpha_{\nu\mu})$ und Indices $i, j : 1 \leq i, j \leq n$ bezeichne A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht. Damit gilt für jedes $i = 1, ..., n$ die Entwicklung nach Zeile i :*

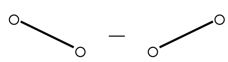
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

und für jedes $j = 1, ..., n$ die Entwicklung nach Spalte j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Als Rechenregeln zum Berechnen von Determinanten ergeben sich damit etwa:

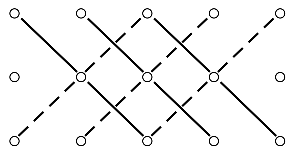
$\det\ (a_{11}) = a_{11}$ $\det(\circ) = \circ$

$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ $\det \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} =$ 

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Die letzte Formel kann man sich so merken:
Man schreibe die ersten beiden Spalten nochmal rechts neben die Matrix und bilde dann die drei Produkte von links oben nach rechts unten (—) und subtrahiere von deren Summe die drei Produkte von links unten nach rechts oben (- - -). (Kam das schon mal vor?)



Warnung: *Für größere Matrizen geht das nicht mehr so einfach. Das analoge Schema wird schon für 4×4 Matrizen falsch, es liefert nicht mehr die Determinante. Allgemein sind die im letzten Abschnitt dieses Kapitels dargestellten Formeln von* LEIBNIZ *zu benutzen.*

Wenn Sie auch mit Recht sagen werden, daß man das Ausrechnen von Determinanten dem Computer überlassen sollte, so sollten Sie doch wissen, wie man es macht und es auch durchführen können, weil Sie sonst immer wieder bei mathematischen Ableitungen hängen bleiben werden.
Für die beim Entwicklungssatz von LAPLACE einzusetzenden Vorzeichen gibt es wieder eine simple Merkregel:
Das Element links oben, also mit den Indizes $i = j = 1$ bekommt $+$ und dann geht es wie beim Schachbrett abwechselnd mit $+ \, -$ weiter

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Wenn Sie also für eine Stelle das Vorzeichen suchen, brauchen Sie gar nichts über die Indizes zu rechnen, sondern einfach nach Schachbrettmuster auszuzählen.
Wir werden gleich sehen, daß man auch die GAUSS-Elimination mit Erfolg zum Berechnen von Determinanten einsetzen kann.
Beim Übergang von einer Matrix zur transponierten, d.h. von A zu A^T gehen die Spalten von A in die Zeilen von A^T über, dito die Zeilen von A in die Spalten von A^T.
An den explizit notierten Formeln für Determinanten von $n \times n$-Matrizen mit $n \leq 3$ liest man sofort ab, daß dafür

$$\det A = \det A^T$$

ist. Nun haben wir die beiden Möglichkeiten eine Determinante nach LAPLACE zu entwickeln, nämlich nach einer Zeile oder nach einer Spalte. Dies erlaubt nun gerade die Invarianz der Determinante unter dem Transponieren auf beliebig große $n \times n$-Matrizen auszudehnen. Wir bekommen somit

Satz D.10 *Für jede quadratische Matrix A haben A selbst und die transponierte Matrix A^T die selbe Determinante, d.h.*

$$\det A = \det A^T.$$

Dies können wir nun so lesen, daß Aussagen über die Abhängigkeit der Determinante $\det A$ von den Spalten von A genauso für die Zeilen bestehen.
Wir notieren diese wichtige Aussage als

Satz D.11 *Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{\nu\mu})$ gelten*

1. $\det A$ *ist linear in jeder Spalte und in jeder Zeile von A.*
2. *Hat A zwei gleiche Spalten oder zwei gleiche Zeilen, so ist* $\det A = 0$.
3. *Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Analog für Zeilen.*
4. *Vertauscht man zwei Spalten oder zwei Zeilen, so multipliziert sich die Determiante mit -1.*
5. *Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente.*

Beweis: 1. bis 4. folgen mit obiger Bemerkung direkt aus den Eigenschaften D1 und D2 der Determinante.
Zu 5.: Ist A etwa eine obere Dreiecksmatrix, so ist $a_{ij} = 0$ für $i > j$. Entwickeln nach der ersten Spalte liefert

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} = a_{11} \det A_{11}.$$

Da A_{11} selber wieder eine obere Dreiecksmatrix ist (wir haben ja die erste Zeile und die erste Spalte von A gestrichen), ist also induktiv schon

$$\det A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

und somit

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

$\square$

Dieser letzte Satz liefert auch sofort ein Verfahren, um die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ explizit zu berechnen, und zwar gehen wir ähnlich vor wie bei der Gauss-Jordan-Elimination und versuchen die gegebene Matrix auf eine obere Dreiecksform zu bringen, ohne dabei den Wert der Determinante zu ändern.
1-ter Schritt: Ist die erste Spalte von A der Nullvektor, so sind die Spalten linear abhängig und somit $\det A = 0$.
Sei also die erste Spalte nicht der Nullvektor. Indem wir notfalls die erste Zeile gegen eine geeignete austauschen – und dabei den Wert der Determinante mit (-1) multiplizieren ! –, können wir dann $a_{11} \neq 0$ annehmen und dann von der 2-ten, 3-ten,..., n-ten Zeile solche Vielfache der ersten Zeile abziehen, daß in der ersten Spalte, abgesehen von dem Diagonalelement a_{11} sämtliche Elemente $= 0$ werden. Hierbei ändert die Determinante ihren Wert nicht! (Aber achten Sie auf das Vorzeichen !!)
Die so erhaltene Matrix hat dann also die Form

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} a'_{11} & x.....x \\ \hline 0 & \\ \vdots & A'_{11} \\ 0 & \end{array}\right),$$

wobei $a'_{11} \neq 0$ und die mit x bezeichneten irgendwelche nicht näher interessierenden Elemente sind. Ferner haben wir nach der Herleitung

$$\det A = (-1)^\sigma \det A'$$

wobei $\sigma \in \{0, 1\}$ und genau dann $\sigma = 1$, wenn wir zu Beginn zwei Zeilen vertauscht haben.
Wenden wir nun hierauf den Entwicklungssatz von LAPLACE an, so folgt sofort

$$\det A' = a'_{11} \det A'_{11}$$

und für die Matrix A'_{11} können wir argumentieren wie eben.
Wir bekommen also als
2-ter Schritt: Ist die erste Spalte von A'_{11} der Nullvektor, so ist $\det A'_{11} = 0$ und damit auch $\det A = 0$. Ist dies nicht der Fall, so können wir durch Zeilenvertauschen innerhalb der Teilmatrix A'_{11} wieder erreichen, daß das Element von A'_{11}, das links oben steht, also a'_{22}, nicht Null ist – evtl. bekommen wir hier wieder einen Faktor (-1) – und dann können wir A'_{11} durch Zeilenoperationen wieder so umformen, daß in der ersten Spalte von A'_{11} jetzt unter der Diagonalen nur noch Nullen stehen. Wir haben somit A umgeformt zu

$$A'' = \left(\begin{array}{cc|c} a'_{11} & x & \\ 0 & a'_{22} & x \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A''_{22} \\ 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Dabei ist wieder

$$\det A = (-1)^\sigma a'_{11} a'_{22} \det A''_{22},$$

wobei σ wieder angibt, wie oft wir bisher Zeilen vertauscht haben. Durch Iteration dieser Schlußweise erhalten wir folgendes

Rezept D.12 (zur Berechnung einer Determinante) *Man führe an der gegebenen Matrix A die* GAUSS-JORDAN-*Elimination in der folgenden vereinfachten Form durch:*

- *Die Pivot-Zeilen werden nicht normiert,*
- *Nullen brauchen nur unterhalb (oder nur oberhalb) der Diagonalen erzeugt zu werden.*

Ist dann C die damit erhaltene Dreiecksmatrix, so ist

$$\det A = (-1)^\sigma \det C,$$

wobei σ angibt, wie oft bei dieser Elimination insgesamt Zeilen vertauscht worden sind. Die Determinante von C berechnet sich dabei einfach als Produkt der Diagonal-Elemente von C.

Anwendungen der Determinante

Definition D.13 (algebraisches Komplement) *Ist $A = (a_{\nu\mu})$ eine $n \times n$-Matrix, A_{ij} die daraus durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entstehende Matrix, so heißt*

$$D_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

das "algebraische Komplement" des Matrixelementes a_{ij}.

Die Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte liefert sofort

Lemma D.14 *Ist $A = (a_{\nu\mu})$ eine $n \times n$-Matrix, $x = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$ ein Vektor und $A_{j,x}$ die Matrix, die entsteht, wenn man die j-te Spalte durch x ersetzt, so gilt*

$$\det A_{j,x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i D_{ij}(A).$$

Analoges gilt für die Zeilen.

Zum **Beweis** braucht man lediglich die Determinante $\det A_{j,x}$ nach der j-ten Spalte zu entwickeln und einzusetzen. □
Speziell können wir natürlich für x irgendeine, sagen wir die k-te Spalte $a_{\cdot k}$ von A selbst wählen. Dann folgt

Lemma D.15 *Ist $A = (a_{\nu\mu})$ eine $n \times n$-Matrix, $a_{\cdot k}$ die k-te Spalte von A, so ist für $1 \leq j \leq n$ mit dem* KRONECKER*-Symbol δ_{ij}*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} D_{ij}(A) = \delta_{jk} \det A.$$

Multipliziert man also die Elemente der k-ten Spalte von A mit den algebraischen Komplementen der j-ten Spalte von A und summiert, so erhält man
im Falle $j = k$ die Determinante von A,
im Falle $j \neq k$ den Wert 0.
Analoges gilt für Zeilen.

Beweis: Nach dem vorigen Lemma ist $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} D_{ij}(A) = \det A_{j,a_{\cdot k}}$ und man erhält $A_{j,a_{\cdot k}}$ indem man in A die j-te Spalte durch die k-te Spalte ersetzt. Für $j = k$ tut man also garnichts, d.h. erhält wieder A selbst, für $j \neq k$ bekommt man eine Matrix mit zwei gleichen Spalten, deren Determinante verschwindet. □

Wir erhalten so beispielsweise eine geschlossenen Darstellung für die Inverse einer (invertierbaren) Matrix.

Satz D.16 *Ist A eine invertierbare Matrix und bezeichnen $D_{\nu\mu}$ die algebraischen Komplemente der Elemente von A, so gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \big(D_{\nu\mu}\big)^T,$$

d.h. ersetzt man jedes Matrixelement durch sein algebraisches Komplement (mit Vorzeichen!!), transponiert die erhaltene Matrix und dividiert sie durch $\det A$, so erhält man A^{-1}.

Beweis: Es ist $\det A \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist. (Warum?) Die notierte Formel ist also sinnvoll. Setzen wir nun

$$D := \big(d_{\nu\mu}\big) := \big(D_{\nu\mu}\big)^T, \quad C := \big(c_{ij}\big) := DA,$$

so ist

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} d_{i\nu} a_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{n} D_{\nu i} a_{\nu j} = \delta_{ij} \det A.$$

Folglich ist $C = DA = (\det A)I$. □

Diese Darstellung der inversen Matrix können wir auch benutzen, um im Falle eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme $Ax = b$ die Lösung geschlossen darzustellen.

Satz D.17 (CRAMERsche Regel) *Ist A eine invertierbare $n \times n$ Matrix, ferner $x = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$, $b = (\beta_1, ..., \beta_n)^T$, so existiert genau eine Lösung von $Ax = b$. Für diese Lösung gilt*

$$\xi_j = \frac{\det A_{j,b}}{\det A},$$

d.h. man erhält die j-te Komponente der Lösung x als Quotient von zwei Determinanten, wobei im Nenner die Determinante von A selbst steht, im Zähler die Determinate der Matrix, die entsteht, wenn man die j-te Spalte von A durch die "rechte Seite" b ersetzt.

Beweis: Es ist mit der oben gegebenen Darstellung der inversen Matrix

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}\left(D_{\nu\mu}\right)^T b.$$

Dieser Lösungsvektor hat als j-te Komponente

$$\xi_j = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^{n} D_{ij}b_i = \frac{1}{\det A}\det A_{j,b}.$$

□

Warnung: *Die oben gegebene Darstellung für A^{-1} und die* CRAMER*sche Regel sind zwar für theoretische Überlegungen oft sehr nützlich. Für die explizite (numerische) Berechnung der Inversen bzw. der Lösung eines linearen Gleichungssystems sind sie aber – ganz abgesehen von numerischen Problemen (Rundungsfehler) – viel zu aufwendig. Hierzu ist die* GAUSS*-Elimination das geeignete Verfahren.*

Determinanten und Permutationen

Für die Determinanten von 2×2 oder 3×3 Matrizen kennen wir einfache Darstellungen als Summen bzw. Differenzen von Produkten von Matrixelementen. Auf LEIBNIZ geht eine solche Darstellung für $n \times n$ Matrizen zurück. Hierzu brauchen wir etwas über Permutationen.

Bezeichnung D.18 *Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen*

$$\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}.$$

Man nennt dies die "Permutationen" von $\{1, ..., n\}$.

Die identische Abbildung gehört natürlich zu S_n, fernen mit π auch die Umkehrabbildung π^{-1}, sowie mit σ und π auch die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \pi$. Damit bilden die Permutationen eine Gruppe, die sog. "symmetrische Gruppe" S_n.
Sie besitzt offenbar genau

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{(gelesen "n Fakultät")}$$

viele Elemente. Denn den Wert für $\pi(1)$ kann man offenbar frei unter allen n Elementen von $\{1, ..., n\}$ wählen. Hat man dies getan, so stehen für $\pi(2)$ noch die restlichen $(n-1)$ vielen Werte zur Verfügung u.s.w.

Besonders einfache Permutationen sind die sog. "Transpositionen" τ_{ij}, die genau die beiden verschiedenen Elemente i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ vertauschen und alle anderen Elemente fest lassen. Es ist also

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j & k = i \\ i & k = j \\ k & k \neq i, j \end{cases}, \quad (1 \leq k \leq n).$$

Offenbar ist für jede Transposition τ stets $\tau^2 = \mathrm{id}$, also $\tau = \tau^{-1}$.
Aus Transpositionen läßt sich jede Permutation aufbauen.

Lemma D.19 *Jede Permutation $\pi \in S_n$ ist als Produkt von höchstens $(n-1)$ Transpositionen darstellbar.*

Beweis: Für $n \leq 2$ ist dies offenbar richtig. Für größere n setze $m := \pi(n)$.
Ist $m = n$, so werden durch π im eigentlichen Sinne nur die Elemente von der kleineren Menge $\{1, ..., n-1\}$ permutiert, was nach Induktion also mit höchstens $(n-1) - 1 = n - 2 < n - 1$ Transpositionen bewirkt werden kann.
Ist $m < n$, so betrachte man mit der Transposition τ_{mn} die Permutation

$$\pi' := \tau_{mn} \circ \pi.$$

Für sie ist

$$\pi'(n) = \tau_{mn}(\pi(n)) = \tau_{mn}(m) = n.$$

Wie eben geschlossen kann man also π' durch höchstens $n-2$ Transpositionen darstellen, somit $\pi = \tau_{mn} \circ \pi'$ durch höchstens $n-1$ viele. □

Im Zusammenhang mit Determinanten sind für uns die sog. Permutationsmatrizen interessant.

Bezeichnung D.20 *Es seien $e_1, ..., e_n$ die kanonischen Einheitsvektoren im K^n und $\pi \in S_n$ eine Permutation. Dann heißt die $n \times n$ Matrix*

$$P_\pi := \left(e_{\pi(1)}, ..., e_{\pi(n)}\right),$$

deren k-te Spalte also gerade der $\pi(k)$-te Einheitsvektor ist, die "Permutationsmatrix" zu Permutation π.
Ferner nennt man

$$\mathrm{sig}(\pi) := \det(P_\pi)$$

das Vorzeichen der Permutation π.

Die Rechtfertigung für diese Bezeichnung ergibt sich aus folgendem

Lemma D.21

1. *Für je zwei Permutationen $\sigma, \pi \in S_n$ ist*

$$P_{\sigma \circ \pi} = P_\sigma P_\pi,$$

und damit auch

$$\mathrm{sig}(\sigma \circ \pi) = \mathrm{sig}(\sigma) \cdot \mathrm{sig}(\pi).$$

2. *Das Vorzeichen einer Transposition ist -1.*

Beweis:

1. Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren. Damit kann man also die jeweils j-te Spalte darstellen als

$$\begin{aligned}(P_\sigma P_\pi)_{\cdot j} &= (P_\sigma P_\pi)e_j = P_\sigma(P_\pi e_j) \\ &= P_\sigma e_{\pi(j)} = e_{(\sigma\circ\pi)(j)} = (P_{\sigma\circ\pi})_{\cdot j}\,.\end{aligned}$$

2. Die Permutationsmatrix zu einer Transposition erhält man aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen von zwei Spalten. □

Damit kommen wir zur angekündigten Darstellung der Determinante. Nutzen wir systematisch die n-Linearität der Determinante, so erhalten wir für die Determinante einer $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\det A &= \det(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}) \\ &= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} e_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right) \\ &= \sum_{1\le i_1,...,i_n\le n} a_{i_1 1}\cdot a_{i_2 2}\cdot ... \cdot a_{i_n n}\cdot \det(e_{i_1}, ..., e_{i_n})\,.\end{aligned}$$

Dabei ist über alle Indextupel $(i_1, ..., i_n)$ mit Eintragungen aus $\{1, ..., n\}$ zu summieren. Kommen in einem solche Tupel gleiche Indizes vor, so verschwindet die zugehörige Determinante (gleiche Spalten!), d.h. dann ist

$$\det(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = 0,$$

sodaß also nur über die Tupel zu summieren ist, für die die Abbildung

$$\pi : 1 \mapsto i_1,\ 2 \mapsto i_2,\ ...,\ n \mapsto i_n$$

eine Permutation ist. Rechts stehen dann die Determinanten der zugehörigen Permutationsmatrizen, d.h. das Vorzeichen der jeweiligen Permutation.
Damit haben wir die Formel von LEIBNIZ

Satz D.22 *Für eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ über einem beliebigen Körper gilt*

$$\det A = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sig}(\pi)\cdot a_{\pi(1),1}\cdot ... \cdot a_{\pi(n),n}.$$