

DG Differentialgleichungen

Existenz und Eindeutigkeit

Definition DG.1 Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig. Dann heißt

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung.

Eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte und dort stetig differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto y(x)$ heißt "Lösung" der Differentialgleichung, wenn

1. $\{(x, y(x)) \mid x \in I\} \subset G$ und
2. für alle $x \in I$ stets $y'(x) = f(x, y(x))$ ist.

Diese Definition hat zwei naheliegende Verallgemeinerungen, die auf physikalisch relevante Sachverhalte treffen.

Definition DG.2 Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ stetig. Dann heißt

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Eine Lösung ist eine vektorwertige Funktion

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto (y_1(x), \dots, y_n(x))^T \in \mathbb{R}^n,$$

für die wieder sinngemäß die in Definition DG.1 genannten Bedingungen gelten. Komponentenweise ausgeschrieben bedeutet dies, wenn die Funktion f die Komponentenfunktionen f_i hat:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ y_2'(x) &= f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)), \\ &\vdots \\ y_n'(x) &= f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)). \end{aligned}$$

Lassen wir auch höhere Ableitungen zu, etwa bis zur Ordnung m , so entstehen Differentialgleichungssysteme m -ter Ordnung:

Definition DG.3 Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_m = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^m$ ein Gebiet und

$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) \mapsto f(x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$ stetig.

Dann heißt

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)}) \quad (3)$$

ein System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen m -ter Ordnung.

Eine Lösung ist eine vektorwertige Funktion

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

die auf I m -mal stetig differenzierbar ist und für die wieder sinngemäß die in Definition DG.1 genannten Bedingungen gelten.

Das Schwingungsverhalten von drei mit Federn gekoppelten Massenpunkten führt etwa auf ein System von (mindestens) drei Gleichungen zweiter Ordnung.
Speziell im Falle $n = 1, m > 1$ spricht man von einer Differentialgleichung m -ter Ordnung.

Differentialgleichungen (und Systeme) höherer Ordnung lassen sich stets als System erster Ordnung darstellen, sodaß wir uns bei vielen Aspekten auf die Behandlung von Systemen erster Ordnung beschränken können.

Wir beschreiben diese Reduktion für eine Differentialgleichung der Ordnung m .
 Gegeben sei die Gleichung

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$$

für eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Wir führen neue Funktionen $y_0, y_1, \dots, y_{m-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ein und bilden damit das System von n Gleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{m-2}' &= y_{m-1} \\ y_{m-1}' &= f(x, y_0, y_1, \dots, y_{m-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Ist $y(x)$ eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung m -ter Ordnung, so ist offenbar

$$(y_0, y_1, \dots, y_{m-1}) := (y, y', y'', \dots, y^{(m-1)})$$

Lösung des Systems (4), und umgekehrt sind für jede Lösung des Systems die Komponenten je die entsprechenden Ableitungen von y_0 und dies ist dann Lösung der gegebenen Differentialgleichung der Ordnung m . Beide Darstellungen sind also gleichwertig.

Hat man es von vornherein mit einem System zu tun, so hat man in (4) einfach die y_j entsprechend vektorwertig zu interpretieren.

Etwa die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators

$$y'' = -c \cdot y \quad (c \in \mathbb{R})$$

wird als System zu

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= -c \cdot y_0. \end{aligned}$$

Die unabhängige Variable – wir hatten sie x genannt – ist hier die Zeit und wir schreiben deshalb t statt x . Es ist dann $y(t) = y_0(t)$ der Ort, $y'(t) = y_1(t)$ die Geschwindigkeit des schwingenden Massenpunktes zur Zeit t . Es ist bekannt, daß das Schwingen eines solchen Oscillators erst dann eindeutig bestimmt ist, wenn Startbedingungen für Ort und Geschwindigkeit, also Werte für $y(t_0), y'(t_0)$ vorgegeben werden.

Dies ist nun die allgemein relevante Situation.

Definition DG.4 (Anfangswertaufgabe (AWA)) *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ stetig, $(x_0, \eta_0) \in G$.*

Dann nennt man die Aufgabe:

Bestimme eine Lösung des Systems erster Ordnung

$$y' = f(x, y)$$

mit den Anfangswerten

$$y(x_0) = \eta_0,$$

die Anfangswertaufgabe für das System $y' = f(x, y)$ und die Startwerte (x_0, η_0) .

Unter Voraussetzungen, die wir noch kennenlernen werden, ist die Anfangswertaufgabe für alle Startwerte eindeutig lösbar.

Zunächst behandeln wir ein **warnendes Beispiel**:

Ein Körper falle aus großer Höhe alleine unter dem Einfluß der Gravitation. Sein Abstand zum Erdmittelpunkt zur Zeit t sei $y(t)$. Für seine Beschleunigung gilt nach dem Gravitationsgesetz mit einer Konstanten $c > 0$

$$y'' = -c \frac{1}{y^2}.$$

Multiplikation mit $2y'$ liefert

$$2y'y'' = 2c \frac{-y'}{y^2},$$

d.h.

$$\frac{d}{dt}(y')^2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{2c}{y}\right)$$

und somit

$$(y')^2 = \frac{2c}{y} + \alpha, \text{ mit einer Integrationskonstanten } \alpha.$$

Wurzelziehen liefert

$$y' = -\sqrt{\frac{2c}{y} + \alpha}.$$

Lassen wir den Körper von der Höhe R aus der Ruhe fallen, so ist also $y(t_0) = R$, und $y'(t_0) = 0$, d.h. $\alpha = \frac{-2c}{R}$ und wir erhalten die Differentialgleichung

$$y' = -\sqrt{\frac{2c}{y} - \frac{2c}{R}} = -\sqrt{2c} \sqrt{\frac{1}{y} - \frac{1}{R}}. \quad (6)$$

Die Physik sagt, daß es für jeden Zeitpunkt t_0 eine Lösung gibt, die den in diesem Moment losfallenden Körper beschreibt. Die Gleichung (6) hat aber auch die konstante Lösung

$$y(t) = R,$$

die besagt, daß unser Körper einfach im Abstand R zum Erdmittelpunkt schwebt. Sie hat dann auch die Lösung, die ihn – sagen wir – eine halbe Stunde schweben und erst dann zur Erde fallen läßt!!!

Hier hat die Anfangswertaufgabe also viele Lösungen, von denen fast alle physikalisch unsinnig sind!

Die Erklärung liegt darin, daß die abgeleitete Differentialgleichung (6) die Forderungen des untenstehenden Eindeutigkeitssatzes **nicht erfüllt**.

Definition DG.5 (LIPSCHITZ-BEDINGUNG) Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $|| \cdot ||$ eine Norm auf \mathbb{R}^n . Man sagt: " f genügt auf G einer **globalen Lipschitzbedingung** mit der Lipschitzkonstanten $L \geq 0$," wenn für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in G$ gilt, daß

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|.$$

Man sagt: " f genügt auf G einer **lokalen Lipschitzbedingung** mit der Lipschitzkonstanten $L \geq 0$," wenn es für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in G$ eine Umgebung U gibt, auf der f eine (dort globale) Lipschitzbedingung erfüllt.

Das Erfüllen einer Lipschitzbedingung ist nun gerade das interessante Kriterium für die eindeutige Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe.

Dabei gewinnt man meist die Lipschitzabschätzung aus dem folgenden

Satz DG.6 *Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ bezüglich der Variablen $y = (y_1, \dots, y_n)$ partiell differenzierbar und die Ableitung stetig in x und y , so erfüllt f auf G eine lokale Lipschitzbedingung.*

Beweis: Für $n = 1$ wählen wir zu $(x_0, y_0) \in G$ eine Rechteck-Umgebung $U := [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subset G$. Darauf ist $\frac{\partial f}{\partial y}$ stetig und somit beschränkt, etwa $|\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L$. Dann ist für $(x, y), (x, \tilde{y}) \in U$ nach dem Mittelwertsatz

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, \hat{y})(y - \tilde{y}) \right| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|.$$

Für $n > 1$ arbeitet man sinngemäß mit der Jacobi-Matrix und der den Mittelwertsatz ersetzenden Abschätzung (siehe etwa Satz MD.22). \square

Satz DG.7 (Eindeutigkeitsatz) *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge auf G lokal einer Lipschitzbedingung. Sind dann $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen der Differentialgleichung*

$$y' = f(x, y)$$

auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und ist für ein $x_0 \in I$

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0),$$

so ist $\varphi(x) = \psi(x)$ auf ganz I .

Wir führen den **Beweis** nur für den Fall $n = 1$. Der mehrdimensionale Fall verläuft analog, statt mit Beträgen hat man entsprechend mit Normen zu arbeiten.

Auf I gelten

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt, \\ \psi(x) &= \psi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt, \end{aligned}$$

somit wegen $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ auch

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| dt \right|. \end{aligned}$$

Da f einer lokalen Lipschitzbedingung genügt, kann man dies für x nahe bei x_0 mit einer Lipschitzkonstanten L weiter abschätzen zu

$$\leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right|,$$

sodaß wir insgesamt

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq L \left| \int_{x_0}^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right|$$

haben.

Mit $M(x) := \sup\{|\varphi(t) - \psi(t)| \mid |t - x_0| \leq |x - x_0|\}$ haben wir dann für alle t , für die $|t - x_0| \leq |x - x_0|$ gilt, die Abschätzung

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq L|t - x_0|M(t) \leq L|x - x_0|M(x)$$

und somit auch

$$M(x) \leq L|x - x_0|M(x).$$

Beschränken wir nun $|x - x_0| \leq \delta$ so, daß $L|x - x_0| \leq \frac{1}{2}$ ist, so folgt aus der letzten Ungleichung notwendig, daß $M(x) = 0$ für $|x - x_0| \leq \delta$, was bedeutet daß hier φ und ψ übereinstimmen. Insbesondere ist jetzt auch $\varphi(x_0 + \delta) = \psi(x_0 + \delta)$ und mit diesen Werten wiederholt man die ganze Argumentation, womit man – mit ein paar Zusatzüberlegungen – schließlich bekommt, daß für alle Stellen $x \in I$ die beiden Lösungen φ und ψ übereinstimmen. \square

Das schon eben benutzte Umschreiben auf eine Integralgleichung liefert auch den Zugang zum Beweis der Existenz von Lösungen.

Satz DG.8 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von PICARD-LINDELÖF)

Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge auf G einer Lipschitzbedingung. Dann gelten

1. Zu jedem $(x_0, \eta_0) \in G$ gibt es ein $\delta > 0$ und genau eine Lösung

$$\varphi(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) \quad \text{mit } \varphi(x_0) = \eta_0.$$

2. Jede solche "lokale" Lösung der Anfangswertaufgabe läßt sich auf genau eine Weise zu einer Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit maximalem Definitionsintervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ fortsetzen. Dafür geht dann der Graph $\{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\}$ "von Rand zu Rand", d.h. für $x \rightarrow a+$ und für $x \rightarrow b-$ nähert sich $(x, \varphi(x))$ beliebig gut dem Rand von G .

Wir beweisen nur den ersten Teil und den wieder für $n = 1$. Nach Voraussetzung können wir ein $r > 0$ wählen, sodaß

$$V := \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq r, |y - \eta_0| \leq r\} \subset G$$

und f auf V einer Lipschitzbedingung mit einer Konstanten L genügt. V ist kompakt, f stetig, somit ist mit einer Konstanten M auch $|f(x, y)| \leq M$ auf V . Wir setzen $\delta := \min\{r, \frac{r}{M}\}$ und $I := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Statt der Anfangswertaufgabe $y' = f(x, y)$ und $y(x_0) = \eta_0$ betrachten wir die *Integralgleichung*

$$y(x) = \eta_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (*)$$

Eine Lösung der Anfangswertaufgabe erfüllt diese Integralgleichung (einfach integrieren!) und umgekehrt ist eine stetige Lösung der Integralgleichung automatisch stetig differenzierbar und (differenzieren!) löst die Anfangswertaufgabe.

Zur Integralgleichung (*) definieren wir eine Folge von Funktionen $\varphi_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &:= \eta_0 \\ \varphi_{k+1}(x) &:= \eta_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi_k(t)) dt, \end{aligned} \quad (**)$$

von der wir sehen werden, daß sie gleichmäßig gegen eine Lösung der Integralgleichung (*) konvergiert.

Fakt: Für alle k ist $|\varphi_k(x) - \eta_0| \leq r$, für $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$:

Dies stimmt für φ_0 . Stimmt es für φ_k , so liegt $(t, \varphi_k(t))$ in V für $t \in I$, somit ist dort $f(t, \varphi_k(t))$ definiert und $|f(t, \varphi_k(t))| \leq M$. Also ist

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(x) - \eta_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, \varphi_k(t)) dt \right| \leq M|x - x_0| \\ &\leq M \cdot \delta \leq M \cdot \frac{r}{M} = r. \end{aligned}$$

Fakt: Für alle k und alle $x \in I$ gilt

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M \cdot L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} :$$

$$k = 0 : \quad |\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, \eta_0) dt \right| \leq M \cdot |x - x_0|$$

$$\begin{aligned} k - 1 \rightarrow k : \quad |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x (f(t, \varphi_k(t)) - f(t, \varphi_{k-1}(t))) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L \cdot |\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)| dt \right| \\ &\leq L \cdot M \cdot L^{k-1} \frac{1}{k!} \left| \int_{x_0}^x |t - x_0|^k dt \right| \\ &= M \cdot L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\varphi_m(x) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^m (\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x))$$

und diese Reihe hat, wie eben abgeschätzt, auf I die konvergente Majorante

$$M \cdot \sum_{k=1}^m \frac{L^k \cdot \delta^k}{k!},$$

ist also auf $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ absolut gleichmäßig konvergent. Die Grenzfunktion $\varphi(x)$ erfüllt dann (siehe (**)) für $k \rightarrow \infty$

$$\varphi(x) = \eta_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

und ist somit die gesuchte Lösung.

Die Eindeutigkeit ergibt sich aus dem vorhergehende Satz.

Die weiteren Beweisteile seien übergangen, für Systeme kann man völlig analog vorgehen. \square

Bemerkung DG.9 Der eben bewiesene Satz samt Beweis ist ein Spezialfall des Fixpunktsatzes von BANACH.

Was bedeutet die Lösung geht von Rand zu Rand?

– Beispiel: $y' = -2xy^2$, $y(0) = 1$.

Satz DG.8 ist mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ anwendbar. Die Lösung $y(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist auf ganz \mathbb{R} definiert.

– Beispiel: $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Satz DG.8 ist mit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ anwendbar. Die Lösung ist $y(x) = \tan x$. Der Tangens geht aber für $x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ gegen $\pm\infty$. Die Lösung ist also nur auf einem Intervall der Länge π definiert und geht am Rand gegen $\pm\infty$.

Wir hatten oben eine Differentialgleichung n -ter Ordnung als ein System erster Ordnung dargestellt und für letztere gilt der Existenz- und Eindeigkeitssatz. Formuliert man ihn für das ursprüngliche Problem, so kommt man auf folgende Version.

Satz DG.10 (Existenz- und Eindeigkeitssatz für DGLn n -ter Ordnung)
Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und erfülle lokal eine Lipschitzbedingung. Dann gelten

1. Zu jedem Anfangswert $(x_0, \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in G$ gibt es ein $\delta > 0$ und genau eine Lösung $y(x) : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

mit den Anfangswerten

$$y(x_0) = \eta_0, y'(x_0) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}.$$

2. Jede solche Lösung läßt sich auf genau eine Weise zu einer Lösung mit maximalem Definitionsbereich fortsetzen. Sie geht wieder von Rand zu Rand.

Elementare Lösungsmethoden

Wir stellen nun eine Reihe von Typen von Differentialgleichungen vor, die einmal die eben gezeigten Sätze exemplifizieren und andererseits geschlossen lösbar sind. Ein umfassendes Werk über Methoden zum Auffinden geschlossener Lösungen von Differentialgleichungen stammt von KAMKE.

Beispiel DG.11 $I \subset \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Die Anfangswertaufgabe

$$y'(x) = g(x), \quad y(x_0) = \eta_0$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz DG.8. Die Lösung bekommt man durch Bilden der Stammfunktion

$$y(x) = \eta_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Beispiel DG.12 (“Getrennte Variable”) $I, J \subset \mathbb{R}$, $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Die AWA

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y), \quad y(x_0) = \eta_0$$

erfüllt die Voraussetzungen von Satz DG.8, somit existiert genau eine Lösung.

Zur Bestimmung einer Lösung fordern wir zusätzlich

$$h(y) \neq 0 \text{ auf } J.$$

Wir bilden

$$G(x) := \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad H(y) := \int_{\eta_0}^y \frac{dt}{h(t)}.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial y} H(y) = \frac{1}{h(y)} \neq 0$ kann man die Gleichung

$$H(y) - G(x) = 0$$

in einer Umgebung von (x_0, η_0) nach y auflösen, was eine Funktion $y = \varphi(x)$ ergibt, für die zudem $\varphi(x_0) = \eta_0$ ist. Mit der ist dann $H(\varphi(x)) - G(x) = 0$, folglich per Ableiten

$$0 = H(\varphi(x))\varphi'(x) - G'(x) = \frac{1}{h(\varphi(x))}\varphi'(x) - g(x)$$

und somit φ die Lösung unserer Anfangswertaufgabe. Für Differentialgleichungen mit getrennten Variablen haben wir also folgendes

Rezept DG.13 Zur Lösung von

$$y'(x) = g(x) \cdot h(y), \quad y(x_0) = \eta_0$$

löse die Gleichung

$$\int_{\eta_0}^y \frac{dt}{h(t)} = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

nach y auf unter der Bedingung, daß $y(x_0) = \eta_0$ ist.

Warnung Man achte auf die Nullstellen von $h(t)$. Über die darf das Integrationsintervall **nicht** hinweggehen, sonst können Fehler entstehen. Welche Lösung hat unsere Anfangswertaufgabe, wenn η_0 eine Nullstelle von h ist?

Konkret erhalten wir etwa für die AWA

$$y' = -2xy^2 \quad \text{mit} \quad y(x_0) = \eta_0 :$$

$g(x) = -2x$, $h(y) = y^2$ mit der einzigen Nullstelle $y = 0$. Dafür ist dann

$$G(x) = \int_{x_0}^x -2t dt = -(x^2 - x_0^2),$$

$$H(y) = \int_{\eta_0}^y \frac{1}{t^2} dt = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\eta_0}\right).$$

Dabei müssen y und η_0 beide < 0 oder beide > 0 sein! Dann ist zu lösen

$$0 = H(y) - G(x) = -\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\eta_0}\right) + (x^2 - x_0^2),$$

was auf

$$y = \frac{1}{x^2 - x_0^2 + \frac{1}{\eta_0}}$$

führt.

Speziell für $g(x) \equiv 1$ sind hierin die sogenannten "autonomen" Differentialgleichungen enthalten, in denen die unabhängige Variable nicht vorkommt. Sie sind also durch Integration lösbar.

Beispiel DG.14 (Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung) Auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ seien $a(x), b(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$y' = a(x) \cdot y + b(x)$$

eine "lineare Differentialgleichung erster Ordnung". Für $b = 0$ heißt sie "homogen", andernfalls "inhomogen".

Die Voraussetzungen des Satzes von PICARD-LINDELÖF sind erfüllt, die AWA ist also eindeutig lösbar.

Diese Lösung kann man mittels Stammfunktionen darstellen:

Satz DG.15 Die AWA zur homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = a(x) \cdot y, \quad y(x_0) = \eta_0$$

ist eindeutig lösbar, die Lösung ist

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \eta_0.$$

Beweis:

$$y(x_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x_0} a(t) dt\right) \eta_0 = 1 \cdot \eta_0 = \eta_0,$$

$$y'(x) = a(x) \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right) \eta_0 = a(x) \cdot y(x).$$

□

Bezeichnung DG.16 Wir nennen

$$y(x) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$$

eine "Fundamentallösung" der homogenen Differentialgleichung $y' = a(x)y$. Sie ist an jeder Stelle $\neq 0$.

Die inhomogene Differentialgleichung löst man über den folgenden Ansatz, der unter dem Namen **Variation der Konstanten** bekannt ist.

Mit einer Fundamentallösung y_0 der homogenen Gleichung und einer stetig differenzierbaren Funktion $c(x)$ bilde man

$$y(x) := y_0(x) \cdot c(x).$$

Dann ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_0'(x)c(x) + y_0(x)c'(x) \\ &= a(x)y_0(x)c(x) + y_0(x)c'(x) \\ &= a(x)y(x) + y_0(x)c'(x). \end{aligned}$$

Wählen wir nun die Funktion c so, daß $y_0(x)c'(x) = b(x)$ ist, so ist offenbar y eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Dies geschieht über

$$c(x) = \int_{x_0}^x (y_0(t))^{-1} b(t) dt.$$

Damit haben wir

Satz DG.17 Die Lösung der Anfangswertaufgabe zur inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = \eta_0$$

lautet

$$y(x) = \left(\eta_0 + \int_{x_0}^x (y_0(t))^{-1} b(t) dt \right) \cdot y_0(x),$$

wobei

$$y_0(x) = \exp \left(\int_{x_0}^x a(t) dt \right)$$

eine Fundamentallösung der homogenen Gleichung ist.

Beispiel DG.18

$$y' = 3x^2y + x^2 \quad \text{mit} \quad y(0) = \eta_0.$$

Eine Fundamentallösung ist

$$y_0(x) = \exp \left(\int_0^x 3t^2 dt \right) = e^{x^3}.$$

Dann ist für die inhomogene Gleichung über Variation der Konstanten zu bestimmen

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t^3} t^2 dt &= \frac{1}{3} \int_0^x e^{-t^3} (3t^2) dt \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^x \left(\frac{d}{dt} (e^{-t^3}) \right) dt = -\frac{1}{3} (e^{-x^3} - 1). \end{aligned}$$

Damit ist

$$y(x) = \left(\eta_0 - \frac{1}{3} (e^{-x^3} - 1) \right) e^{x^3} = \left(\eta_0 + \frac{1}{3} \right) e^{x^3} - \frac{1}{3}$$

Lösung der obigen Differentialgleichung mit den Anfangswerten $y(0) = \eta_0$. \square

Diese Methode der Variation der Konstanten werden wir bei linearen Systemen wieder aufgreifen.

Lineare Differentialgleichungssysteme

In Anbetracht der Tatsache, daß in den physikalischen Anwendungen die bisher x genannte unabhängige Variable meist die Zeit ist, notieren wir künftig t statt x .

Definition DG.19 Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, ferner seien $I \ni t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $I \ni t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^n$ stetige Abbildungen, die jeder Stelle $t \in I$ eine $n \times n$ -Matrix $A(t)$ bzw. einen Vektor $b(t) \in \mathbb{R}^n$ zuordnen. Dann heißt

$$y' = A(t)y + b(t) \tag{1}$$

ein "lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung" für eine Funktion y mit Werten $y(t) \in \mathbb{R}^n$.

In der notierten Form sprechen wir vom "inhomogenen" System, falls $b(t) \equiv 0$ vom "homogenen".

Diese Systeme sind von großer Bedeutung in der Physik, da sich, wie eingangs gezeigt, Differentialgleichungen oder auch Differentialgleichungssysteme beliebiger Ordnung stets als System erster Ordnung schreiben lassen und dabei die Linearität erhalten bleibt. Zum anderen versucht man ja, physikalische Prozesse, soweit irgend möglich über lineare (Differential-)Gleichungen zu beschreiben.

Sind $|A|$ und $|y|$ irgend zwei Normen auf den Matrizen und Vektoren, sodaß damit die Abschätzung

$$|Ay| \leq |A| \cdot |y|$$

gilt, – etwa für die aus den Summen der Quadrate gewonnenen Normen gilt dies – so gilt für die Funktion $f(t, y) := A(t)y + b(t)$ die Abschätzung

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |A(t)y_1 - A(t)y_2| = |A(t)(y_1 - y_2)| \leq |A(t)| \cdot |y_1 - y_2|$$

und somit gilt auf jedem kompakten Intervall $J \subset I$ die *globale Lipschitzbedingung*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2| \quad \text{mit} \quad L := \max_{t \in J} |A(t)|.$$

Damit sind insbesondere für das homogene wie für das inhomogene System die Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes (Satz DG.8) gegeben. Also existiert zu jedem $t_0 \in I, \eta_0 \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = \eta_0$$

und die läßt sich bis zum Rand fortsetzen.

Wie wir unten sehen werden, bedeutet das hier, daß die Lösung auf dem ganzen Intervall I erklärt ist, auf dem auch die Koeffizienten A, b gegeben sind.

Zunächst behandeln wir das *homogene System*:

Satz DG.20 *Ist für die Lösung y des homogenen Systems*

$$y' = A(t)y$$

$y(t_0) = 0$ an einer Stelle $t_0 \in I$, so an jeder, d.h. dann ist $y(t) \equiv 0$, die Nullfunktion.

Beweis: Die Funktion, die konstant den Nullvektor annimmt, ist sicher eine Lösung der homogenen Gleichung und damit folgt die Behauptung aus dem Eindeutigkeitsatz. \square

Satz DG.21 *Ist y Lösung von $y' = A(t)y$ und ist mit der Euklidnorm $|A(t)| \leq L$ auf I , so gilt mit der Euklidnorm für jedes $t_0 \in I$ die Abschätzung*

$$|y(t)| \leq |y(t_0)| \cdot e^{L|t-t_0|}.$$

Insbesondere existiert damit die Lösung auf ganz I .

Beweis: Für die triviale Lösung ist auch diese Ungleichung trivial, andernfalls ist stets $y(t) \neq 0$, ferner ist $|y(t)|^2 = \sum_i (y_i(t))^2$ differenzierbar. Dafür gilt

$$\begin{aligned} (|y(t)|^2)' &= 2 \sum_i y_i(t) y_i'(t) \leq 2 \cdot |y(t)| \cdot |y'(t)| \\ &\leq 2 \cdot |y(t)| \cdot |A(t)| \cdot |y(t)| \leq 2 \cdot L \cdot |y(t)|^2. \end{aligned}$$

Somit ist also

$$\frac{(|y(t)|^2)'}{|y(t)|^2} \leq 2 \cdot L.$$

Integriert man von t_0 bis t , so folgt

$$\left| \ln(|y(t)|^2) \right|_{t_0}^t \leq 2 \cdot L \cdot |t - t_0|,$$

d.h.

$$|y(t)|^2 \leq |y(t_0)|^2 \cdot e^{2 \cdot L \cdot |t-t_0|}.$$

Wurzelziehen liefert die Behauptung. \square

Dieser Satz hat eine wichtige physikalische Bedeutung.

Satz DG.22 Ein physikalischer Prozess werde durch das evtl. inhomogene System

$$y' = A(t)y + b(t)$$

beschrieben. Dazu seien y_1 und y_2 zwei Lösungen, die sich am Startpunkt t_0 nur wenig unterscheiden, d.h.

$$|y_1(t_0) - y_2(t_0)| \leq \delta.$$

Dann ist, solange $|A(t)| \leq L$ gilt,

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq \delta \cdot e^{L|t-t_0|}.$$

Beweis: Für die Funktion $y(t) := y_1(t) - y_2(t)$ ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= y_1'(t) - y_2'(t) \\ &= (A(t)y_1(t) + b(t)) - (A(t)y_2(t) + b(t)) \\ &= A(t)(y_1(t) - y_2(t)) = A(t)y(t) \end{aligned}$$

und

$$y(t_0) = y_1(t_0) - y_2(t_0),$$

sodaß die Behauptung direkt aus Satz DG.21 folgt. \square

Wir haben hier die sogenannte **stetige Abhängigkeit von den Anfangswerten**.

Es sei nun ein homogenes System $y' = A(t)y$ über dem Intervall I gegeben. Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz gibt es zu jeder Stelle $t_0 \in I$ und jedem $\eta \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $y(t; t_0, \eta)$ des Systems, die die Anfangsbedingungen

$$y(t_0; t_0, \eta) = \eta$$

erfüllt. Mit dieser Bezeichnung gilt

Satz DG.23

1. Die Lösungen des homogenen Systems $y' = A(t)y$ bilden einen n -dimensionalen linearen Raum.
2. Für jedes feste $t_0 \in I$ ist

$$\mathbb{R}^n \ni \eta \mapsto y(t; t_0, \eta)$$

ein Isomorphismus zwischen dem \mathbb{R}^n und dem Lösungsraum.

Beweis

1. Mit je zwei Lösungen y_1, y_2 ist auch jede Linearkombination $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ Lösung des homogenen Systems.
2. Zu $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^n, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ist

$$y(t) := \alpha_1 y(t; t_0, \eta_1) + \alpha_2 y(t; t_0, \eta_2)$$

wieder eine Lösung, für die offenbar $y(t_0) = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2$ ist, sodaß also

$$y(t) = y(t_0; t, \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2).$$

Der Rest folgt aus dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz (Satz DG.8). \square

Dieser Satz hat eine Reihe von leicht einzusehenden Folgerungen, die wir wegen ihrer Wichtigkeit für den Umgang mit solchen homogenen Differentialgleichungssystemen explizit formulieren.

Folgerung DG.24

1. Jede Linearkombination

$$y = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k$$

von Lösungen y_k zu $y' = A(t)y$ ist selbst Lösung.

2. Ist eine Lösung an einer Stelle t_0 gleich Null (d.h. der Nullvektor), so immer. (Siehe Satz DG.20.)
3. Lösungen y_1, \dots, y_k heißen "linear abhängig", wenn es Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ gibt, die **nicht alle** $= 0$ sind, sodaß $\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_k y_k = 0$ ist, andernfalls "linear unabhängig".
Wegen 2. folgt dabei aus $\alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_k y_k(t) = 0$ für ein einziges t dies schon für alle t und entsprechend für $\neq 0$.
4. Es gibt n unabhängige Lösungen y_1, \dots, y_n . Jedes solche System nennt man ein "Haupt- oder Fundamentalsystem". Aus einem Fundamentalsystem läßt sich jede Lösung auf genau eine Weise als Linearkombination mit konstanten Koeffizienten schreiben:

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \dots + \alpha_n y_n(t).$$

5. Für ein beliebiges System von n Lösungen $y_1(t), \dots, y_n(t)$ kann man aus den n Spaltenvektoren $(y_i(t))$ die "Lösungs-Matrix"

$$Y(t) := (y_1(t), \dots, y_n(t))$$

bilden.

Die speziell zu einem Fundamentalsystem gehörige Lösungsmatrix nennt man "Fundamentalmatrix". Komponentenweises Differenzieren zeigt, daß Lösungsmatrizen der Matrix-Differentialgleichung

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

genügen.

Eine solche Matrix-Lösung ist durch die Vorgabe einer "Anfangsmatrix"

$$Y(t_0) = H = (\eta_1, \dots, \eta_n)$$

bestimmt. Ist H invertierbar, d.h. sind die Anfangswerte für die in den Spalten von $Y(t)$ stehenden Lösungen linear unabhängig, so ist nach 3. $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix und somit hat dann **jede** Lösung die Darstellung

$$y(t) = Y(t) \cdot c \text{ mit einem Spaltenvektor } c := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

6. Wählt man speziell als Anfangsmatrix die Einheitsmatrix, d.h. $H := I$, so erhält man eine besonders bequem zu handhabende Fundamentalmatrix $X(t)$, für die also

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad \text{mit } X(t_0) = I$$

gilt. Für ihre i -te Spalte $x_i(t)$ ist also mit e_i , dem i -ten kanonischen Einheitsvektor

$$x'_i(t) = A(t)x_i(t) \quad \text{mit } x_i(t_0) = e_i.$$

Mit diesem speziellen Fundamentalsystem hat dann die Lösung zum Anfangswert η die Darstellung

$$y(t; t_0, \eta) = X(t)\eta,$$

bzw. gilt allgemein für jede Lösungsmatrix

$$Y(t) = X(t)Y(t_0).$$

Bezeichnung DG.25 Zu einer Lösungsmatrix $Y(t)$ heißt

$$\Phi(t) := \det Y(t)$$

die "WRONSKI-Determinante" des Lösungssystems $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$.

Aus Folgerung DG.24.3 folgt, daß die Wronskideterminante entweder identisch = 0 ist, oder keine Nullstelle besitzt. Letzteres charakterisiert die Fundamentalsysteme. Ohne Beweis sei noch vermerkt

Satz DG.26 Die Wronskideterminante erfüllt die Differentialgleichung

$$\Phi'(t) = \text{spur}(A(t)) \cdot \Phi(t) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \right) \cdot \Phi(t),$$

sodaß

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) \cdot \exp \left(\int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(t) \right) dt \right).$$

Ehe wir uns nun den inhomogenen Systemen zuwenden, sei der Zusammenhang mit dem Kapitel über Homomorphismen hergestellt.

Durch $L : y \mapsto Ly$ mit $(Ly)(t) := y'(t) - A(t)y(t)$ ist eine Abbildung $C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$ gegeben, die offenbar linear, also ein Homomorphismus zwischen den beiden Funktionen-Vektorräumen der auf I stetig differenzierbaren bzw. der auf I stetigen Funktionen mit Werten im \mathbb{R}^n ist. Sein Kern $\ker(L)$ besteht aus allen Funktionen y , die $Ly = 0$ erfüllen, d.h. für die

$$(Ly)(t) = y'(t) - A(t)y(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in I$$

gilt, und dies sind ja genau die Lösungen des homogenen Systems. Wir haben oben gesehen, daß dieser Kern hier die Dimension n hat.

In dieser Notation schreibt sich das inhomogene System als

$$(Ly)(t) = b(t) \quad (t \in I),$$

d.h. es handelt sich auch hier um die Lösung der entsprechenden inhomogenen Gleichung. Damit folgt sofort aus den allgemeinen Überlegungen zu linearen Gleichungen der

Satz DG.27 Man erhält sämtliche Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y' = A(t)y + b(t)$$

indem man eine Lösung y_I (der inhomogenen Gleichung) bestimmt und dazu sämtliche Lösungen aus dem n -dimensionalen Lösungsraum der homogenen Gleichung addiert.

Ist y_I eine Lösung der inhomogenen, $Y(t)$ ein Fundamentalsystem, so sind die Lösungen der inhomogenen Gleichung genau von der Form

$$y(t) = y_I(t) + Y(t)c$$

mit einem konstanten Vektor $c = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Dieser Vektor c ist durch die Vorgabe von Anfangswerten $y(t_0) = \eta$ bestimmt.

Zur Gewinnung einer Lösung der inhomogenen Gleichung benützen wir wieder das Prinzip der **Variation der Konstanten**.

Mit einer noch geeignet zu bestimmenden C^1 -Funktion $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ und einem Fundamentalsystem $Y(t)$ zu der homogenen Gleichung setzen wir an

$$y(t) = Y(t) \cdot c(t).$$

(Für konstantes c ist dies nach Folgerung DG.24.5 Lösung der homogenen.)
Dann ist

$$\begin{aligned} y'(t) &= Y'(t) \cdot c(t) + Y(t) \cdot c'(t) \\ &= A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t) + Y(t) \cdot c'(t) \\ &= A(t) \cdot y(t) + Y(t) \cdot c'(t). \end{aligned}$$

Bestimmen wir nun die Funktion c so, daß

$$Y(t) \cdot c'(t) = b(t), \quad (*)$$

so ist offensichtlich unser y eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Als Fundamentalmatrix ist $Y(t)$ (an jeder Stelle t) invertierbar, somit ist $(*)$ äquivalent zu

$$c'(t) = Y^{-1}(t) \cdot b(t)$$

was uns

$$c(t) = \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau$$

liefert. Damit ist dann also

$$y(t) := Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau \quad (**)$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

“Probe”:

$$\begin{aligned} y'(t) &= Y'(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau + Y(t) \cdot (Y^{-1}(t) \cdot b(t)) \\ &= A(t) \cdot Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau + b(t) \\ &= A(t) \cdot y(t) + b(t), \end{aligned}$$

wie es sein sollte.

Die hier bestimmte Lösung $(**)$ der inhomogenen Gleichung hat offenbar denselben Definitionsbereich, wie $Y(t)$ und $b(t)$, nämlich das volle dem Problem zugrunde liegende Intervall I .

Wählen wir das spezielle Fundamentalsystem $X(t)$, das bei $t = t_0$ die Einheitsmatrix ist, so erhalten wir die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = \eta$$

als

$$y(t) = X(t) \cdot \left(\eta + \int_{t_0}^t X^{-1}(\tau) \cdot b(\tau) d\tau \right).$$

Ein **Beispiel**.

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

Hierfür ist

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

die Fundamentalmatrix mit $X(0) = I$. Es ist

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

somit

$$X^{-1}(\tau)b(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau & \sin \tau \\ -\sin \tau & \cos \tau \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \sin \tau \\ \tau \cos \tau \end{pmatrix}.$$

Über partielle Integration bestimmt man

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \tau \sin \tau \\ \tau \cos \tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^t \tau \sin \tau d\tau \\ \int_0^t \tau \cos \tau d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t - t \cos t \\ \cos t + t \sin t - 1 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 + \sin t - t \cos t \\ \eta_2 + \cos t + t \sin t - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 - 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lineare Differentialgleichungen n - ter Ordnung

Lineare Differentialgleichungen einer Ordnung $n > 1$ lassen sich mit dem eingangs dargestellten Verfahren als Systeme erster Ordnung schreiben, wobei die Linearität erhalten bleibt. Damit sind sie eigentlich schon mitbehandelt. Dennoch seien einige wichtige Fakten dazu nochmal explizit formuliert.

Bezeichnung DG.28 Auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ seien $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und stetig. Dann heißt

$$u^{(n)} = a_0(t)u + a_1(t)u' + \dots + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \beta(t)$$

eine lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung für die reellwertige Funktion u . Falls $\beta = 0$ sprechen wir wieder von der homogenen Gleichung, andernfalls von der inhomogenen.

Mit $G := I \times \mathbb{R}^n$ ist hier der Satz DG.10 anwendbar und wir bekommen

Satz DG.29 Die Anfangswertaufgabe zur linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$\begin{aligned} u^{(n)} &= a_0(t)u + a_1(t)u' + \dots + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \beta(t) \\ u(t_0) &= \eta_0, \dots, u^{(n-1)}(t_0) = \eta_{n-1} \end{aligned}$$

ist für jedes $t_0 \in I$ und jeden Satz von Anfangswerten $\eta := (\eta_0, \dots, \eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar. Jede Lösung u läßt sich auf ganz I fortsetzen.

Die Übersetzung in ein lineares System erfolgt mittels

$$y(t) := \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

auf

$$y' = A(t)y + b(t), \quad y(t_0) = \eta.$$

Die Lösung u der Differentialgleichung n -ter Ordnung ist also eine reellwertige Funktion $u : I \rightarrow \mathbb{R}^1$, die entsprechende Lösung des zugehörigen Systems eine vektorwertige Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, die aus u und deren Ableitungen besteht. Es ist daher stets nötig, sich bewußt zu machen, ob man von Lösungen der Gleichung n -ter Ordnung oder von Lösungen des Systems redet.

Aus dieser Übersetzung und den für lineare Systeme notierten Ergebnissen bekommen wir die folgenden Aussagen.

Satz DG.30 Für die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung gelten:

1. Die Lösungen $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen Gleichung bilden einen n -dimensionalen Raum, die über eine feste Stelle $t_0 \in I$ gegebene Zuordnung

$$u \mapsto (u(t_0), u'(t_0), \dots, u^{(n-1)}(t_0))$$

ist ein Isomorphismus zwischen den Lösungen und dem \mathbb{R}^n .

2. Sind u_1, \dots, u_n linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung, so ist

$$u(t) := u_1(t)c_1 + \dots + u_n(t)c_n$$

mit Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung.

3. Man erhält die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung als Summe aus einer beliebigen Lösung der inhomogenen Gleichung und der allgemeinen Lösung der homogenen.
4. Ein System (u_1, \dots, u_n) aus n unabhängigen Lösungen der Differentialgleichung n -ter Ordnung wird ebenfalls Fundamentalsystem genannt. Ein Fundamentalsystem im Sinne einer Fundamentalmatrix, wie bei Systemen benutzt, wird daraus, indem man zu jeder Funktion noch ihre Ableitungen hinzunimmt:

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto Y(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Dafür gilt:

Die Lösungen (u_1, \dots, u_n) sind genau dann linear unabhängig, also ein Fundamentalsystem, wenn für eine Stelle $t_0 \in I$ und damit auch für jedes $t \in I$ die WRONSKI-Determinante nicht verschwindet, d.h.

$$\Phi(t) = \det Y(t) = \det \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Das Prinzip der Variation der Konstanten zur Lösung der inhomogenen Gleichung gilt natürlich weiter, doch muß man erst die hier richtige Form finden.

Zu lösen ist – siehe oben (*) – mit einer Fundamentalmatrix $Y(t)$ das Gleichungssystem

$$Y(t)c'(t) = b(t)$$

und dessen Lösung zu integrieren. Mit dem so gewonnenen ‘Funktionsvektor’ $c(t)$ ist dann

$$y_I(t) := Y(t)c(t)$$

Lösung des inhomogenen Systems. Hier hat nun $b(t)$ die spezielle Gestalt

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

und ein Fundamentalsystem die oben beschriebene Form, sodaß das Gleichungssystem lautet

$$\begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-2)}(t) & u_2^{(n-2)}(t) & \dots & u_n^{(n-2)}(t) \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_{n-2}'(t) \\ c_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}.$$

Dies ist zu lösen und dann wie oben zu verfahren.

Beispiel DG.31 Für $t > 0$ betrachte die lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung

$$y'' - \frac{1}{2t}y' + \frac{1}{2t^2}y = \beta(t).$$

Zwei unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung sind

$$u_1(t) := t, \quad u_2(t) := \sqrt{t}.$$

Sie bilden also eine Basis des Lösungsraumes. Die zugehörige Fundamentalmatrix lautet

$$Y(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \sqrt{t} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}.$$

Für Variation der Konstanten zur Lösung der inhomogenen Gleichung haben wir also $c(t) = (c_1(t), c_2(t))^T$ zu bestimmen aus

$$Y(t)c'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix},$$

d.h. aus

$$\begin{aligned} t \cdot c_1'(t) + \sqrt{t} \cdot c_2'(t) &= 0 \\ 1 \cdot c_1'(t) + \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot c_2'(t) &= \beta(t) \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$c_1'(t) = 2\beta(t), \quad c_2'(t) = -2\beta(t)\sqrt{t}.$$

Etwa für $\beta(t) = 21t^2$ bekommen wir

$$c_1'(t) = 42t^2, \quad c_2'(t) = -42t^2\sqrt{t}.$$

Die Stammfunktionen lauten

$$c_1(t) = 14t^3, \quad c_2(t) = -12t^3\sqrt{t}$$

und als eine Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} y_I(t) &= u_1(t)c_1(t) + u_2(t)c_2(t) \\ &= t \cdot 14t^3 - \sqrt{t} \cdot 12t^3\sqrt{t} = 2t^4. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + y(t) \\ &= \alpha_1 t + \alpha_2 \sqrt{t} + 2t^4. \end{aligned}$$

□

Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Bisher haben wir noch keine Methode, um ein Fundamentalsystem für eine lineare Differentialgleichung oder ein lineares System zu bestimmen, und allgemein existiert so etwas auch (leider) nicht. Dies ändert sich, wenn wir voraussetzen, daß die **homogene** Gleichung autonom ist, d.h. daß deren Koeffizienten nicht von der unabhängigen Variablen abhängen – physikalisch etwa bei Prozessen, die zeitunabhängig beschrieben werden können.

Betrachten wir zunächst lineare Differentialgleichungen n -ter Ordnung.

Bezeichnung DG.32 Zu Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ heißt

$$L(u) := u^{(n)} - a_{n-1}u^{(n-1)} - \dots - a_1u' - a_0u \quad (1)$$

ein linearer Differentialoperator n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Es heißt damit

$$L(u) = \begin{cases} 0 \\ \beta(t) \end{cases}$$

eine homogene bzw. inhomogene lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das mit diesen Koeffizienten gebildete Polynom

$$\chi(\lambda) := \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda - a_0 \quad (2)$$

heißt charakteristisches Polynom des Differentialoperators L .

Mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms können wir nun die Lösungen der homogenen Differentialgleichung bestimmen.

Zunächst eine etwas technische Formel:

Lemma DG.33 1. Für $k, q \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k (t^q e^{\lambda t}) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^q (\lambda^k e^{\lambda t}).$$

2. Für den Differentialoperator L aus Bezeichnung DG.32 und sein charakteristisches Polynom χ gelten für $q \in \mathbb{N}$

$$L(t^q e^{\lambda t}) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q (\chi(\lambda) e^{\lambda t}).$$

Beweis: 1. : Wir fassen $t^q e^{\lambda t}$ als Funktion in den zwei Variablen t, λ auf. Bekanntlich ist

$$t^q e^{\lambda t} = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q e^{\lambda t}$$

und somit nach dem Satz von SCHWARZ

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k (t^q e^{\lambda t}) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \left(\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q e^{\lambda t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k e^{\lambda t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q (\lambda^k e^{\lambda t}).$$

2. : Damit bekommen wir mit $a_n := -1$

$$\begin{aligned} L(t^q e^{\lambda t}) &= \sum_{k=0}^n (-a_k) \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k (t^q e^{\lambda t}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q \left(\sum_{k=0}^n (-a_k) \lambda^k e^{\lambda t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q (\chi(\lambda) e^{\lambda t}). \end{aligned}$$

□

Ist nun λ_0 ein genau n_0 -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so ist

$$\chi(\lambda_0) = \chi'(\lambda_0) = \dots = \chi^{(n_0-1)}(\lambda_0) = 0, \text{ und } \chi^{(n_0)}(\lambda_0) \neq 0$$

und – wie man über die Produktregel für das Differenzieren leicht nachrechnet – auch

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q (\chi(\lambda) e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \begin{cases} = 0 & \text{für } 0 \leq q < n_0 \\ \neq 0 & \text{für } q = n_0. \end{cases}$$

Da nach Lemma DG.33 ja

$$L(t^q e^{\lambda t}) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^q (\chi(\lambda) e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\lambda_0}$$

ist, haben wir die erste Aussage von

Satz DG.34 Es sei χ das charakteristische Polynom des Differentialoperators L . Dann gelten

1. Ist λ_0 eine genau n_0 -fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ , so sind die n_0 Funktionen

$$u_q(t) := t^q e^{\lambda_0 t} \quad \text{für } 0 \leq q < n_0$$

sämtlich Lösungen der Differentialgleichung $L(u)(t) = 0$. Sie sind linear unabhängig.

2. Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die sämtlichen paarweise verschiedenen Nullstellen von χ , je mit Ordnungen n_1, n_2, \dots, n_r , so bilden die n Funktionen

$$u_{j,q}(t) := t^q e^{\lambda_j t} \quad \text{für } 1 \leq j \leq r, 0 \leq q < n_j$$

ein Fundamentalsystem, d.h. eine Basis des Lösungsraumes von $L(u) = 0$.

Hat also das charakteristische Polynom n paarweise verschiedene **einfache** Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bilden die Funktionen

$$e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$$

eine Basis des Lösungsraumes unserer homogenen Differentialgleichung. Die zugehörige Fundamentalmatrix hat die Gestalt

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \dots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 t} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

deren (WRONSKI-)Determinante bis auf die Exponentialfaktoren gerade die VANDERMONTSche Determinante zu den $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ist, also $\neq 0$.

Für mehrfache Nullstellen beweist man die Unabhängigkeit der angegebenen Lösungen per Induktion.

Beispiel DG.35

1.

$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - 5\lambda^2 + 4 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1)$$

mit den vier einfachen Nullstellen

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = +2, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = +1.$$

Somit bilden

$$u_1(t) = e^{-2t}, u_2(t) = e^{2t}, u_3(t) = e^{-t}, u_4(t) = e^t$$

ein Fundamentalsystem.

2.

$$y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 - 4)^2$$

mit den beiden je doppelten Nullstellen

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = +2.$$

Somit lautet das Fundamentalsystem

$$u_1(t) = e^{-2t}, u_2(t) = te^{-2t}, u_3(t) = e^{2t}, u_4(t) = te^{2t}.$$

3.

$$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 - 1)$$

mit den vier einfachen Nullstellen

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = +1, \lambda_3 = -2i, \lambda_4 = +2i.$$

Wir erhalten das Fundamentalsystem

$$u_1(t) = e^{-t}, u_2(t) = e^t, u_3(t) = e^{-2it}, u_4(t) = e^{2it}$$

Hier tauchen komplexwertige Lösungsfunktionen auf, was mathematisch kein Problem, deren physikalische Bedeutung aber zunächst unklar ist. Nun bilden aber auch sämtliche Linearkombinationen der konstruierten Lösungen ebenfalls wieder Lösungen unserer Differentialgleichung, sodaß auch etwa

$$\frac{1}{2}(u_4(t) + u_3(t)) = \frac{1}{2}(e^{2it} + e^{-2it}) = \cos 2t$$

und

$$\frac{1}{2i}(u_4(t) - u_3(t)) = \frac{1}{2i}(e^{2it} - e^{-2it}) = \sin 2t$$

Lösungen sind. (Einsetzen, Probe machen!)

Wir bekommen hier also in

$$e^{-t}, e^t, \cos 2t, \sin 2t$$

tatsächlich vier unabhängige Lösungen, also eine Basis des Lösungsraumes.

Dieser letzte Sachverhalt gilt nun allgemein:

Beginnen wir mit einer Differentialgleichung mit **reellen** Koeffizienten a_ν , so hat auch das charakteristische Polynom reelle Koeffizienten, paßt also zu dem folgenden

Fakt DG.36 Ist $\chi(\lambda)$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten und ist $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ eine nicht reelle Nullstelle der genauen Ordnung n_0 , so ist auch die konjugiert komplexe Zahl $\overline{\lambda_0} = \alpha - i\beta$ Nullstelle von χ und ebenfalls von der Ordnung n_0 .

Zusammen mit Satz DG.34 bekommen wir daraus

Satz DG.37 Es sei χ das charakteristische Polynom des Differentialoperators L mit konstanten reellen Koeffizienten.

1. Ist $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) eine nichtreelle Nullstelle von χ der genauen Ordnung n_0 , so sind die $2n_0$ vielen Funktionen

$$t^q e^{\alpha t} \cos \beta t, t^q e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (0 \leq q < n_0)$$

unabhängige Lösungen von $L(u) = 0$.

2. Hat χ reelle und echt komplexe Nullstellen, so bilden die nach Satz DG.34 zu den reellen Nullstellen gebildeten und die nach 1. zu den komplexen Nullstellen gebildeten Lösungen gerade ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $L(u) = 0$.

Beweis: 1. : Nach Satz DG.34 sind die Funktionen

$$\left(t^q e^{(\alpha+i\beta)t}, t^q e^{(\alpha-i\beta)t} \mid 0 \leq q < n_0 \right)$$

unabhängige Lösungen. Aus je einem Paar zum selben q erhält man als Linearkombinationen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(t^q e^{(\alpha+i\beta)t} + t^q e^{(\alpha-i\beta)t}) &= t^q e^{\alpha t} \frac{1}{2}(e^{i\beta t} + e^{-i\beta t}) \\ &= t^q e^{\alpha t} \cos \beta t\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i}(t^q e^{(\alpha+i\beta)t} - t^q e^{(\alpha-i\beta)t}) &= t^q e^{\alpha t} \frac{1}{2i}(e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}) \\ &= t^q e^{\alpha t} \sin \beta t\end{aligned}$$

Die restlichen Beweisteile seien übergangen. \square

Das Lemma DG.33 können wir auch verwenden, um Lösungen der inhomogenen Gleichung

$$L(u)(t) = \beta(t)$$

für spezielle "rechte Seiten" $\beta(t)$ zu bekommen. Solch eine Inhomogenität beschreibt etwa eine von außen wirkende Kraft, die häufig als konstant oder als periodisch angenommen werden kann, sagen wir als Überlagerung von endlich vielen Cosinus-Schwingungen. Wir haben dann also etwa eine Darstellung als

$$\beta(t) = \sum_{k=1}^r \gamma_k e^{\omega_k t} \quad \text{mit } \omega_k \in \mathbb{C}.$$

Hat man nun Lösungen u_k zu $L(u_k)(t) = e^{\omega_k t}$, so ist offenbar

$$L\left(\sum_{k=1}^r \gamma_k u_k\right) = \sum_{k=1}^r \gamma_k L(u_k) = \beta$$

eine Lösung der gegebenen inhomogenen Gleichung. Dazu liefert uns nun Lemma DG.33 folgendes Resultat:

Satz DG.38 *Es sei χ das charakteristische Polynom zum Differentialoperator L , ferner $\omega \in \mathbb{C}$.*

1. *Ist $\chi(\omega) \neq 0$, so ist*

$$u_0(t) := \frac{1}{\chi(\omega)} e^{\omega t}$$

Lösung von

$$L(u)(t) = e^{\omega t}.$$

2. *Ist $\chi(\omega) = 0$ und ω eine genau r -fache Nullstelle, so ist*

$$u_0(t) := \frac{1}{\chi^{(r)}(\omega)} t^r e^{\omega t}$$

Lösung von

$$L(u)(t) = e^{\omega t}.$$

3. *Ist ω eine genau r -fache Nullstelle von χ , wobei $r = 0$ zugelassen ist, so bekommt man eine Lösung von*

$$L(u)(t) = t^s e^{\omega t} \quad (s \in \mathbb{N})$$

über den Ansatz

$$u_0(t) = p(t) e^{\omega t}$$

mit einem Polynom p vom Grade $r + s$.

Beweis: 1.: Nach Satz DG.34 ist

$$L\left(\frac{1}{\chi(\omega)}e^{\omega t}\right) = \frac{1}{\chi(\omega)}L(e^{\omega t}) = \frac{1}{\chi(\omega)} \cdot \chi(\omega)e^{\omega t} = e^{\omega t}.$$

2.: Wir haben nach Satz DG.34

$$L(t^r e^{\omega t}) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^r (\chi(\lambda)e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\omega}.$$

Nun ist

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^r (\chi(\lambda)e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\omega} = \sum_{\rho=0}^r \binom{r}{\rho} \chi^{(\rho)}(\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^{r-\rho} e^{\lambda t} \Big|_{\lambda=\omega} = \sum_{\rho=0}^r \binom{r}{\rho} \chi^{(\rho)}(\omega) t^{r-\rho} e^{\omega t}.$$

Da ω eine genau r -fache Nullstelle von χ ist, gilt

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) = \dots = \chi^{(r-1)}(\omega) = 0,$$

sodaß nur der letzte Term übrig bleibt und damit

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^r (\chi(\lambda)e^{\lambda t}) \Big|_{\lambda=\omega} = \chi^{(r)}(\omega) e^{\omega t},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Der Beweis von 3. sei übergangen. □

Beispiel DG.39

Die erste Differentialgleichung aus Beispiel DG.35

$$L(y) := y^{(4)} - 5y'' + 4y$$

hat das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 1)$.

Für $\beta(t) = e^{5t}$ ist $\omega = 5$ keine Nullstelle von χ , somit $u_0(t) = \frac{1}{\chi(5)}e^{5t}$ Lösung der inhomogenen Gleichung.

Für $\beta(t) = e^{2t}$ ist $\omega = 2$ eine einfache Nullstelle von χ , somit $u_0(t) = \frac{1}{\chi'(2)}te^{2t}$ Lösung der inhomogenen Gleichung. □

Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten konnten wir explizit angeben, sofern uns die Nullstellen eines ihr zugehörigen 'charakteristischen' Polynoms bekannt waren. Dies bleibt auch für das allgemeine lineare System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten richtig, wobei hier die Eigenwerte, genauer die JORDANSche Normalform der Systemmatrix wichtig wird.

Wir untersuchen also

$$y' = Ay$$

mit einer konstanten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Auf den Raum $\mathbb{C}^{n \times n}$ der $n \times n$ -Matrizen mit komplexen Elementen ist durch

$$|B| := \left(\sum_{ij} |b_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm erklärt, für die zudem gilt

Lemma DG.40

1.

$$|A \cdot B| \leq |A| \cdot |B|,$$

2.

$$|A^k| \leq |A|^k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Beweis: 1.:

$$|A \cdot B|^2 = \sum_{ij} \left(\left| \sum_k a_{ik} b_{kj} \right|^2 \right)$$

Nach der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ können wir dies abschätzen durch

$$\leq \sum_{ij} \left(\sum_k |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_k |b_{kj}|^2 \right) = |A|^2 \cdot |B|^2.$$

2. beweist man induktiv mit 1. □Nun betrachten wir für eine feste komplexe Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die "Exponentialreihe"

$$\sum_k \frac{1}{k!} B^k,$$

wobei $B^0 := I$, also die Einheitsmatrix ist. Dazu ist die Folge aus den Partialsummen

$$S_m := \sum_k^m \frac{1}{k!} B^k$$

zu betrachten, welche ja jeweils wieder $n \times n$ -Matrizen sind. Die Differenz solcher Partialsummen kann man mit obiger Norm abschätzen und erhält für $m > r$

$$|S_m - S_r| = \left| \sum_{k=r+1}^m \frac{1}{k!} B^k \right| \leq \sum_{k=r+1}^m \frac{1}{k!} |B^k| \leq \sum_{k=r+1}^m \frac{1}{k!} |B|^k.$$

Der zuletzt enthaltene Term ist aber ein entsprechender Abschnitt der gewöhnlichen Exponentialreihe für $e^{|B|}$ und geht daher mit $r \rightarrow \infty$ gegen Null. Folglich bilden die Partialsummen unserer Matrix-Reihe eine CAUCHY-Folge, und da $\mathbb{C}^{n \times n}$ und \mathbb{C}^{n^2} ja (bis auf die Art des Hinschreibens) dasselbe sind, sind beide vollständig, somit unsere Reihe konvergent.

Satz und Definition DG.41 Für jede Matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist die Reihe $\sum_k \frac{1}{k!} B^k$ konvergent bezüglich der (Quadratsummen-)Norm und hat somit einen Grenzwert. Wir bezeichnen diese Grenzmatrix mit

$$e^B := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

Für eine 1×1 -Matrix $B = (\beta)$ ist offenbar auch $e^B = (e^\beta)$, d.h. die Matrix mit dem einzigen Element e^β .

Die Bezeichnung e^B wird durch die Reihe nahegelegt, spiegelt sich aber auch in den Eigenschaften dieser Matrix e^B wieder.

Satz DG.42 Für die “Exponentialfunktion von Matrizen” gelten

1. Für die Nullmatrix 0 und die Einheitsmatrix I ist

$$e^0 = I.$$

2. Sind $B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und **vertauschbar**, d.h. gilt $BC = CB$, so ist

$$e^{B+C} = e^B \cdot e^C.$$

3. Es ist stets e^B invertierbar und

$$(e^B)^{-1} = e^{-B}.$$

4. Ist G invertierbar, so ist

$$e^{GBG^{-1}} = Ge^B G^{-1}.$$

5. Es gilt die Abschätzung

$$|e^B| \leq e^{|B|}.$$

Beweis: 1. erledigt man durch Einsetzen.

2. Nach Definition ist

$$e^{B+C} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (B+C)^k.$$

Nun ist etwa $(B+C)^2 = (B+C)(B+C) = B^2 + BC + CB + C^2$ und dies ist im allgemeinen verschieden von $B^2 + 2BC + C^2$. In unserem Fall ist aber vorausgesetzt, daß $BC = CB$ ist, und damit folgt die allgemeine Binomialformel für vertauschbare Matrizen:

Ist $BC = CB$, so gilt

$$(B+C)^k = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} B^s C^{k-s}.$$

Damit kann man nun alles, was man braucht, um die Funktionalgleichung für die gewöhnliche Exponentialfunktion zu beweisen, auch für die Matrix-Exponentialfunktion nachbauen und bekommt damit die behauptete Formel.

3. Es ist, da B und $-B$ trivialerweise vertauschbar sind,

$$I = e^0 = e^{B+(-B)} = e^B \cdot e^{-B}.$$

4. Es ist

$$\begin{aligned} e^{GBG^{-1}} &= I + \frac{1}{1!} GBG^{-1} + \frac{1}{2!} (GBG^{-1})(GBG^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{3!} (GBG^{-1})(GBG^{-1})(GBG^{-1}) + \dots \end{aligned}$$

Hier heben sich alle “inneren” Vorkommen von G, G^{-1} weg, sodaß nur bleibt

$$\begin{aligned} &= G \left(I + \frac{1}{1!} B + \frac{1}{2!} B^2 + \frac{1}{3!} B^3 + \dots \right) G^{-1} \\ &= Ge^B G^{-1}. \end{aligned}$$

5. hatten wir schon oben ausgerechnet. □

Nun betrachten wir mit einer festen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Funktion

$$Y(t) : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA} \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

Dafür gilt der für unser Differentialgleichungsproblem interessante

Satz DG.43 Diese Funktion $Y(t) = e^{tA}$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und erfüllt die Matrix-Differentialgleichung

$$Y'(t) = A \cdot Y(t).$$

Beweis: Es ist

$$|Y(t+h) - Y(t) - h \cdot AY(t)| = |e^{(t+h)A} - e^{tA} - hAe^{tA}|$$

(A und e^{tA} sind vertauschbar! Warum??)

$$\begin{aligned} &= |e^{tA}(e^{hA} - I - hA)| \\ &\leq |e^{tA}| \cdot \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} (hA)^k \right| \\ &\leq |e^{tA}| \cdot |hA|^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} |(hA)^k| \\ &\leq |h|^2 |A|^2 e^{|tA|} e^{|h||A|}. \end{aligned}$$

Da dies wie h^2 gegen Null geht, ist damit Y differenzierbar und $Y'(t) = AY(t)$.

Da Y differenzierbar ist, ist es auch stetig und damit über die Differentialgleichung auch die Ableitung stetig, d.h. Y stetig differenzierbar. \square

Bezeichnen wir die Spalten von $Y(t) = e^{tA}$ mit $y_1(t), \dots, y_n(t)$, so gilt nach Satz DG.43 für jede dieser Funktionen die Differentialgleichung

$$y_i'(t) = Ay_i(t),$$

sie sind also sämtlich Lösungen des uns interessierenden Systems $y' = Ay$. Nach Satz DG.42.3 ist $Y(t) = e^{tA}$ stets invertierbar und damit also ein Fundamentalsystem zu unserem Differentialgleichungssystem.

Wir haben somit den

Satz DG.44 Für das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit der konstanten Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist

$$Y(t) = e^{tA}$$

die Fundamentalmatrix mit $Y(0) = I$.

Dies Matrix e^{tA} kann man nun explizit angeben, sofern man die Transformation von A auf JORDANSCHER Normalform beherrscht. Wir leiten dies in mehreren Schritten her.

Schritt 1: Die Matrix A habe die JORDAN-Form $J = G^{-1}AG$, wobei die reguläre Matrix G die Basistransformation beschreibt. Dann ist also $A = GJG^{-1}$ und damit nach Satz DG.42.4

$$Y(t) = e^{tA} = e^{tGJG^{-1}} = e^{G(tJ)G^{-1}} = Ge^{tJ}G^{-1}.$$

Somit haben wir das Problem reduziert auf

Schritt 2: Bestimme e^{tJ} für J in JORDAN-Form.

Die Matrix J hat Blockdiagonalgestalt

$$J = \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_r \end{pmatrix},$$

wobei die C_r symmetrisch zur Diagonale liegende quadratische Matrizen, eben die "JORDAN-Kästen" sind. Nun ist

$$J^2 = \begin{pmatrix} C_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & C_r^2 \end{pmatrix}, \dots, J^k = \begin{pmatrix} C_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & C_r^k \end{pmatrix}$$

also von der selben Gestalt wie J selbst. Also erhält man aus der Reihendarstellung

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tC_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tC_r} \end{pmatrix}$$

d.h. die Blockdiagonalmatrix aus den Exponentialmatrizen der JORDAN-Kästen. Bleibt noch zu betrachten

Schritt 3: Bestimme e^{tC} für einen JORDAN-Kasten

$$C = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} =: \lambda I_m + E_m.$$

Da die Einheitsmatrix mit jeder Matrix vertauscht, ist $e^{t(\lambda I + E)} = e^{t\lambda I} \cdot e^{tE}$. Nach Schritt 2 ist

$$e^{t\lambda I} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda} \end{pmatrix} = e^{t\lambda} I.$$

Bleibt noch e^{tE} zu bestimmen. Dies berechnet man über die Reihe. Es ist für die $m \times m$ -Matrix E :

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$E^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ etc. und schließlich } E^m = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

sodaß wir bekommen

$$e^{\lambda E} = I + tE + \frac{1}{2}t^2E^2 + \frac{1}{3!}t^3E^3 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}E^{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Somit ist also für einen JORDAN-Kasten $C = \lambda I_m + E_m$

$$e^{tC} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \dots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Schritt 4: Diese Blöcke hat man gemäß Schritt 2 in eine große Matrix einzuordnen und gemäß Schritt 1 mit der Matrix G der Basistransformation ähnlich zu transformieren. Das Ergebnis ist die Fundamentalmatrix $Y(t)$ zu den Anfangsdaten $Y(0) = I$. \square

Ist die Matrix A diagonalisierbar, so sind die JORDAN-Kästen alles 1×1 -Matrizen und wir bekommen dann den

Spezialfall DG.45 Die Matrix A sei diagonalisierbar, d.h.

$$A = G \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot G^{-1}.$$

Dann ist

$$Y(t) := G \cdot \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}) \cdot G^{-1}.$$

das Fundamentalsystem mit $Y(0) = I$.

Beispiel DG.46 Mit

$$A := \begin{pmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

bilden wir das System

$$y' = Ay.$$

Nach Kapitel E, Beispiel BE 3 ist

$$A = GJG^{-1},$$

wobei

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 5 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix J hat dabei JORDAN-Form. Damit ist

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

und also

$$Y(t) = Ge^{tJ}G^{-1} = \begin{pmatrix} (15t+1)e^{2t} & 0 & -25te^{2t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 9te^{2t} & 0 & (-15t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix mit $Y(0) = I$.

Zur Probe überprüfe man, daß tatsächlich

$$Y'(t) = AY(t)$$

gilt.

Rand- und Eigenwertprobleme

Bisher hatten wir Anfangswertaufgaben betrachtet, d.h. man legt zu einem Startzeitpunkt alles fest und sieht dann, wo man zur Zeit t eben hingekommen ist. Denkt man an Mondflüge, so ist es für einen vom Mond zurückfliegenden Astronauten doch wohl von größerem Interesse, sicherzustellen, daß er wirklich auf der Erde ankommt, als zu wissen, daß seine Flugbahn durch die Startbedingungen (auf dem Mond) wohldefiniert ist... !!

Es ergibt sich also folgende Fragestellung:

*Ein physikalischer Prozess werde für ein Zeitintervall $x \in [a, b]$ durch ein Differentialgleichungssystem $y' = f(x, y)$ beschrieben. Man bestimme eine Lösung zu "Randwerten", d.h. durch Vorgaben bei $x = a$ **und** bei $x = b$.*

Wir beschränken uns im Weiteren auf die Untersuchung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die homogene Gleichung hat einen zweidimensionalen Lösungsraum, sodaß wir zwei Bedingungen "frei" haben.

- Bei Anfangswertaufgaben : Vorgabe von $y(a)$ und $y'(a)$.
- Bei Randwertaufgaben: Vorgabe von $y(a)$ und $y(b)$ oder wie es sich als praktischer erweist, Vorgabe je einer Linearkombination aus Funktionswert und Ableitung an der Stelle a bzw. an der Stelle b .

Wir behandeln also folgende Randwertaufgaben:

Definition DG.47 *Es sei $[a, b] \in \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, a_0, a_1, a_2, f seien stetige Funktionen auf $[a, b]$, dabei $a_2(x) \neq 0$ auf $[a, b]$ und $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma_a, \gamma_b \in \mathbb{R}$, dabei jeweils $(\alpha, \alpha') \neq 0$ und $(\beta, \beta') \neq 0$. Für eine Funktion $y \in C^2[a, b]$ sei*

$$L(y)(x) := a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

ein linearer Differentialoperator zweiter Ordnung.

$$R_a(y) := \alpha y(a) + \alpha' y'(a),$$

$$R_b(y) := \beta y(b) + \beta' y'(b)$$

werden "Randoperatoren" genannt. Damit heißt die Aufgabe:

Suche eine Lösung $y \in C^2[a, b]$ von

$$L(y)(x) = f(x) \quad (x \in (a, b)),$$

$$R_a(y) = \gamma_a, \quad R_b(y) = \gamma_b$$

eine "lineare Randwertaufgabe zweiter Ordnung".

Sind $f = 0$ und $\gamma_a = \gamma_b = 0$, so heißt die Aufgabe "homogen", sonst "inhomogen".

Wegen $a_2(x) \neq 0$ könnten wir den Faktor a_2 herausdividieren und damit auf die bereits behandelte Form der Differentialgleichung kommen. In dem jetzt zu betrachtenden Zusammenhang erweist sich jedoch die nun gewählte Darstellung als zweckmäßiger.

Durch den folgenden simplen Trick können wir uns in Zukunft bei den Randbedingungen auf den homogenen Fall beschränken:

Wir wählen irgend eine C^2 -Funktion φ , die die beiden vorgegebenen Randbedingungen, also $R_a(\varphi) = \gamma_a, R_b(\varphi) = \gamma_b$ erfüllt, und setzen

$$g(x) := L(\varphi)(x).$$

Ist dann y eine Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} L(y)(x) &= f(x) - g(x) \quad (x \in (a, b)), \\ R_a(y) &= 0, \quad R_b(y) = 0, \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} L(y + \varphi)(x) &= L(y)(x) + L(\varphi)(x) = f(x) - g(x) + g(x) = f(x), \\ R_a(y + \varphi) &= R_a(y) + R_a(\varphi) = 0 + \gamma_a = \gamma_a, \\ R_b(y + \varphi) &= R_b(y) + R_b(\varphi) = 0 + \gamma_b = \gamma_b, \end{aligned}$$

also $y + \varphi$ eine Lösung des eigentlichen Problems.

Betrachten wir also die Aufgabe

$$\begin{aligned} L(y)(x) &= f(x) \quad (x \in (a, b)), \\ R_a(y) &= 0, \quad R_b(y) = 0. \end{aligned}$$

Es sei (y_1, y_2) ein Fundamentalsystem von $L(y) = 0$ und y_0 eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung $L(y) = f$. Dann hat die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung die Gestalt

$$y(x) = y_0(x) - c_1 y_1(x) - c_2 y_2(x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Diese Konstanten sind nun so zu wählen, daß die Randbedingungen gelten. Es ist also zu lösen:

$$0 \stackrel{!}{=} R_a(y) = R_a(y_0) - c_1 R_a(y_1) - c_2 R_a(y_2),$$

d.h.

$$c_1 R_a(y_1) + c_2 R_a(y_2) = R_a(y_0)$$

und analog

$$c_1 R_b(y_1) + c_2 R_b(y_2) = R_b(y_0).$$

Der Koeffizientenvektor $c = (c_1, c_2)^T$ hat also folgendes Gleichungssystem zu erfüllen:

$$\begin{pmatrix} R_a(y_1) & R_a(y_2) \\ R_b(y_1) & R_b(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a(y_0) \\ R_b(y_0) \end{pmatrix}.$$

Die Lösbarkeit hängt nun an der Systemmatrix, genannt "Randmatrix"

$$R(y_1, y_2) := \begin{pmatrix} R_a(y_1) & R_a(y_2) \\ R_b(y_1) & R_b(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y_1(a) + \alpha' y_1'(a) & \alpha y_2(a) + \alpha' y_2'(a) \\ \beta y_1(b) + \beta' y_1'(b) & \beta y_2(b) + \beta' y_2'(b) \end{pmatrix}$$

Fall 1: Es ist $\text{rg}(R(y_1, y_2)) = 2$: Dann ist die Randwertaufgabe stets eindeutig lösbar.

Fall 2: Es ist $\text{rg}(R(y_1, y_2)) \leq 1$: Hier kann $\text{rg}(R(y_1, y_2)) = 0$ nicht auftreten. Denn in diesem Fall wäre dann insbesondere $R_a(y_1) = R_a(y_2) = 0$, somit $(y_1(a), y_1'(a))$ und $(y_2(a), y_2'(a))$ linear abhängig, was bei einem Fundamentalsystem unmöglich ist.

Also bleibt in diesem Fall nur $\text{rg}(R(y_1, y_2)) = 1$, d.h. wenn überhaupt lösbar, hat das System einen eindimensionalen Lösungsraum.

Dies ist nun der eigentlich interessante Fall, den wir weiter untersuchen wollen.

Beispiel DG.48 Auf $[a, b] := [0, \pi]$ betrachte

$$L(y) := y'' + n^2 y, \quad R_0(y) := y(0), \quad R_\pi(y) := y(\pi),$$

und dazu die homogene Randwertaufgabe

$$L(y)(x) = 0 \quad (x \in (0, \pi)), \quad R_0(y) = R_\pi(y) = 0.$$

Ein Fundamentalsystem ist

$$y_1(x) = \cos nx, \quad y_2(x) = \sin nx$$

mit den Randwerten

$$R(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(\pi) & y_2(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos n\pi & \sin n\pi \end{pmatrix}.$$

Genau für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\sin n\pi = 0$ und damit die Randmatrix singulär. Also haben wir

- Ist $n \notin \mathbb{Z}$, so ist die homogene Randwertaufgabe

$$L(y)(x) = 0 \quad (x \in (0, \pi)), \quad R_0(y) = R_\pi(y) = 0.$$

nur trivial lösbar.

- Ist $n \in \mathbb{Z}$, so besitzt sie einen eindimensionalen Lösungsraum, bestehend aus allen Funktionen der Form

$$y(x) = c \cdot \sin nx \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Man nennt hier n^2 einen “Eigenwert”, $\sin nx$ die zugehörige “Eigenlösung” oder “Eigenfunktion” der Randwertaufgabe. (Siehe auch Definition DG.51).

Die schwingende Saite

$y(t, x)$ beschreibe die Auslenkung aus der Ruhelage einer bei $x = 0$ und $x = \pi$ eingespannten schwingenden Saite zur Zeit t am Ort x . Wenn diese Saite Mathematikern und Physikern wohlgesonnen ist, erfüllt sie die *Schwingungsgleichung*

$$y_{tt} = \rho^2 y_{xx} \quad \text{mit } \rho \in \mathbb{R}, > 0,$$

wobei, da die Saite an beiden Enden eingespannt ist, stets $y(t, 0) = y(t, \pi) = 0$ ist. Weiter seien zur Zeit $t = 0$ die Größe der Auslenkung und ihre Änderungsgeschwindigkeit bekannt, d.h. vorgegeben

$$y(0, x) = f(x), \quad y_t(0, x) = g(x),$$

wobei wieder $f(0) = f(\pi) = 0$, $g(0) = g(\pi) = 0$ gelten müssen.

Wie schwingt die Saite, d.h. wie lautet $y(t, x)$?

Zunächst begnügen wir uns damit, nichttriviale Lösungen zu finden, die wenigstens einen Teil der Randbedingungen erfüllen, nämlich Lösungen von

$$y_{tt} = \rho^2 y_{xx} \quad \text{mit } y(t, 0) = y(t, \pi) = 0 \quad \text{für alle } t.$$

Dies macht man mit einem “Separationsansatz”:

$$y(t, x) = \varphi(x)\psi(t).$$

Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} y_{tt}(t, x) &= \varphi(x)\ddot{\psi}(t) \\ y_{xx}(t, x) &= \varphi''(x)\psi(t) \end{aligned}$$

und die Schwingungsgleichung wird zu

$$\varphi(x)\ddot{\psi}(t) = \rho^2 \varphi''(x)\psi(t)$$

bzw.

$$\frac{\ddot{\psi}(t)}{\rho^2\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \text{const.} =: -\lambda.$$

Die Schwingungsgleichung zerfällt also in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\varphi''(x) = -\lambda\varphi(x) \quad \text{und} \quad \ddot{\psi}(t) = -\lambda\rho^2\psi(t),$$

wobei allerdings der Parameter λ unbestimmt ist.

Dafür verifiziert man durch Einsetzen die folgende Aussage

Fakt DG.49 Sind $\varphi, \psi \in C^2[0, \pi]$ so gewählt, daß mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \ddot{\psi}(t) + \lambda\rho^2\psi(t) &= 0, \\ \varphi''(x) + \lambda\varphi(x) &= 0, \end{aligned}$$

so erfüllt

$$y(t, x) := \varphi(x)\psi(t)$$

die Schwingungsgleichung

$$y_{tt} = \rho^2 y_{xx}.$$

Ist zudem $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, so erfüllt y für alle t die "Einspannbedingung"

$$y(t, 0) = y(t, \pi) = 0.$$

Wir suchen also – was φ betrifft – nichttriviale Lösungen von

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$$

und nach Beispiel DG.48 gibt es dies genau für $\lambda = \lambda_n := n^2$ ($n \in \mathbb{Z}$) mit den zugehörigen Eigenlösungen

$$\varphi_n(x) := \sin nx.$$

Geht man damit in die andere Differentialgleichung von Fakt DG.49, so bekommt man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\ddot{\psi}(t) = n^2\rho^2\psi(t)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\psi_n(t) := a_n \cos(\rho nt) + b_n \sin(\rho nt) \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R}).$$

Wir haben somit

Fakt DG.50 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist mit beliebigen $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$$y_n(t, x) := (a_n \cos(\rho nt) + b_n \sin(\rho nt)) \sin nx$$

eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$y_{tt} = \rho^2 y_{xx},$$

die die Randbedingungen $y(t, 0) = y(t, \pi) = 0$ für alle t erfüllt.

Wählt man nun die Koeffizienten a_n, b_n so, daß die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 (|a_n| + |b_n|)$$

konvergiert, so stellt

$$y(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(\rho n t) + b_n \sin(\rho n t)) \sin n x$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion dar, deren Ableitungen man durch gliedweises Differenzieren bekommt und die damit wieder Lösung der Schwingungsgleichung unter der Einspann-Randbedingung ist.

Speziell können wir jetzt noch die Startwerte angehen

$$y(0, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin n x \stackrel{!}{=} f(x)$$

$$y_t(0, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho n b_n \sin n x \stackrel{!}{=} g(x).$$

Nun entwickle man f und g (genauer deren periodische Fortsetzung als ungerade Funktionen!) in FOURIER-Reihen und bekommt daraus die Koeffizienten a_n, b_n . Sind f, g glatt genug, so ist auch die oben notierte Konvergenzbedingung erfüllt und wir haben das Problem der schwingenden Saite vollständig gelöst.

Wir haben an dem Beispiel gesehen:

Schwingungsaufgaben führen über einen Separationsansatz auf gewöhnliche Differentialgleichungen mit Rand-Eigenwert-Aufgaben und auf die Entwicklung nach Eigenfunktionen.

Dies sei nun ein Stück allgemeiner betrachtet.

Die STURM-LIOUVILLESche Eigenwertaufgabe.

Eigenwerte hatten wir für Matrizen untersucht und dabei folgendes Resultat erhalten:

Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt in \mathbb{C}^n und ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ selbstadjungiert, d.h. gilt für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ stets $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, so sind alle Eigenwerte von A reell und der \mathbb{C}^n besitzt eine Basis aus Eigenvektoren, die paarweise orthogonal und normiert sind. Jedes Element des \mathbb{C}^n kann man also nach Eigenlösungen entwickeln.

Wir werden sehen, daß wir ganz ähnliche Verhältnisse bei unseren Randwertaufgaben vorfinden.

Definition DG.51 1. Es seien $p, q \in C[a, b]$, dabei p stetig differenzierbar und $p(x) > 0$ auf ganz $[a, b]$. Dann heißt

$$Ly := (py')' + qy = py'' + p'y' + qy$$

ein "formal selbstadjungierter" oder "STURM-LIOUVILLEScher" linearer Differentialoperator (zweiter Ordnung).

Mit Vektoren $(\alpha, \alpha')^T, (\beta, \beta')^T \in \mathbb{R}^2, \neq 0$ heißen

$$R_a(y) := \alpha y(a) + \alpha' y'(a),$$

$$R_b(y) := \beta y(b) + \beta' y'(b)$$

die "STURM-LIOUVILLESchen Randoperatoren" und die Forderung

$$R_a(y) = R_b(y) = 0$$

die "STURM-LIOUVILLESchen Randbedingungen".

2. Ist $r \in C[a, b]$, $r(x) > 0$ auf ganz $[a, b]$, so heißt die Aufgabe:

Bestimme $\lambda \in \mathbb{C}$ und eine evtl. komplexwertige Funktion $y \in C^2[a, b]$, $\neq 0$, sodaß

$$\begin{aligned} Ly + \lambda ry &= 0 \text{ auf } [a, b] \\ R_a(y) &= R_b(y) = 0 \end{aligned}$$

gelten, das "STURM-LIOUVILLESche Rand-Eigenwertproblem zu der Gewichtsfunktion r ."

Wir hatten dies oben betrachtet für $[a, b] := [0, \pi]$ und

$$\begin{aligned} Ly + \lambda ry &:= y'' + \lambda y, \\ R_0(y) &:= y(0), R_\pi(y) := y(\pi). \end{aligned}$$

Versuchen Sie, sich die folgenden Überlegungen stets an diesem Beispiel klar zu machen!

Zur Untersuchung dieser Rand-Eigenwertaufgabe nutzen wir den Raum $C^2[a, b]$ der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem wir Skalarprodukte

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

und mit der obigen stets positiven Gewichtsfunktion r

$$\langle f, g \rangle_r := \int_a^b r(x)f(x)g(x)dx$$

eingeführen. Dafür gilt offenbar

Fakt DG.52 Es ist

$$\langle rf, g \rangle = \langle f, rg \rangle = \langle f, g \rangle_r.$$

Die Bezeichnung 'formal selbstadjungiert' erklärt sich aus folgendem Sachverhalt.

Satz DG.53 Sind $u, v \in C^2[a, b]$ und erfüllen sie die STURM-LIOUVILLESchen Randbedingungen, so gilt für jeden formal selbstadjungierten Differentialoperator L die Relation

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle &= \int_a^b ((pu')' + qu)v - [(pv')' + qv]u dx \\ &= \int_a^b ((pu')'v - u(pv')') dx \\ &= \int_a^b ((pu')'v + pu'v') - [u(pv')' + u'pv'] dx \\ &= \int_a^b ((pu'v)') - (upv')' dx \\ &= p(u'v - uv') \Big|_a^b = -p \det \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \end{pmatrix} \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Da u und v die Randbedingungen erfüllen, ist (α, α') orthogonal auf $(u(a), u'(a))$ und auf $(v(a), v'(a))$, sodaß diese beiden Vektoren linear abhängig sind und ihre Determinante daher verschwindet. Es ist also

$$\det \begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} = 0$$

und analog bei b . Somit ist

$$\langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle = 0.$$

□

Durch Multiplikation mit einer passenden Funktion r kann man jeden linearen Differentialoperator zweiter Ordnung zu einem selbstadjungierten machen, wobei aber dann diese Funktion r in dem Eigenwertproblem zu berücksichtigen ist.

Satz DG.54 *Es sei $a_2 \in C^1[a, b]$, $a_2 > 0$, $a_1, a_0 \in C[a, b]$ und $Ly := a_2 y'' + a_1 y' + a_0$. Es sei ferner s Stammfunktion zu $\frac{a_1 - a_2'}{a_2}$ und $r(x) := e^{s(x)}$. Dann ist $r(x) > 0$ und*

$$(rL)y = (ra_2)y'' + (ra_1y') + (ra_0)y$$

formal selbstadjungiert.

Die Eigenwertaufgabe

$$Ly + \lambda y = 0, \quad R_a(y) = R_b(y) = 0$$

geht dann über in die STURM-LIOUVILLESche Eigenwertaufgabe mit Gewicht r

$$(rL)y + \lambda r y = 0, \quad R_a(y) = R_b(y) = 0.$$

Beweis: Es ist $ra_2(x) > 0$ und (nachrechnen !)

$$(ra_2)'(x) = (ra_1)(x),$$

was gerade die Selbstadjungiertheit bedeutet. □

Behandeln wir nun die STURM-LIOUVILLESche Eigenwertaufgabe mit Gewicht r in der Form

$$Ly + \lambda r y = 0, \quad R_a(y) = R_b(y) = 0,$$

wobei wir prinzipiell auch komplexwertige Funktionen als Lösungen zulassen.

Satz DG.55 *Alle Eigenwerte sind reell.*

Beweis: Sei $y = u + iv \neq 0$ eine evtl. komplexe Lösung der Aufgabe zum Eigenwert $\lambda = \rho + i\sigma$. Dann ist also

$$0 = Ly + \lambda r y = L(u + iv) + (\rho + i\sigma)r(u + iv),$$

somit

$$0 = Lu + (\rho u - \sigma v)r$$

und

$$0 = Lv + (\sigma u + \rho v)r$$

ferner

$$0 = R_a(u + iv) = R_a(u) + iR_a(v),$$

sodaß

$$0 = R_a(u) = R_a(v) \quad \text{und analog} \quad 0 = R_b(u) = R_b(v).$$

Es erfüllen also die reelle Funktionen u und v selbst die Randbedingungen. Dann ist mit dem vorigen Satz

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle \\ &= \langle (\sigma v - \rho u)r, v \rangle + \langle u, (\sigma u + \rho v)r \rangle \\ &\stackrel{\text{Fakt DG.52}}{=} \langle (\sigma v - \rho u), v \rangle_r + \langle u, (\sigma u + \rho v) \rangle_r \\ &= \sigma (\langle v, v \rangle_r + \langle u, u \rangle_r). \end{aligned}$$

Der Wert der Klammer ist positiv, somit ist $\sigma = 0$ und damit der Eigenwert λ reell. \square

Als Folgerung ergibt sich, daß dann auch Real- und Imaginärteil einer evtl. komplexen Eigenlösung selbst Eigenlösung ist, wir also völlig im Reellen bleiben können.

Satz DG.56 *Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle_r$.*

Beweis: Erfüllen u und v die Randbedingungen und ist

$$Lu + \lambda ru = 0 \quad \text{und} \quad Lv + \mu rv = 0,$$

so ist (man beachte Fakt DG.52)

$$0 = \langle Lu, v \rangle - \langle u, Lv \rangle = \langle -\lambda ru, v \rangle + \langle u, \mu rv \rangle = (\mu - \lambda) \langle u, v \rangle_r.$$

Wegen $\mu \neq \lambda$ folgt die Behauptung. \square

Ferner liefern die eingangs angestellten Überlegungen zur Lösbarkeit des Randwertproblems

Satz DG.57 *Zu jedem Eigenwert ist der Eigenraum eindimensional.*

Ferner gilt

Satz DG.58 *Die Eigenwerte sind nach unten beschränkt.*

Wir führen den **Beweis** nur für Randoperatoren von dem speziellen Typ $R_a(y) = y(a)$, $R_b(y) = y(b)$.

Es sei also

$$Lu + \lambda ru = 0, \quad u(a) = u(b) = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Lu + \lambda ru, u \rangle = \langle Lu, u \rangle + \langle \lambda ru, u \rangle \\ &= \int_a^b (pu')' u dx + \int_a^b (q + \lambda r) u^2 dx \\ &= (pu') u \Big|_a^b - \int_a^b (pu') u' dx + \int_a^b (q + \lambda r) u^2 dx \end{aligned}$$

Der ausintegrierte Teil fällt wegen der Randbedingung weg, somit ist

$$\int_a^b (q + \lambda r) u^2 dx = \int_a^b p(u')^2 dx.$$

Wegen $p > 0$ ist das rechtsstehende Integral ≥ 0 und da $r(x) > 0$ auf $[a, b]$ und q stetig ist, existiert ein λ_0 , sodaß $(q + \lambda_0 r)(x) < 0$ auf $[a, b]$ und damit

$$\int_a^b (q + \lambda r)u^2 dx < 0 \quad \text{für } \lambda < \lambda_0.$$

Folglich kann solch ein λ nicht mehr Eigenwert sein. \square

Wir notieren jetzt noch einige Ergebnisse für STURM-LIOUVILLESche Eigenwertaufgaben, deren Beweis mit den jetzt zur Verfügung stehenden Mitteln noch nicht möglich ist, die man aber an dem oben behandelten Beispiel

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

unmittelbar nachvollziehen kann.

Satz DG.59 Die Eigenwerte der STURM-LIOUVILLESchen Eigenwertaufgabe mit Gewichtsfunktion bilden eine unendliche Folge $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, die gegen $+\infty$ wächst.

Satz DG.60 Sind (λ_n, φ_n) die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen, so hat φ_n im offenen Intervall (a, b) genau n Nullstellen. Diese sind sämtlich einfach und zwischen je zweien von φ_{n+1} liegt eine von φ_n .

Daß die Nullstellen einfach sind, folgt aus der allgemeine Differentialgleichungstheorie, da bei einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung nur die Nulllösung eine doppelte Nullstelle haben kann.

Im Beispiel der schwingenden Saite hatten wir als Eigenlösungen die Funktionen

$$\varphi_n(x) = \sin(n+1)x \quad (x \in (0, \pi), n = 0, 1, 2, \dots)$$

bekommen und danach kann man ja via FOURIER-Reihen recht allgemeine Funktionen entwickeln.

Dies geht hier analog.

Nach Satz DG.56 sind die Eigenlösungen zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal. Wir können sie dann auch noch als normiert annehmen, d.h. fordern:

Forderung DG.61 Es sei $\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle_r = \delta_{nm}$, d.h.

$$\int_a^b r(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq m, \\ 1 & \text{für } n = m, \end{cases}$$

und Reihenentwicklungen nach diese φ_n untersuchen. (Erinnern Sie, was wir im Kapitel I über FOURIER-Reihen gesagt haben.)

Satz DG.62 Die Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

konvergiere so, daß man termweise integrieren darf, also etwa gleichmäßig auf $[a, b]$. Dann gilt für die Koeffizienten

$$c_k = \int_a^b r(x)f(x)\varphi_k(x)dx = \langle f, \varphi_k \rangle_r.$$

Beweis: Es ist

$$\langle f, \varphi_k \rangle_r = \int_a^b r(x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \right) \varphi_k(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_a^b r(x) \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = c_k$$

□

Warnung: Auch wenn man alle Koeffizienten

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle_r$$

berechnen kann, braucht die Reihe weder vernünftig zu konvergieren, noch wenn sie konvergiert, an jeder Stelle gegen $f(x)$ zu gehen.

Das mathematisch eleganteste, wenn auch nicht unbedingt für den Physiker brauchbarste Resultat ist

Satz DG.63 Für jede bzgl. r quadratisch integrierbare Funktion f konvergiert die Reihe

$$\sum \langle f, \varphi_k \rangle_r \cdot \varphi_k$$

im quadratischen Mittel gegen f , d.h.

$$\left| f - \sum_{k=0}^n \langle f, \varphi_k \rangle_r \cdot \varphi_k \right| \rightarrow 0,$$

wobei $|g|^2 = \langle g, g \rangle_r$.

Dafür sagt man auch:

Die Eigenfunktionen bilden ein vollständiges System für die quadratisch integrierbaren Funktionen. Hat man stärkere Voraussetzungen über die Funktion f , so bekommt man etwa

Satz DG.64 Ist f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und erfüllt es die homogenen Randbedingungen, so ist die Reihe

$$\sum \langle f, \varphi_k \rangle_r \cdot \varphi_k(x)$$

auf $[a, b]$ absolut gleichmäßig konvergent und die Grenzfunktion ist f .

GREENSche Funktionen

Wir behandeln noch kurz die sogenannte GREENSche Funktion, die

- von praktischem Interesse ist, weil sie die geschlossene Darstellung der Lösung von Randwertaufgaben erlaubt;
- von theoretischem Interesse ist, weil mit ihrer Hilfe der Zugang zum Beweis der zuletzt notierten Sätze über Eigenwerte und Eigenfunktionen von STURM-LIOUVILLESchen Eigenwertaufgaben gegeben wird;
- weil das gleiche Grundkonzept auch für Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen taugt.

Zunächst eine Vorüberlegung zur Motivation:

Wir betrachten auf dem kompakten Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ den Differentialoperator 1-ter Ordnung, gegeben durch

$$(L_1 y)(x) := y'(x).$$

Zu einer auf I stetigen Funktion f sind die Lösungen y von $(L_1y)(x) := f(x)$ offenbar genau die Stammfunktionen von f und eine solche bekommt man über

$$y(x) := \int_a^x f(\xi)d\xi = \int_a^b \chi(x, \xi)f(\xi)d\xi,$$

wobei die Funktion χ erklärt ist durch

$$\chi : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; \quad \chi(x, \xi) = \begin{cases} 1 & a \leq \xi \leq x \leq b \\ 0 & a \leq x < \xi \leq b. \end{cases}$$

Die Zuordnung $f \mapsto y$ geschieht also durch einen “Integraloperator” mit der “Kernfunktion” χ und dieser hat hier auf der “Diagonalen” $x = \xi$ eine Unstetigkeit.

Analoges geht nun für unsere linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Wir betrachten auf einem kompakten Intervall $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ den Differentialoperator

$$(Ly)(x) := a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y,$$

wobei die Koeffizienten stetig und $a_2 \neq 0$ auf I .

Definition DG.65 Eine auf $I \times I$ stetige Funktion $G(x, \xi)$ heißt GREENSche Funktion zu L , wenn sie

- wenigstens für $x \neq \xi$ zweimal nach x differenzierbar ist,
- die Ableitungen G_x, G_{xx} für $x \neq \xi$ stetig sind und
- für jede auf I stetige Funktion f die Funktion

$$y(x) := \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi$$

Lösung von $(Ly)(x) = f(x)$ auf ganz I ist.

Den durch

$$f \mapsto y$$

gegebenen Operator nennt man den GREENSchen Integraloperator.

Wir werden sehen, daß die etwas vorsichtige Formulierung der Differenzierbarkeits- und Stetigkeitseigenschaften einer GREENSchen Funktion aus der Natur der Sache selbst kommen. Schön glatte GREENSche Funktionen gibt es nicht!

Die Existenz solcher GREENScher Funktionen ergibt sich aus dem Prinzip der Variation der Konstanten:

Sind nämlich $u_1(x), u_2(x)$ zwei unabhängige Lösungen von $(Ly)(x) = 0$, so erhält man eine Lösung der inhomogenen Gleichung $(Ly)(x) = f(x)$ in der Gestalt

$$y(x) = u_1(x)c_1(x) + u_2(x)c_2(x),$$

wobei – via Variation der Konstanten – die c_i von der Form

$$c_i(x) = \int_a^x \gamma_i(\xi)f(\xi)d\xi \tag{1}$$

mit geeigneten stetigen Funktionen γ_i sind. Dann ist eben für

$$G_1(x, \xi) := \begin{cases} G_1^l(x, \xi) := 0 & x < \xi \\ G_1^r(x, \xi) := u_1(x)\gamma_1(\xi) + u_2(x)\gamma_2(\xi) & x \geq \xi \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi &= \int_a^x (u_1(x)\gamma_1(\xi) + u_2(x)\gamma_2(\xi)) f(\xi) d\xi \\ &= u_1(x)c_1(x) + u_2(x)c_2(x) = y(x) \end{aligned}$$

die oben notierte Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die GREENSche Funktion ist nicht eindeutig bestimmt; denn sind $\delta_1(\xi), \delta_2(\xi)$ stetig und sonst beliebig und setzen wir $d(x, \xi) := u_1(x)\delta_1(\xi) + u_2(x)\delta_2(\xi)$, so ist

$$\begin{aligned} \int_a^b (G_1(x, \xi) + d(x, \xi)) f(\xi) d\xi &= \int_a^b G_1(x, \xi) f(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^2 u_i(x) \int_a^b \delta_i(\xi) f(\xi) d\xi \\ &= y(x) + \alpha_1 u_1(x) + \alpha_2 u_2(x) \end{aligned}$$

ebenfalls Lösung der inhomogenen Gleichung. Somit ist auch

$$G(x, \xi) := G_1(x, \xi) + d(x, \xi)$$

eine GREENSche Funktion.

Satz DG.66

1. Eine GREENSche Funktion G zum Differentialoperator L hat folgende Eigenschaften:

(a) In jedem der beiden Dreiecke

$$\begin{aligned} D^\ell &:= \{(x, \xi) \in I \times I \mid x \leq \xi\} \quad \text{und} \\ D^r &:= \{(x, \xi) \in I \times I \mid x \geq \xi\} \end{aligned}$$

ist $G(x, \xi)$ zweimal nach x differenzierbar und G, G_x, G_{xx} sind stetig in x und ξ .

(b) Für festes ξ und $x \neq \xi$ ist

$$u_\xi(x) := G(x, \xi)$$

Lösung von $Lu = 0$.

(c) G ist stetig mit "Knick" auf der Diagonalen, d.h. es ist

$$\begin{aligned} G^r(x, \xi)|_{x=\xi} - G^\ell(x, \xi)|_{x=\xi} &= 0 \\ \partial_x G^r(x, \xi)|_{x=\xi} - \partial_x G^\ell(x, \xi)|_{x=\xi} &= \frac{1}{a_2(x)} \end{aligned}$$

Dabei sind $G^r := G|_{D^r}, G^\ell := G|_{D^\ell}$ und a_2 der Hauptkoeffizient von L .

2. Jede Funktion G , die diese drei Bedingungen erfüllt, ist eine GREENSche Funktion zu L .

3. Mit der eingangs konstruierten GREENSchen Funktion $G_1(x, \xi)$ ist die Funktion $G(x, \xi) := G_1(x, \xi) + d(x, \xi)$ genau dann eine GREENSche Funktion, wenn gelten

- die Funktion d ist auf $I \times I$ zweimal differenzierbar bezüglich x , die Ableitungen sind stetig in x und ξ ;
- es ist $(L_{(x)}d)(x, \xi) = 0$ für jedes ξ , d.h. d ist bezüglich x Lösung der homogenen Differentialgleichung.

Beweis: 1.: Zunächst betrachten wir nur die oben definierte GREENSche Funktion G_1 : Für sie sind (a) und (b) trivial, (c) folgt aus den Formeln der Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} u_1(x)c_1'(x) + u_2(x)c_2'(x) &= 0 \\ u_1'(x)c_1'(x) + u_2'(x)c_2'(x) &= \frac{1}{a_2(x)}f(x), \end{aligned}$$

wenn man (1) differenziert und in die Formeln über G_1 einsetzt.

2.: Ist nun G eine Funktion, die diese drei Bedingungen erfüllt, so ist jedenfalls

$$y(x) := \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi = \int_a^x G(x, \xi)f(\xi)d\xi + \int_x^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi$$

und jedes der beiden rechts stehenden Integrale ist zweimal stetig differenzierbar (nach x) und über die Regel

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(x, \xi)d\xi = \varphi(x, v(x))v'(x) - \varphi(x, u(x))u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \varphi_x(x, \xi)d\xi$$

erhält man

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int_a^x G_x^r(x, \xi)f(\xi)d\xi + \int_x^b G_x^\ell(x, \xi)f(\xi)d\xi \\ y''(x) &= [G_x^r(x, x) - G_x^\ell(x, x)]f(x) + \int_a^x G_{xx}^r(x, \xi)f(\xi)d\xi + \int_x^b G_{xx}^\ell(x, \xi)f(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (Ly)(x) &= \int_a^x (L_{(x)}G^r)(x, \xi)f(\xi)d\xi + \int_x^b (L_{(x)}G^\ell)(x, \xi)f(\xi)d\xi \\ &\quad + a_2(x)[G_x^r(x, x) - G_x^\ell(x, x)]f(x) = f(x) \end{aligned}$$

nach (b) und (c). (Es bedeutet wieder $L_{(x)}$, daß L bezüglich der Differentiation nach der x -Variablen verwendet wird.)

3.: G_1 erfüllt die Bedingungen von 1. Hat d die genannten Eigenschaften, so erfüllt auch G diese Bedingungen und ist damit GREENSche Funktion.

Sei nun G eine beliebige GREENSche Funktion und $d := G - G_1$. Dann sind für jede stetige Funktion f

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi)d\xi \quad \text{und} \quad y_1(x) = \int_a^b G_1(x, \xi)f(\xi)d\xi$$

Lösungen von $(Lu)(x) = f(x)$, somit ihre Differenz eine Lösung der homogenen Gleichung, sodaß

$$L_{(x)} \left(\int_a^b (G(x, \xi) - G_1(x, \xi))f(\xi)d\xi \right) = L_{(x)} \left(\int_a^b d(x, \xi)f(\xi)d\xi \right) = 0.$$

Wir übergehen den Nachweis, daß d die genannten Differenzierbarkeitseigenschaften hat. Setzen wir dies voraus, so können wir den Differentialoperator $L_{(x)}$ unter das Integral ziehen und bekommen für jedes f

$$0 = \int_a^b (L_{(x)}d)(x, \xi)f(\xi)d\xi,$$

was nur möglich ist, wenn für jedes ξ stets $(L_{(x)}d)(x, \xi) = 0$ ist.

Über die so erhaltene Darstellung $G = G_1 + d$, wobei d die in 3. genannten Eigenschaften hat, folgt dann, daß auch G selbst die Bedingungen von 1. erfüllt. \square

Insbesondere haben wir als

Folgerung DG.67 *Mit der zunächst konstruierten GREENSchen Funktion G_1 , unabhängigen Lösungen u_1, u_2 von $Lu = 0$ und beliebigen stetigen Funktionen η_1, η_2 hat jede GREENSche Funktion die Gestalt*

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + u_1(x)\eta_1(\xi) + u_2(x)\eta_2(\xi).$$

Den hiernach bei der Gestaltung einer GREENSchen Funktion vorhandenen Freiraum können wir nutzen, um sogar noch Randbedingungen zu berücksichtigen. Zunächst

Lemma DG.68 *Sind*

$$\begin{aligned} R_a(y) &= \alpha y(a) + \alpha' y'(a) \\ R_b(y) &= \beta y(b) + \beta' y'(b) \end{aligned}$$

die schon oben betrachteten Randoperatoren und ist für eine GREENSche Funktion G für jedes ξ

$$R_a(G^\ell(\cdot, \xi)) = 0 \quad \text{und} \quad R_b(G^r(\cdot, \xi)) = 0,$$

so erfüllt

$$y(x) := \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

die homogenen Randbedingungen

$$R_a(y) = R_b(y) = 0.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} y(a) &= \int_a^b G(a, \xi) f(\xi) d\xi = \int_a^b G^\ell(a, \xi) f(\xi) d\xi, \\ y'(a) &= \frac{d}{dx} \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \Big|_{x=a} = \int_a^b G_x(x, \xi) f(\xi) d\xi \Big|_{x=a} = \int_a^b G_x^\ell(a, \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Damit ist

$$R_a(y) = \alpha y(a) + \alpha' y'(a) = \int_a^b R_a \left(G^\ell(\cdot, \xi) \right) f(\xi) d\xi = 0$$

und analog

$$R_b(y) = \beta y(b) + \beta' y'(b) = \int_a^b R_b \left(G^r(\cdot, \xi) \right) f(\xi) d\xi = 0.$$

\square

Diese Voraussetzung, daß G die Randbedingungen erfülle, können wir nun über die vorige Folgerung DG.67 erzwingen, vorausgesetzt die homogene Randwertaufgabe ist eindeutig lösbar.

Satz und Bezeichnung DG.69 *Ist die homogene Randwertaufgabe*

$$Ly = 0, \quad R_a(y) = R_b(y) = 0$$

eindeutig lösbar, so ist die inhomogene Randwertaufgabe

$$Ly = f, \quad R_a(y) = R_b(y) = 0$$

stets eindeutig lösbar und es existiert eine (eindeutig bestimmte) GREENSche Funktion G , die die Lösung liefert. Mit ihr ist dann zu gegebenem f die Funktion

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad \text{die Lösung zu } Ly = f, R_a(y) = R_b(y) = 0.$$

Wir nennen diese GREENSche Funktion die "GREENSche Funktion zu L und den Randoperatoren R_a, R_b ."

Beweis: Mit der schon mehrfach benutzten GREENSchen Funktion G_1 setzen wir nach Folgerung DG.67 an

$$G(x, \xi) = G_1(x, \xi) + u_1(x)\eta_1(\xi) + u_2(x)\eta_2(\xi).$$

Die Forderung, daß G die Randbedingungen erfülle bedeutet, daß für alle Werte von $\xi, a \leq \xi \leq b$ gelte

$$0 \stackrel{!}{=} R_a(G^\ell(\cdot, \xi)) = R_a(G_1^\ell(\cdot, \xi)) + \eta_1(\xi)R_a(u_1) + \eta_2(\xi)R_a(u_2)$$

und

$$0 \stackrel{!}{=} R_b(G^r(\cdot, \xi)) = R_b(G_1^r(\cdot, \xi)) + \eta_1(\xi)R_b(u_1) + \eta_2(\xi)R_b(u_2).$$

Dies ist ein Gleichungssystem für die $\eta_1(\xi), \eta_2(\xi)$ mit der nach Voraussetzung invertierbaren Systemmatrix

$$R(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} R_a(u_1) & R_a(u_2) \\ R_b(u_1) & R_b(u_2) \end{pmatrix},$$

woraus man mit Lemma DG.68 die Existenz der gesuchten GREENSchen Funktion bekommt. Die Eindeutigkeitsaussage sei übergangen. \square

Wählen wir nun in der eben beschriebenen Situation die Lösungen u_1, u_2 so, daß sie je eine Randbedingung erfüllen, so ergibt sich eine einfache Darstellung für die zugehörige GREENSche Funktion.

Satz DG.70 *Die homogene Randwertaufgabe*

$$Ly = 0, \quad R_a(y) = R_b(y) = 0$$

sei eindeutig lösbar, ferner seien u_1, u_2 nichttriviale Lösungen von $Ly = 0$ mit

$$R_a(u_1) = 0, \quad \text{und} \quad R_b(u_2) = 0.$$

Dann sind u_1, u_2 linear unabhängig,

$$N(x) := \det \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

und

$$G(x, \xi) := \begin{cases} G^\ell(x, \xi) := \frac{u_1(x)u_2(\xi)}{a_2(\xi)N(\xi)} & x \leq \xi \\ G^r(x, \xi) := \frac{u_1(\xi)u_2(x)}{a_2(\xi)N(\xi)} & \xi \leq x \end{cases}$$

ist die GREENSche Funktion zu L, R_a, R_b .

Beweis: Wären die nichttrivialen Lösungen u_1, u_2 abhängig, so wäre mit einer Konstanten $c \neq 0$ dann $u_1(x) = c \cdot u_2(x)$ und u_1 würde dann auch noch die Randbedingung bei b erfüllen, wäre also doch die triviale Lösung.

Wir zeigen nun, daß G die Bedingungen von Satz DG.66,1 erfüllt, und somit GREENSche Funktion ist.

- (a) G^ℓ und G^r sind jeweils zweimal stetig differenzierbar.
- (b) Für $x \neq \xi$ ist $u_\xi(x) := G(x, \xi)$ Lösung von $Lu = 0$.
- (c) $\left. \partial_x G^r(x, \xi) \right|_{x=\xi} - \left. \partial_x G^\ell(x, \xi) \right|_{x=\xi} = \frac{u_2'(x)u_1(x) - u_1'(x)u_2(x)}{a_2(x)N(x)} = \frac{1}{a_2(x)}$.

Nach Satz DG.66,2 ist damit G selbst eine GREENSche Funktion.

Die Voraussetzung $R_a(u_1) = 0$, $R_b(u_2) = 0$ sichern, daß man auf G Lemma DG.68 anwenden kann, was alles beweist. \square

Beispiel DG.71

$$Ly := y'', [a, b] := [0, \pi], R_a(y) := y(0), R_b(y) := y(\pi).$$

Das in Satz DG.70 benötigte Fundamentalsystem ist

$$u_1(x) = x, u_2(x) = x - \pi.$$

Damit ist

$$N(x) = \det \begin{vmatrix} x & x - \pi \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x - (x - \pi) = \pi,$$

ferner ist $a_2(x) = 1$ und somit

$$G(x, \xi) = \begin{cases} G^\ell(x, \xi) = \frac{x(\xi - \pi)}{\pi} & x \leq \xi \\ G^r(x, \xi) = \frac{\xi(x - \pi)}{\pi} & x \geq \xi \end{cases}$$

Für $f(x) = \sin x$ erhalten wir dann als Lösung y zu $Ly = f$, $R_a(y) = R_b(y) = 0$:

$$\begin{aligned} \pi y(x) &= \pi \int_0^\pi G(x, \xi) \sin \xi d\xi \\ &= \pi \int_0^x G^r(x, \xi) \sin \xi d\xi + \pi \int_x^\pi G^\ell(x, \xi) \sin \xi d\xi \\ &= \int_0^x (x - \pi) \xi \sin \xi d\xi + \int_x^\pi x(\xi - \pi) \sin \xi d\xi \\ &= (x - \pi) \int_0^x \xi \sin \xi d\xi + x \left[\int_x^\pi \xi \sin \xi d\xi - \pi \int_x^\pi \sin \xi d\xi \right] \\ &= x \int_0^\pi \xi \sin \xi d\xi - \pi \int_0^x \xi \sin \xi d\xi - \pi x \int_x^\pi \sin \xi d\xi \end{aligned}$$

Wegen $\int^t \xi \sin \xi d\xi = -t \cos t + \sin t$ ist also

$$\begin{aligned} \pi y(x) &= x \left[-t \cos t + \sin t \right]_0^\pi - \pi \left[-t \cos t + \sin t \right]_0^x + \pi x \cos t \Big|_x^\pi \\ &= x\pi - \pi(-x \cos x + \sin x) + \pi x(-1 - \cos x) \\ &= -\pi \sin x. \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung ist somit

$$y(x) = -\sin x.$$

□

Hier ist die GREENSche Funktion G symmetrisch, d.h. $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Dies gilt nun für jeden selbstadjungierten Differentialoperator L :

Satz DG.72 *Ist der Differentialoperator L formal selbstadjungiert, so ist die GREENSche Funktion G zu L und den Randoperatoren R_a, R_b symmetrisch, d.h. für alle x, ξ gilt $G(x, \xi) = G(\xi, x)$.*

Beweis: Nach Satz DG.53 gilt für selbstadjungierte Operatoren L und alle die Randbedingungen erfüllenden C^2 -Funktionen u, v :

$$\langle Lu, v \rangle = \langle u, Lv \rangle.$$

Für beliebige stetige Funktionen f, g erfüllen die Funktionen

$$u(x) := \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

und

$$v(x) := \int_a^b G(x, \xi) g(\xi) d\xi$$

beide die Randbedingungen. Damit ist, da ja $Lu = f, Lv = g$:

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \int_a^b f(x) v(x) dx = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) f(x) g(\xi) d\xi dx \\ \langle u, Lv \rangle &= \int_a^b u(\xi) g(\xi) d\xi = \int_a^b \int_a^b G(\xi, x) f(x) g(\xi) d\xi dx \end{aligned}$$

Da beide übereinstimmen ist somit für alle stetigen f und g

$$\int_a^b \int_a^b [G(x, \xi) - G(\xi, x)] f(x) g(\xi) d\xi dx = 0,$$

woraus sofort für alle x und ξ

$$G(x, \xi) = G(\xi, x)$$

folgt. □

Finis