F Funktionen

Wir betrachten Funktionen, die entweder auf einem Teil D der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ definiert sind und komplexe Werte haben, oder auf einem Teil D der reellen Geraden $\mathbb{R}$ definiert sind mit Werten im Komplexen oder hier dann meist im Reellen.
Im ersten Fall sei der Definitionsbereich D entweder ganz $\mathbb{C}$ oder eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$, jeweils evtl. mit Ausnahme endlich vieler Punkte.
Im zweiten Fall sei der Definitionsbereich D ein Intervall, wobei die Grenzen $\pm\infty$ zugelassen sind, wieder evtl. mit Ausnahme endlich vieler Punkte.

Bezeichnung F.1 *Die Menge aller auf D erklärten Funktionen bezeichnen wir mit $F(D)$. Ist D ein Intervall, etwa $D = [a, b]$, so schreiben wir kurz $F[a, b]$ statt $F([a, b])$, etc.*
Wir erklären auf $F(D)$ Operationen durch

$$\begin{aligned} f + g : x &\mapsto f(x) + g(x) \quad \text{“Addition von Funktionen”} \\ \lambda f : x &\mapsto \lambda f(x), \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ oder } \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{“Multiplikation mit Zahl”} \\ f \cdot g : x &\mapsto f(x) \cdot g(x) \quad \text{“Multiplikation von Funktionen”} \end{aligned}$$

Für die ersten beiden Operationen weist man leicht die Vektorraum-Axiome nach, d.h. wir bekommen

Satz F.2 *Die Menge $F(D)$ aller auf D erklärten Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. in $\mathbb{C}$ ist ein reeller bzw. komplexer Vektorraum.*

Schließlich kann man zusammenpassende Funktionen hintereinander ausführen:

Bezeichnung F.3 *Zu zwei Funktionen $f : D \to D'$ und $g : D' \to D''$ erklären wir die “Komposition” oder das “Hintereinanderausführen” durch*

$$g \circ f : D \to D'' \text{ durch } x \mapsto g(f(x)).$$

Bezeichnung F.4 *Wir nennen eine Funktion $f \in F(D)$ “beschränkt”, wenn es eine Konstante C gibt, sodaß gilt*

$$\forall_{x \in D} \; |f(x)| < C.$$

Ist f beschränkt, so existiert offenbar

$$|f|_\infty := \sup\{|f(x)| \text{ für } x \in D.\}$$

Man nennt dies die “Supremum-Norm” von f.

Dafür gilt

Satz F.5 *Die Teilmenge $B(D) \subset F(D)$ aller auf D beschränkten Funktionen bildet einen Untervektorraum von $F(D)$, auf dem durch $|.|_\infty$ eine Norm (im Sinne von Definition V.38 und Satz V.36) erklärt ist.*

Beweis: Sind f und g in $B(D)$ so haben wir für jede Stelle $x \in D$ jedenfalls $|f(x)| \leq |f|_\infty, |g(x)| \leq |g|_\infty$ und damit nach der Dreiecksungleichung für den Betrag von Zahlen auch

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq |f|_\infty + |g|_\infty.$$

Mit zwei Funktionen ist also auch deren Summe beschränkt. Analog schließt man für Vielfache einer Funktion, womit dann die Vektorraumeigenschaft von $B(D)$ gezeigt ist. Der Nachweis der Normaxiome ist eine schöne Übung im Umgang mit dem Supremum. $\square$

Grenzwerte

Definition F.6 (Häufungspunkt) *Ein Punkt x heißt "Häufungspunkt" einer Menge D, wenn es eine Folge (x_n) in D gibt, die gegen x konvergiert, deren Glieder aber alle von x verschieden sind.*

Bei den hier als Definitionsbereiche betrachteten Mengen D sind die Häufungspunkte offenbar gerade die Punkte von D selbst und zusätzlich die "Randpunkte".

Definition F.7 (Grenzwert einer Funktion) *Die Funktion f sei auf D erklärt, x_0 sei ein Häufungspunkt von D. (Der Punkt x_0 braucht also nicht notwendig zum Definitionsbereich zu gehören, ob f auch auf x_0 erklärt ist, ist hier uninteressant.)*
Wir sagen:
" f hat an der Stelle x_0 den Grenzwert w", geschrieben als

$$\lim_{D \ni x \to x_0} f(x) = w,$$

wenn für jede gegen x_0 konvergente Folge $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ gilt, daß

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = w.$$

Ist speziell D ein Intervall, $D = [a, b]$ oder auch $= (a, b]$ etc., so spricht man für $x_0 = a$ von dem rechtsseitigen Grenzwert

$$f(a+) := \lim_{x \to a, x > a} f(x)$$

(man nähert sich von rechts !) bzw. für $x_0 = b$ von dem linksseitigen Grenzwert

$$f(b-) := \lim_{x \to b, x < b} f(x)$$

(man nähert sich von links !)

Beispiel F.8 *Auf $D := \mathbb{R}$ betrachten wir die Funktion h, definiert durch*

$$h(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases} .$$

Sie hat für $x_0 \neq 0$ stets den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} h(x)$, dagegen ist bei $x_0 = 0$

$$h(0+) = +1, \ h(0-) = -1,$$

sodaß also hier der $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ <u>nicht</u> existiert.

Auf $D = \mathbb{C}$ haben $p(x) := x$ oder etwa $q(x) := x^2$ an jeder Stelle einen Grenzwert. (Welchen?)

Das in der Definition gegebene Kriterium über die Konvergenz aller Folgen kann man durch das nachstehende äquivalente Kriterium ersetzen:

Satz F.9 (ϵ-δ-Kriterium) *Es ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = w$ genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodaß*

$$|\, f(x) - w \,| < \epsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Beweis: Es sei $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = w$ für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$:
Wäre das ϵ-δ-Kriterium nicht erfüllt, so gäbe es ein $\epsilon_0 > 0$, sodaß dazu für jede natürliche Zahl n ein $x_n \in D$ existierte, mit dem dann zwar $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - w| > \epsilon_0$ wäre. Die so gebildete Folge (x_n) stünde dann im Widerspruch zu unserer Annahme.
f erfülle an der Stelle x_0 das ϵ-δ-Kriterium: Ist $\epsilon > 0$ gegeben, so wähle dazu entsprechend $\delta > 0$, sodaß $|f(x) - w| < \epsilon_0$ wenn nur $0 < |x - x_0| < \delta$. Für eine Folge $x_n \to x_0, \neq x_0$ liegen dann schließlich ab einem n_0 alle Glieder in dem Bereich $|x - x_0| < \delta$, sodaß also dann auch $|f(x_n) - w| < \epsilon_0$ ist, was die Konvergenz der Bildfolge gegen w beweist. □

Als Konsequenz aus dem ϵ-δ-Kriterium erhalten wir

Satz F.10 *Hat f reelle Werte auf D und ist $\lim_{x\to x_0} f(x) = w > 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, mit dem*

$$f(x) > \frac{1}{2} \cdot w > 0 \textit{ für alle } w \in D \textit{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Beweis: Wir wählen $\epsilon := \frac{1}{2} \cdot w$ und dazu $\delta > 0$ so, daß

$$|f(x) - w| < \epsilon \text{ für alle } w \in D \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Für solche x ist dann

$$f(x) = w + (f(x) - w) \geq w - |(f(x) - w)| > w - \frac{1}{2} \cdot w = \frac{1}{2} \cdot w.$$

□

Ist D ein reelles nichtbeschränktes Intervall, also ganz $\mathbb{R}$ oder $D = [a, +\infty)$ bzw. $(-\infty, b]$, so läßt sich fragen, wie sich $f(x)$ verhält, wenn man x gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ laufen läßt. Dies kann man mit den bisherigen Notationen nicht direkt beschreiben. Wir setzen fest

Bezeichnung F.11 (Grenzwerte für $x \to \pm\infty$) *Genau dann ist $\lim_{x\to\infty} f(x) = w$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $R > 0$ gibt, sodaß*

$$|f(x) - w| < \epsilon \textit{ für } x > R.$$

Analog sagt man $\lim_{x\to-\infty} f(x) = w$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $R > 0$ gibt, sodaß

$$|f(x) - w| < \epsilon \textit{ für } x < -R.$$

Überlegen Sie selbst, daß folgendes gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = w \text{ ist äquivalent zu } \lim_{x\to 0+} f(\frac{1}{x}) = w$$

bzw.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = w \text{ ist äquivalent zu } \lim_{x\to 0-} f(\frac{1}{x}) = w.$$

Zum Bestimmen von Grenzwerten helfen folgende Regeln:

Satz F.12 *Das Zeichen* lim *steht in jeder der folgenden Formeln einheitlich für eines der Symbole* $\lim_{x\to x_0}$, $\lim_{x\to\infty}$, $\lim_{x\to-\infty}$.
Existieren $\lim f(x)$ *und* $\lim g(x)$, *so auch*

1. $\lim(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \lim f(x) + \beta \lim g(x)$.
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.
3. $\lim(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$, *sofern* $\lim g(x) \neq 0$.

Beweis: In Satz Z.25 haben wir entsprechendes für Folgen gezeigt. Zusammen mit Satz F.10 ergibt sich dann der Beweis leicht aus der Definition. □

Wir werden später in der Regel von DE L'HOSPITAL ein weiteres Instrument zur Berechnung von Grenzwerten haben.

Stetigkeit

Definition F.13 (Stetigkeit) *Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$ *heißt "stetig an der Stelle* $x_0 \in D$*", wenn* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$*, d.h. wenn also der Grenzwert für die Stelle* x_0 *existiert und mit dem Funktionswert* $f(x_0)$ *übereinstimmt.*
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ *heißt "stetig in* D*", wenn sie an jeder Stelle von* D *stetig ist.*
Die Menge aller auf D *stetigen Funktionen bezeichnen wir mit* $C(D)$*, im Falle, daß* D *ein Intervall ist,* $D = [a, b]$*, schreiben wir dafür kurz* $C[a, b]$ *anstelle des eigentlich korrekten* $C([a, b])$*.*

Nach den vorigen Überlegungen gilt also

Satz F.14 *Äquivalente Bedingungen sind*

1. f *ist stetig an der Stelle* x_0.
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
3. $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ *für jede Folge* $(x_n) \subset D$*, die gegen* x_0 *konvergiert.*
4. ϵ-δ-*Kriterium: Zu jedem* $\epsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$ *so, daß*

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Nun können wir die für Grenzwerte von Funktionen gemachten Aussagen unmittelbar in Aussagen über Stetigkeit übersetzen:
Satz F.10 wird zu

Satz F.15 *Hat* f *reelle Werte auf* D *und ist f stetig an der Stelle* $x_0 \in D$ *und ist ferner* $f(x_0) > 0$*, so gibt es ein* $\delta > 0$*, sodaß*

$$f(x) > \frac{1}{2} \cdot f(x_0) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Der Satz F.12 über das Kombinieren von Grenzwerten wird zu

Satz F.16 *Die folgenden Aussagen beziehen sich sowohl auf die Stetigkeit in einem Punkt als auch auf die Stetigkeit in einem Bereich* D.

1. *Sind* f *und* g *stetig, so auch* $\alpha f + \beta g$ *für alle* α, β *in* $\mathbb{C}$.
2. *Sind* f *und* g *stetig, so auch die Funktion* $f \cdot g$.
3. *Sind* f *und* g *stetig, so ist auch*

$$\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

an jeder Stelle x_0 *stetig, wo* $g(x_0) \neq 0$ *ist.*

4. *Ist f stetig, so auch die Betragsfunktion $|f| : x \mapsto |f(x)|$*

Die letzte Aussage folgt direkt mit der Dreiecksungleichung aus der Definition, die übrigen aus Satz F.12
Insbesondere haben wir miterhalten

Satz F.17 *Die Menge $C(D)$ aller auf D stetigen Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$ bzw. mit Werten in $\mathbb{C}$ ist ein reeller bzw. komplexer Vektorraum.*

Aus Satz F.16 bekommen wir nun eine Fülle von Beispielen für stetige Funktionen.

Satz F.18
1. *Konstante Funktionen $x \mapsto c \in \mathbb{C}$ sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und auf ganz $\mathbb{C}$.*
2. *Die Identität $x \mapsto x$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und auf ganz $\mathbb{C}$.*
3. *Polynomfunktionen $x \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_j sind stetig auf ganz $\mathbb{R}$ und auf ganz $\mathbb{C}$.*
4. *Rationale Funktionen $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen p, q, sind auf ganz $\mathbb{R}$ und auf ganz $\mathbb{C}$ stetig mit Ausnahme der Stellen, an denen das Nennerpolynom eine Nullstelle hat.*
5. *Das Hintereinanderausführen stetiger Funktionen erhält die Stetigkeit, d.h. sind f und g stetige Funktionen, so ist auch die daraus zusammengesetzte Funktion $g \circ f$ stetig.*
6. *Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzkreises stetig.*

Beweis: Den Nachweis der Stetigkeit der konstanten Funktionen und der Identität lassen wir als Übungsaufgabe.
Ein Polynom kann man aus diesen beiden Funktionstypen durch endlich viele Anwendungen der in Satz F.16.1. und 2. behandelten Operationen bekommen. Dabei vererbt sich jedesmal die Stetigkeit.
Satz F.16.3 liefert dann die notierte Stetigkeitsaussage für rationale Funktionen.

Die Stetigkeit der Komposition erhält man so: f ist stetig an der Stelle x_0, somit gilt

$$\forall_{\theta>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,\,|x-x_0|<\delta}\, |f(x) - f(x_0)| < \theta.$$

Entsprechend bedeutet die Stetigkeit von g an der Stelle $f(x_0)$

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\theta>0}\forall_{y,\,|y-f(x_0)|<\theta}\, |g(y) - g(f(x_0))| < \epsilon.$$

Nun wähle ϵ, bestimme dazu θ und zu diesem wieder δ und man erhält für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ zunächst $|f(x) - f(x_0)| < \theta$ und dann für $y := f(x)$ schließlich $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$, was die Stetigkeit zeigt.

Bleibt noch die Stetigkeit von durch Potenzreihen dargestellen Funktionen zu zeigen: $f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ habe den Konvergenzkreis $K(0, r)$. Dann ist $f(0) = a_0$ und

$$f(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j x^j = f(0) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x^{j-1} \right) x.$$

Die in (..) stehende Potenzreihe hat trivialerweise ebenfalls den Konvergenzradius r, ist somit in einer Umgebung von 0 beschränkt, woraus sofort die Stetigkeit von $f(x)$ bei $x = 0$ folgt.

Für beliebige $x_0 \in K(0,r)$ entwickle man um die Stelle x_0. Wir haben also nach Satz Z.52 in einer Umgebung von x_0 eine Darstellung

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

und wie oben schließt man auf die Stetigkeit von f in x_0. □

Einige Hauptsätze über stetige Funktionen

Im folgenden beschränken wir uns auf stetige Funktionen, die auf einem "kompakten", d.h. beschränkten und abgeschlossenen Intervall in $\mathbb{R}$ definiert sind und reelle Werte haben.

Satz F.19 *Jede auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ stetige Funktion ist dort beschränkt.*

Bemerkung *Hier kann man weder auf die Kompaktheit, noch auf die Stetigkeit verzichten, wie etwa das Beispiel*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

zeigt.

Beweis: Wir nehmen an, f sei nicht beschränkt. Dann gibt es also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $|f(x_n)| > n$. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS (Satz Z.32) hat diese Folge (x_n) eine konvegente Teilfolge (x_{n_k}), deren Grenzwert x_0 selbst in $[a,b]$ liegt. Wir haben also $x_{n_k} \to x_0$ und damit wegen der Stetigkeit von f auch $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, sodaß die Folge $f(x_{n_k})$ konvergiert und damit beschränkt ist, was aber nicht zu unserer Annahme paßt, daß stets $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k$ ist. □

Wir können dies noch verfeinern:

Satz vom Maximum F.20 *Eine auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ stetige Funktion mit Werten in $\mathbb{R}$ besitzt auf $[a,b]$ ein Maximum und ein Minimum, d.h. zu $f \in C[a,b]$ gibt es Stellen $x^*, x_* \in [a,b]$ sodaß*

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \text{ für alle } x \in [a,b]$$

ist.

Bemerkung *Auch hier kann man auf keine der Voraussetzungen verzichten. Ist f nicht stetig, so braucht es ja nicht einmal beschränkt zu sein. Die Funktion $f(x) = x$ ist zwar stetig, hat aber auf dem offenen Intervall $(0,1)$ oder auf ganz $\mathbb{R}$ sicher weder Minimum noch Maximum.*

Beweis: Wir zeigen die Existenz des Maximums, für das Minimum arbeite man analog mit $-f$.
Nach Satz F.19 ist f auf $[a,b]$ beschränkt, somit existiert $s := \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Nach Definition ist damit für alle $x \in [a,b]$ stets $f(x) \leq s$. Andrerseits (siehe Satz Z.12) gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a,b]$ mit $s - \frac{1}{n} < f(x_n)\,(\leq s)$. Diese Folge hat nach BOLZANO-WEIERSTRASS eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x^*$, deren Grenzwert wieder in $[a,b]$ liegt. Aus der Stetigkeit von f folgt dann $f(x_{n_k}) \to f(x^*)$ und gleichzeitig gilt ja $s - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq s$, woraus notwendig $f(x^*) = s$ folgt. □

Zieht man hier den Satz F.5 heran, so wird Satz F.17 zu

Satz F.21 *Für ein kompaktes Intervall $[a,b]$ ist der Raum $C[a,b]$ ein normierter Vektorraum, mit der hier auch "Maximum-Norm" genannten "Supremums-Norm"*

$$|f|_\infty := \max\{|f(x)| \text{ für } x \in [a,b]\}.$$

Ein weiterer zentraler Satz über stetige Funktionen ist der

Zwischenwertsatz F.22 *Ist f reellwertig und stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$, so nimmt f auf $[a,b]$ jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. Ist insbesondere $f(a)\cdot f(b) < 0$, so hat f in $[a,b]$ eine Nullstelle.*

Bemerkung *Der Satz ist natürlich insbesondere anwendbar, wenn $[a,b]$ Teil eines größeren Intervalls ist, auf dem f stetig ist.*

Beweis: Wir benutzen wieder das Prinzip der Intervallschachtelung, das wir schon beim Beweis des Satzes von BOLZANO-WEIERSTRASS (Satz Z.32) verwendet haben. Wir behandeln den Fall $f(a) < f(b)$. Andernfalls betrachte man $-f$.
Sei $c: \ f(a) < c < f(b)$ gegeben. Wir setzen $a_0 := a, b_0 := b$. Dann ist für $k = 0$ jedenfalls $f(a_k) < c < f(b_k)$.
Haben wir nun ein solches Intervall $[a_k, b_k]$, wofür $f(a_k) < c < f(b_k)$ gilt, so bestimmen wir zunächst den Mittelpunkt $d_k := \frac{1}{2}(a_k + b_k)$.
Ist $f(d_k) = c$, so haben wir eine Stelle an der f den Wert c annimmt. Andernfalls liegt einer der beiden folgenden Fälle vor:
Ist $f(d_k) > c$, so setze $[a_{k+1}, b_{k+1}] := [a_k, d_k]$.
Ist $f(d_k) < c$, so setze $[a_{k+1}, b_{k+1}] := [d_k, b_k]$.
In beiden Fällen ist dann wieder $f(a_{k+1}) < c < f(b_{k+1})$.
Die so konstruierten Intervalle bilden nun wie beim Beweis von Satz Z.32 eine Intervallschachtelung, die gegen einen Punkt $x^* \in [a,b]$ konvergiert. Da f stetig ist gilt dann auch

$$f(a_k) \to f(x^*), \ f(b_k) \to f(x^*).$$

Nun ist aber stets $f(a_k) < c$, somit $f(x^*) \le c$ und $f(b_k) > c$, somit $f(x^*) \ge c$, woraus notwendig $f(x^*) = c$ folgt. □

Wir nutzen den Zwischenwertsatz zunächst für folgende Aussagen über die Bilder von Intervallen unter stetigen Funktionen.

Satz F.23 *f sei reellwertig und stetig auf dem Intervall I. Dann gelten:*

1. *Die Bildmenge $f(I)$ ist selbst ein Intervall.*
2. *Ist I kompakt, so auch $f(I)$.*

Beweis: Ist f die konstante Funktion c, so ist $f(I) = [c,c]$. Sei also f nicht konstant. Auf einem kompakten Intevall $[a,b] \in I$ nimmt f sein Minimum $m_{[a,b]}$ und sein Maximum $M_{[a,b]}$ an, folglich auch jeden Wert dazwischen. Damit ist

$$f([a,b]) = [m_{[a,b]}, M_{[a,b]}].$$

Ist I selbst kompakt, so können wir $[a,b] = I$ wählen und haben unsere Behauptung gezeigt.
Ist $f(I)$ nicht kompakt, aber beschränkt, mit $s = \sup\{f(x)|x \in I\}$ und $u = \inf\{f(x)|x \in I\}$, so gibt es für jedes $c \in (u,s)$ Werte $\alpha, \beta \in I$ mit

$$u < f(\alpha) < c < f(\beta) < s,$$

sodaß nach dem Zwischenwertsatz auch $c \in f(I)$ ist. Folglich ist dann $f(I)$ das Intervall mit den Randpunkten u und s.
Für unbeschränktes f schließt man analog. □

Aus der Schule bekannt sind das Wurzelziehen als Umkehrung des Potenzierens, der Logarithmus als Umkehrung der Exponentialfunktion. Diesen Prozess können wir nun allgemeiner betrachten. Wir hatten gesagt: Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f ist "injektiv", wenn für $x_1, x_2 \in I$ aus $f(x_1) = f(x_2)$ notwendig $x_1 = x_2$ folgt.

Bezeichnung F.24 *Eine reellwertige, auf einem Intervall I definierte Funktion f heißt "monoton wachsend", wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt.*
Gilt sogar stets $f(x_1) < f(x_2)$ für $x_1 < x_2$, so spricht man von "streng monoton wachsend".
Sinngemäß erklärt man "(streng) monoton fallend".

Satz F.25 *Eine streng monotone Funktion ist injektiv.*

Beweis: Wäre sie nicht injektiv, so gäbe es zwei Stellen $x_1 < x_2$ für die aber $f(x_1) = f(x_2)$ wäre, was mit strenger Monotonie nicht vereinbar ist. □

Satz F.26 (Umkehrfunktion) *Es sei f auf dem Intervall I reellwertig, stetig und injektiv. Dann ist f auf I streng monoton, $J := f(I)$ ein Intervall und es gibt eine Funktion $g : J \to I$, für die $g(f(x)) = x$ für alle $x \in I$ gilt. Sie ist ebenfalls stetig. Man nennt g die "Umkehrfunktion" und bezeichnet sie mit f^{-1}.*

Beweis: (a) *Monotonie:* Es seien $x_1 < x_2 < x_3$ in I gegeben: Dann ist entweder $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ oder $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Denn wäre etwa $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$, so könnten wir ein $c \in (f(x_3), f(x_2))$ wählen und fänden nach dem Zwischenwertsatz (f ist stetig!) Stellen $x' \in (x_1, x_2)$, $x'' \in (x_2, x_3)$ mit $f(x') = f(x'') = c$, was der Injektivität widerspräche.
Analog behandelt man die anderen Fälle.
Wir wählen nun in I Zahlen $a < b$ mit $f(a) < f(b)$. (Notfalls muß man zu $-f$ übergehen!) Damit zeigen wir nun, daß stets $f(x) < f(y)$ gilt, sofern $x < y$ ist:
Ist $x < a$, so ist $x < a < b$, wegen $f(a) < f(b)$ nach obigem Schluß dann also sogar $f(x) < f(a) < f(b)$. Diese Ungleichung nutzen wir zusammen mit obiger Schlußweise nun weiter:
Für $x < y < a$ folgt mit $f(x) < f(a)$ dann $f(x) < f(y) < f(a)$,
für $y = a$ ist $f(x) < f(y) = f(a)$ und
für $y > a$ folgt $f(x) < f(a) < f(y)$, also in allen Fällen $f(x) < f(y)$.
Analog argumentiert man wenn $x \geq a$ ist.

(b) *Zur Umkehrfunktion:* Aus dem vorigen Satz wissen wir, daß $J := f(I)$ selbst ein (evtl. uneigentliches) Intervall ist. Somit gibt es für jedes $y \in J$ ein $x \in I$ mit $f(x) = y$ und wegen der Injektivität von f auch nur genau eines. Damit ist durch die Zuordnugsvorschrift: $f^{-1} : y \mapsto x$ mit $f(x) = y$ eine Funktion $f^{-1} : J \to I$ erkärt. Mit f ist trivialerweise auch f^{-1} streng monoton (warum?).
Wir zeigen nun die Stetigkeit von f^{-1} : Dazu können wir wieder annehmen, daß f (streng) monoton wachsend ist. Sei $y_0 = f(x_0) \in J$ und dabei sei zunächst x_0 kein Randpunkt von J. Dann ist für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ das Intervall $[x_0-\epsilon, x_0+\epsilon] \subset I$. Sei $y_1 := f(x_0-\epsilon)$, $y_2 := f(x_0+\epsilon)$ und $\delta \leq \min\{|y_1-y_0|, |y_2-y_0|\}$. Dann folgt aus $|y - y_0| < \delta$, die Ungleichung

$$y_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq y_2$$

und über die Monotonie von f daraus

$$x_0 - \epsilon = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_0 + \epsilon,$$

also mit $x_0 = f^{-1}(y_0)$ schließlich

$$|\, f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\,| < \epsilon,$$

was die Stetigkeit zeigt.
Für Randpunkte von I argumentiert man analog. $\square$

Elementare Funktionen

Aus den bisherigen Überlegungen (Beispiel Z.46 und Satz F.18) wissen wir:

Satz F.27 *Durch die Vorschrift*

$$\mathbb{C} \ni x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist auf ganz $\mathbb{C}$ eine stetige Funktion erklärt, die "Exponentialfunktion".
$e := \exp(1) = 2,7182818...$ *heißt die* EULER*sche Zahl.*

Wesentliche Eigenschaften dieser Exponentialfunktion enthält

Satz F.28
1. $\exp(0) = 1$.
2. *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ ist $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.*
3. *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ ist $\exp(x) \neq 0$ und $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$.*
4. $\frac{\exp(x)-1}{x} \to 1$ *für* $\mathbb{C} \ni x \to 0$.

Die weiteren Aussagen betreffen die Exponentialfunktion nur noch für reelle Argumente.

5. *Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) \in \mathbb{R}$ und stets > 0.*
6. *Für $x < 0$ ist $0 < \exp(x) < 1$, für $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$.*
   $\exp(x)$ ist streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, $\exp(x) \geq 1 + x$ und
   $\exp(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$, $\exp(x) \to 0$ $(x \to -\infty)$.
7. *Für $x \in \mathbb{R}$, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $(m, n \in \mathbb{N})$ ist*

$$\exp(xq) = (\exp(x))^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(\exp(x))^m}.$$

Beweis:

1. liest man aus der Reihe ab.
2. haben wir in Satz Z.54 gezeigt.
3. Für alle $x \in \mathbb{C}$ ist

$$1 = \exp(0) = \exp(x-x) = \exp(x)\exp(-x),$$

   woraus sofort beide Behauptungen folgen.

4. Aus der Reihendarstellung ergibt sich für beliebige $x \in \mathbb{C}$

$$\frac{\exp(x)-1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

   Diese Reihe hat die Exponentialreihe zu $|x|$ selbst als Majorante und ist damit überall (absolut) konvergent. Folglich stellt sie eine auf ganz $\mathbb{C}$ stetige Funktion dar, deren Wert bei $x = 0$ gerade $\frac{1}{1!} = 1$ ist.

5. Die Exponentialreihe hat reelle Koeffizienten, somit für reelle x auch reelle Werte. Es ist $\exp(0) = 1 > 0$. Gäbe es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) \leq 0$, so hätte nach dem Zwischenwertsatz die Exponentialfunktion eine Nullstelle, im Widerspruch zu 3.

6. Daß $\exp(x) > 1$ für $x > 0$ ist, liest man aus der Reihe ab, für $x < 0$ verwende man dies und 3.

   Die Monotonie folgt aus
   $$e^{x+y} = e^x \cdot e^y > e^x, \text{ da } e^y > 1, \text{ wenn } y > 0.$$
   Die Ungleichung $\exp(x) \geq 1 + x$ für $x \geq 0$ liest man aus der Reihe ab, für $x \leq -1$ ist sie wegen 5. trivial.

   Für $-1 < x < 0$ zerlegt man $\exp(x) - (1 + x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, wobei rechts eine Reihe mit alternierenden Gliedern von monoton abnehmendem Betrag steht, sodaß $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{|x|^2}{2!} - \frac{|x|^3}{3!} > 0$.

   Die Asymptotik für $x \to +\infty$ folgt direkt mit dieser Ungleichung, die für $x \to -\infty$ daraus mit 3.

7. Es ist unter mehrfacher Anwendung der Funktionalgleichung 2.
   $$(\exp(x \cdot q))^n = \exp(x \cdot q \cdot n) = \exp(x \cdot m) = (\exp(x))^m.$$

□

Nehmen wir die letzte Formel für $x = 1$, so folgt wegen $\exp(1) = e$ für $q \in \mathbb{Q}$
$$\exp(q) = \exp(1 \cdot q) = (\exp(1))^q = e^q,$$
wobei es sich hier um das gewöhnliche Potenzieren durch wiederholtes Multiplizieren und Wurzelziehen handelt. Wir nehmen diese Beziehung zum Anlaß, die Schreibweise e^x auf beliebige $x \in \mathbb{C}$ auszudehnen über folgende

Definition F.29

1. *Für $x \in \mathbb{C}$ bezeichne*
   $$e^x := \exp(x),$$
2. *für $x, y \in \mathbb{R}$ (nur reell!!) bezeichne*
   $$(e^x)^y := \exp(x \cdot y).$$

Warnung! *Das unvorsichtige Ausdehnen der zweiten Formel auf komplexe x, y führt zu schlimmen Fehlern!*

Wegen der obigen Formel 7. entsteht hier für $y, x \in \mathbb{Q}$ kein Problem einer doppelten Bedeutung. Daß diese Festsetzung mit den im Vorkapitel getroffenen Bezeichnungen zur e-Funktion zusammenpaßt, wird sich aus dem Folgenden ergeben.

Die "reelle Exponentialfunktion" $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}^+ := \{y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ ist nach Satz F.28 streng monoton mit ganz $\mathbb{R}^+$ als Wertebereich. Damit besitzt sie eine auf $\mathbb{R}^+$ erklärte Umkehrfunktion.

Definition F.30 (Logarithmus und allgemeine Potenz)

1. *Die Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion*
   $$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \ln y := x \text{ mit } e^x = y$$
   heißt "logarithmus naturalis" oder "Logarithmus zu Basis e ".

2. *Für $a > 0, \neq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ erklären wir im Einklang mit Definition F.29*

$$a^x := e^{x \cdot \ln a}$$

und nennen dies die "allgemeine Potenz zur Basis a ".

3. *Die allgemeine Potenz ist streng monoton, ihre Umkehrfunktion*

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \log_a y := x \text{ mit } a^x = y$$

heißt "Logarithmus zur Basis a ".

Neben dem natürlichen Logarithmus sind der Logarithmus zur Basis 10 und vor allem im Zusammenhang mit Computer-Darstellungen der zur Basis 2 von Bedeutung. Aus den gezeigten Sätzen und Eigenschaften folgt problemlos

Satz F.31 *Logarithmus und allgemeine Potenz sind wohldefiniert und auf dem Definitionsbereich stetig. Für $a, b, x, y \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R}$ gelten*

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$,
2. $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x)$,
3. $\log_a(x) = \frac{1}{\log_b(a)} \log_b(x)$.

Beweis als Übung.

Im Vorkapitel hatten wir einen Bezug zwischen komplexer Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen sin und cos hergestellt. Das sei nun auf etwas allgemeinerer Ebene neu begründet, wodurch wir zudem zu einer neuen Darstellung für die trigonometrischen Funktionen kommen werden.
Dazu betrachten wir zunächst die Exponentialfunktion für komplexe Argumente $z = x + iy \in \mathbb{C}$, wobei also $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ Real- und Imaginärteil sind. Wir haben dann also nach Definition F.29

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Für $z := x + iy$ war $\overline{z} := x - iy$ die konjugiert komplexe Zahl und über Satz O.40 und Satz Z.25 ergibt sich

Satz F.32 *Es ist stets*

$$e^{(\overline{z})} = \overline{(e^z)}.$$

Setzt man also in die Exponentialfunktion das konjugiert komplexe Argument ein, so erhält man den konjugiert komplexen Wert.

Die Funktionalgleichung der e-Funktion angewendet auf $z = x + iy$ liefert

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy},$$

sodaß es genügt die e-Funktion für rein imaginäre Argumente weiter zu betrachten, wobei wir jedoch wieder x statt y schreiben wollen.

Satz F.33 *Für $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$\left|e^{ix}\right| = 1,$$

d.h. alle diese Zahlen e^{ix} mit reellem x liegen auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$.

Beweis: Es ist

$$\overline{(e^{ix})} = e^{\overline{(ix)}} = e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}},$$

somit $e^{ix}\overline{(e^{ix})} = 1$. □

Die Zahl π ist erklärt als die Hälfte des Umfanges des Einheitskreises, dessen Umfang demnach 2π ist.

Satz F.34 *Für $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x < 2\pi$ ist die Länge des Einheitskreis-Bogens zwischen 1 und e^{ix} gerade x, d.h. x ist der im Bogenmaß gemessene Winkel zwischen der positiv reellen Achse und dem Ortsvektor nach e^{ix}.*

Beweis: Wir schreiben dem Bogen von 1 nach e^{ix} ein regelmäßiges Sehnen-Polygon mit n Teilsehnen ein. Dessen Länge ist dann

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k=1}^{n} \left| e^{i\frac{x}{n}k} - e^{i\frac{x}{n}(k-1)} \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| e^{i\frac{x}{n}(k-1)} \right| \cdot \left| e^{i\frac{x}{n}} - 1 \right| \\ &= n \cdot \left| e^{i\frac{x}{n}} - 1 \right| = x \cdot \left| \frac{e^{i\frac{x}{n}} - 1}{i\frac{x}{n}} \right| \to x \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

nach Satz F.28.4. □

Vereinbarung F.35 *Im Zusammenhang mit den trigonomertrischen Funktionen* sin, cos, *etc. messen wir Winkel immer im Bogenmaß, d.h. durch die Länge des von dem Winkel auf dem Einheitskreis ausgeschnittenen Bogens.*

Dann ist aber nach den Regeln der Trigonometrie für $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \cos x &= \mathrm{Re}(e^{ix}), \\ \sin x &= \mathrm{Im}(e^{ix}). \end{aligned}$$

Damit haben wir also

Satz F.36 *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und – wie wir gleich sehen werden – auch für alle $x \in \mathbb{C}$ gelten*

1. $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),\ \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$,
2. $\cos(-x) = \cos x,\ \sin(-x) = -\sin x$,
3. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

folgt über die absolute Konvergenz der Exponentialreihe in ganz $\mathbb{C}$ und das Majorantenkriterium die folgende Aussage:

Satz und Definition F.37 *Für $x \in \mathbb{R}$ ist*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$
$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

und beide Reihen sind sogar auf ganz $\mathbb{C}$ (absolut) konvergent.
Wir nutzen dies, um durch diese Reihen die Funktionen sin *und* cos *auf ganz $\mathbb{C}$ zu erklären.*
Es gilt dann sogar für alle $x \in \mathbb{C}$ die Darstellung

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Die Formeln Satz F.36 gelten auch im Komplexen.

Wir können damit jetzt sin und cos als auf ganz $\mathbb{C}$ definierte Funktionen ansehen. Insbesondere folgt

Satz F.38 *Die Funktionen* sin *und* cos *sind auf ganz $\mathbb{C}$ und damit erst recht auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktionen.*

Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir damit folgende Rechenregeln:

Satz F.39 *Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gelten*

1. $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
2. $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$,
3. $\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos(\frac{x+y}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})$,
4. $\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin(\frac{x+y}{2}) \cdot \sin(\frac{x-y}{2})$,
5. $1 - \cos x = 2 \cdot \sin^2(\frac{x}{2})$,
6. $1 + \cos x = 2 \cdot \cos^2(\frac{x}{2})$.

Ferner gelten für reelle x die Abschätzungen

7. $|\sin x| \le |x| \quad (x \in \mathbb{R})$,
8. $1 - \frac{x^2}{2} \le \cos x \le 1 \quad (x \in \mathbb{R})$,

sowie die Grenzwert-Aussage

9. $\lim\limits_{\mathbb{C} \ni x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} \\ &= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y), \end{aligned}$$

woraus 1. und 2. folgen.

Zu 3.:

$$\begin{aligned}
2\cdot\cos(\frac{x+y}{2})\cdot\sin(\frac{x-y}{2}) &= 2\cdot\left(\frac{e^{i\frac{x+y}{2}}+e^{-i\frac{x+y}{2}}}{2}\right)\cdot\left(\frac{e^{i\frac{x-y}{2}}-e^{-i\frac{x-y}{2}}}{2i}\right)\\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{i(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2})}+e^{-i(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2})}-e^{i(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2})}-e^{-i(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2})}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left[e^{ix}+e^{-iy}-e^{iy}-e^{-ix}\right]\\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)-\frac{1}{2i}\left(e^{iy}-e^{-iy}\right)\\
&= \sin x-\sin y.
\end{aligned}$$

4. geht analog.
Zu 5.: Teil 1. liefert

$$\cos x=\cos(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=\cos^2(\frac{x}{2})-\sin^2(\frac{x}{2})=\cos^2(\frac{x}{2})+\sin^2(\frac{x}{2})-2\sin^2(\frac{x}{2})=1-2\sin^2(\frac{x}{2}).$$

Analog erhält man 6.
Zu 7.: Wegen Satz F.36.3. ist $|\sin x|\leq 1$, sodaß die Behauptung für $|x|\geq 1$ trivialerweise gilt.
Für $|x|<1$ erhalten wir aus der Reihe

$$|\sin x|=|x|\cdot\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}\right|=|x|\cdot\left|1-\frac{x^2}{3!}+...\right|,$$

wobei rechts eine alternierende Reihe mit betraglich monoton abnehmenden Gliedern steht, deren Wert damit hier in $(0,1)$ liegt.
Zu 8.: Zusammen mit 5. ist

$$\cos x=1-2\sin^2(\frac{x}{2})\geq 1-2(\frac{x}{2})^2=1-\frac{1}{2}x^2.$$

Zu 9.: Dies liest man aus dem Beweis von 7. ab. □

Wir hatten die Zahl π erklärt als die Hälfte des Umfangs des Einheitskreises. Es hat damit ein Viertel-Einheitskreis den Bogen $\frac{\pi}{2}$, der halbe den Bogen π, der Dreiviertel-Einheitskreis den Bogen $\frac{3\pi}{2}$ und der volle Einheitskreis den Umfang 2π. Zusammen mit Satz F.34 und Vereinbarung F.35 liefert dies

$$\begin{array}{rclclcr}
1 &=& e^0 &=& \cos 0+i\sin 0 &=& 1+i\cdot 0\\
i &=& e^{i\frac{\pi}{2}} &=& \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} &=& 0+i\cdot 1\\
-1 &=& e^{i\pi} &=& \cos\pi+i\sin\pi &=& -1+i\cdot 0\\
-i &=& e^{i\frac{3\pi}{2}} &=& \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2} &=& 0+i\cdot(-1)\\
1 &=& e^{i2\pi} &=& \cos 2\pi+i\sin 2\pi &=& 1+i\cdot 0
\end{array}$$

Ferner erkennt man

Satz F.40 *Es ist* $\cos 0=1$ *und die kleinste positive Nullstelle von* $\cos$ *ist gerade die Zahl* $\frac{\pi}{2}$.

Dies erlaubt uns beispielsweise über die Reihendarstellung Satz und Definition F.37 und das noch zu besprechende NEWTON-Verfahren (Satz F.84) eine Berechnung von π auf beliebige Genauigkeit.
Ferner erhält man mittels Satz F.39,1. etwa

$$\begin{array}{rclcl}
\cos(x+\frac{\pi}{2}) &=& \cos x\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{2} &=& -\sin x\\
\cos(x+\pi) &=& \cos x\cdot\cos\pi-\sin x\cdot\sin\pi &=& -\cos x,
\end{array}$$

d.h. die aus der elementaren Trigonometrie bekannten Regeln, nun aber gültig für alle $x \in \mathbb{C}$.
Nach derselben Methode bekommt man die restlichen Gleichungen des folgenden

Satz F.41 *Für alle $x \in \mathbb{C}$ ist*

$$\begin{array}{rlcrlcr}
1. & \cos(x+\frac{\pi}{2}) & = & -\sin x, & \sin(x+\frac{\pi}{2}) & = & \cos x,\\
2. & \cos(x+\pi) & = & -\cos x, & \sin(x+\pi) & = & -\sin x,\\
3. & \cos(\frac{\pi}{2}-x) & = & \sin x, & \sin(\frac{\pi}{2}-x) & = & \cos x,\\
4. & \cos(x+2k\pi) & = & \cos x, & \sin(x+2k\pi) & = & \sin x,
\end{array}$$

wobei die letzte Zeile für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Ferner gilt

Satz F.42 *Außer den bekannten reellen Nullstellen*

$$\frac{\pi}{2} + k\pi \text{ für } \cos \text{ und } k\pi \text{ für } \sin \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

haben sin *und* cos *keine weiteren Nullstellen.*

Beweis: Sei $z = x + iy$ eine Nullstelle des $\sin$. Dann ist also

$$0 = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Somit ist $e^{iz} = e^{-iz}$ oder $e^{ix-y} = e^{-ix+y}$ und wegen $|e^{ix}| = |e^{-ix}| = 1$ ist also $y = 0$. Folglich hat der sin und damit auch der cos nur reelle Nullstellen. Über Satz F.41,1. und 2. folgt, daß $\cos x > 0$ in $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, folglich auch $\sin x > 0$ in $0 < x < \pi$, woraus mit Satz F.41 sofort die Behauptung folgt. □

Hiermit bekommen wir insbesondere

Satz F.43 *Für $x \in \mathbb{C}$ ist $e^{ix} = 1$ genau dann, wenn $x = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt.*

Beweis: Nach der oben aufgestellten Wertetabelle ist $e^{2\pi i} = 1$ und damit auch

$$e^{2k\pi i} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1^k = 1.$$

Andrerseits ist

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right) = \frac{1}{2i}e^{-i\frac{x}{2}}(e^{ix} - 1).$$

Somit ist $e^{ix} = 1$ genau, wenn $\sin\frac{x}{2} = 0$, d.h. mit $k \in \mathbb{Z}$ dann $\frac{x}{2} = k\pi$ oder $x = 2k\pi$. □

Wir erwähnen noch die beiden weiteren häufig benutzten trigonometrischen Funktionen:

Definition F.44 *Für $x \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ sei*

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{der sog. Tangens,}$$

für $x \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ sei

$$\operatorname{ctan} x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{der sog. Cotangens.}$$

Über sie gilt

Satz F.45 *Es ist für $x \in \mathbb{C}$*

1. $\operatorname{ctan} x = \frac{1}{\tan x} = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$,
2. $\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \tan(-x) = -\tan x$,

Für $x \in \mathbb{R}$ gelten:

3. $\tan x$ *ist streng monoton wachsend in* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, *ferner gelten*

$$\tan x \to -\infty \text{ wenn } x \text{ von rechts gegen } -\frac{\pi}{2} \text{ geht,}$$
$$\tan x \to +\infty \text{ wenn } x \text{ von links gegen } +\frac{\pi}{2} \text{ geht.}$$

4. $\left|\frac{\tan x}{x}\right| > 1$ *für* $x \neq 0$ *in* $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Beweis: 1. und 2. liest man aus der Definition bzw. aus Satz F.41 ab.
Zu 3.: Sei $0 \leq x < x' < \frac{\pi}{2}$. Dann ist

$$0 \leq \sin x < \sin x' < 1, \quad 1 \geq \cos x > \cos x' > 0,$$

folglich

$$0 \leq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} < \frac{\sin x'}{\cos x'} = \tan x'.$$

Zusammen mit $\tan(-x) = -\tan x$ folgt die Monotonie.
Ferner haben wir $\sin x \to 1$ für $x \to \frac{\pi}{2}$, $\cos x \to 0$ für $x \to \frac{\pi}{2}$ und es ist $\cos x > 0$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Somit erhält man den behaupteten linksseitigen Grenzwert für den Tangens bei $\frac{\pi}{2}$. Die entsprechende Aussage bei $-\frac{\pi}{2}$ folgt daraus mit 2.
Zu 4.: Diese Abschätzung kann man geometrisch am Einheitskreis beweisen. Sie ergibt sich aber als völlig triviale Anwendung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz F.65) und sei bis dahin verschoben. □

Auf Teilbereichen existieren zu den trigonometrischen Funktionen Umkehrfunktionen:

Satz und Definition F.46

1. *Die Funktion* cos *ist in* $[0, \pi]$ *streng monoton fallend und bildet dieses Intervall bijektiv auf* $[-1, +1]$ *ab. Die Umkehrfunktion*

$$\arccos : [-1, +1] \to [0, \pi]$$

heißt "Arcus-Cosinus".

2. *Die Funktion* sin *ist in* $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf* $[-1, +1]$ *ab. Die Umkehrfunktion*

$$\arcsin : [-1, +1] \to [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

heißt "Arcus-Sinus".

3. *Die Funktion* tan *ist in* $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ *streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall bijektiv auf ganz* $\mathbb{R}$ *ab. Die Umkehrfunktion*

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$$

heißt "Arcus-Tangens".

4. *Entsprechendes gilt für den Cotangens.*

Wir erwähnen noch die sog. Hyperbelfunktionen:

Definition F.47

$$\operatorname{Sin} x := \sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{i}\sin(ix)$$

heißt "Hyperbel-Sinus" oder "Sinus hyperbolicus",

$$\operatorname{Cos} x := \cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$$

heißt "Hyperbel-Cosinus"oder "Cosinus hyperbolicus".

Der Name ergibt sich aus der trivial zu verifizierenden Formel

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

die besagt, daß sämtliche Punkte der Form $(\cosh x, \sinh x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ auf einer Hyperbel liegen.

Wir nutzen die Exponentialfunktion noch zu genaueren Aussagen über Wurzeln.

Satz und Definition F.48

1. *Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es in $\mathbb{C}$ genau n verschiedene Lösungen der Gleichung*

   $$x^n = 1.$$

   Diese Lösungen sind die "n-ten Einheitswurzeln"

   $$\xi_k := e^{\frac{2\pi i}{n}k} \quad \text{für } k = 0, 1, ..., n-1.$$

2. *Zu jeder komplexen Zahl $a \neq 0$ gibt es genau n verschiedenen Lösungen der Gleichung*

   $$x^n = a.$$

   Diese Lösungen nennt man die "n-ten Wurzeln" aus a. Stellt man a dar als

   $$a = |a| \cdot e^{i\varphi} \quad \text{mit } \varphi \in R,$$

   so sind alle Lösungen genau

   $$w_k := w \cdot \xi_k \quad (k = 0, 1, ..., n-1),$$

   wobei

   $$w = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{\frac{i\varphi}{n}}$$

   und $\sqrt[n]{|a|}$ die positive n-te Wurzel aus dem Betrag von a ist. (Vergl. Satz Z.33.)

Beweis: Man rechnet leicht nach, daß die ξ_k bzw. die w_k jeweils paarweise verschiedene Lösungen der genannten Gleichungen sind. Nach Satz F.43 kommen für die Einheitswurzeln aber auch keine weiteren Werte infrage.
Sind w, w' zwei Lösungen von $x^n = a$, so ist also $w^n = (w')^n = a$ und damit auch $\left(\frac{w}{w'}\right)^n = 1$. Folglich ist dieser Quotient $\frac{w}{w'}$ eine n-te Einheitswurzel. □

Differenzierbarkeit

Im folgenden betrachten wir wieder Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$, wobei entweder $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge, typischerweise eine offene Kreisscheibe oder ganz $\mathbb{C}$ ist oder $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes oder uneigentliches Intervall.

Definition F.49 *Die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt an der Stelle $x_0 \in D$ "differenzierbar", wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Man nennt $f'(x_0)$ die "Ableitung" oder den "Differentialquotienten" von f an der Stelle x_0 und schreibt dafür auch

$$\frac{d}{dx} f(x_0) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=x_0} \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

f heißt auf ganz D differenzierbar, wenn es an jeder Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so ist $f' : D \to \mathbb{C}$ wieder eine Funktion, die "erste Ableitung" von f.
Ist f' sogar stetig, so heißt f "stetig differenzierbar", ist f' sogar differenzierbar, so heißt f "zweimal differenzierbar" und $f'' := (f')'$ die "zweite Ableitung" von f. Man schreibt auch

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) \quad \text{etc.}$$

Entsprechend spricht man von k-mal (stetig) differenzierbaren oder sogar beliebig oft (stetig) differenzierbaren Funktionen.

$C^n(D)$ bezeichne die Menge der auf D n-mal stetig differenzierbaren Funktionen.

Interpretiert man die unabhängige Variable als die Zeit t, so schreibt man seit NEWTON *dann für die Ableitung nach der Zeit*

$$\dot{f}(t_0) \quad \text{statt} \quad f'(t_0).$$

Eine wichtige Charakterisierung der Ableitung gibt der folgende

Satz F.50 *f ist in x_0 genau dann differenzierbar, wenn es eine Zahl A gibt, sodaß in einer Umgebung von x_0 eine Darstellung*

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + R(x, x_0)$$

existiert, wobei das hier auftretende "Restglied" $R(x, x_0)$ die Limes-Beziehung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|R(x, x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

erfüllt. Es ist dann $A = f'(x_0)$.

Beweis:

$$f(x) = f(x_0) + A \cdot (x - x_0) + R(x, x_0)$$

ist für $x \neq x_0$ äquivalent zu

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \frac{R(x, x_0)}{x - x_0},$$

woraus man die Äquivalenz der beiden Formulierungen unmittelbar abliest. □

Aus der Darstellung von Satz F.50 liest man auch ab, daß für eine bei x_0 differenzierbare Funktion f auch $f(x) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$ gilt. Wir haben also

Satz F.51 *Ist f (an der Stelle x_0) differenzierbar, so ist f (an der Stelle x_0) auch stetig.*

Die Umkehrung ist falsch, wie man etwa an der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$$

bei $x_0 := 0$ sieht.

Satz F.50 bedeutet, daß in der Nähe der Stelle x_0 die Funktion f durch die lineare Funktion

$$g(x) := f(x_0) + A \cdot (x - x_0)$$

besser als von erster Ordnung approximiert wird, wenn man als A die Ableitung an x_0 nimmmt.
Im Reellen beschreibt g gerade die Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 und $A = f'(x_0)$ deren Steigung.

Ist f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ erklärt, so kann der bei der Definition der Ableitung auftretende Grenzwert für $x_0 := a$ oder $x_0 := b$ bestenfalls als einseitiger Limes existieren. Wenn er existiert, so spricht man von "rechtsseitiger" Ableitung am (linken) Randpunkt a bzw. von "linksseitiger" Ableitung am (rechten) Randpunkt b.

Beispiel F.52 *Konstante Funktionen sind überall differenzierbar, ihre Ableitung ist an jeder Stelle $= 0$.*

Beispiel F.53 *Die Identität: $f : x \mapsto x$ ist an jeder Stelle differenzierbar und ihre Ableitung ist konstant mit dem Wert 1.*

Beispiel F.54 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $f : x \mapsto x^n$ überall differenzierbar mit Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Beweis:

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + ... + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} \to nx_0^{n-1} \quad \text{für } x \to x_0.$$

$\square$

Beispiel F.55 *Die Exponentialfunktion $f : x \mapsto e^x$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar mit Ableitung $(e^x)' = e^x$.*
Die Exponentialfunktion ist somit auf ganz $\mathbb{C}$ beliebig oft (stetig) differenzierbar.

Beweis:

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \frac{e^{x_0 + (x - x_0)} - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \left(\frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \right) \to e^{x_0} \quad (x \to x_0),$$

wobei der Grenzwert schon in Satz F.28 bestimmt ist. $\square$

Beispiel F.56 *Die Funktionen* sin *und* cos *sind auf ganz $\mathbb{C}$ differenzierbar mit Ableitungen*

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.$$

Beweis: Wir nutzen Satz F.39:

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \frac{2}{x - x_0} \cos(\frac{x + x_0}{2}) \sin(\frac{x - x_0}{2}) = \cos(\frac{x + x_0}{2}) \frac{\sin(\frac{x - x_0}{2})}{\frac{x - x_0}{2}}$$

und dies konvergiert für $x \to x_0$ gegen $\cos x_0$.
Analog schließt man für den $\cos$. □

Beispiel F.57 *Die für $x \neq 0$ erklärte Funktion $f : x \to \frac{1}{x}$ ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ differenzierbar mit Ableitung*

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \text{ d.h. } (x^{-1})' = (-1)x^{-2}.$$

Beweis: Für $x_0 \neq 0$ und $|x - x_0| < |x_0|$ ist

$$\frac{1}{x - x_0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{x - x_0}\left(\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right) = -\frac{1}{x \cdot x_0} \to -\frac{1}{x^2} \quad (x \to x_0).$$

□

Zum praktischen Umgang mit dem Differenzieren nutzt man sinnvollerweise die folgenden Regeln über das Differenzieren zusammengesetzter Funktionen.

Satz F.58 (Summen-, Produktregel) *Die folgenden Aussagen beziehen sich gleichermaßen auf eine Stelle x_0 oder den ganzen Definitionsbereich D.*

1. *Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so ist auch $\alpha f + \beta g$ differenzierbar mit Ableitung*
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'.$$
2. *Sind $f_0, f_1, ..., f_n : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar, $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, so ist auch $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i$ differenzierbar mit Ableitung*
$$\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i\right)' = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_i'.$$
3. *Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so auch $f \cdot g$ und es ist*
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Beweis: Zu 1.:

$$\frac{1}{x - x_0}[(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0)] = \alpha\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) + \beta\left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\right),$$

woraus mit Satz F.12 die Behauptung folgt.

2. bekommt man hieraus mit Induktion.

Zu 3.:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x - x_0}[(fg)(x) - (fg)(x_0)] &= \frac{1}{x - x_0}[f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)] \\
&= \frac{1}{x - x_0}[(f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0))] \\
&= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.
\end{aligned}$$

Satz F.12 zusammen mit der Stetigkeit von g (Satz F.51) liefert die Behauptung. □

Zusammen mit Satz F.17 liefert dies insbesondere

Satz F.59 *Die auf D n-mal stetig differenzierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum $C^n(D)$.*

Satz F.60 (Kettenregel) *Sind $g : D \to D'$ und $f : D' \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so auch $(f \circ g) : D \to \mathbb{C}$ und für $x_0 \in D$, $y_0 := g(x_0)$ ist*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0).$$

Eine alternative Schreibweise lautet

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Beweis: Nach Satz F.50 haben wir wegen der Differenzierbarkeit von f und g Darstellungen

$$g(x) = g(x_0) + [g'(x_0) + r(x, x_0)] \cdot (x - x_0)$$

wobei $\lim\limits_{x \to x_0} r(x, x_0) = 0$, und ferner

$$f(y) = f(y_0) + [f'(y_0) + s(y, y_0)] \cdot (y - y_0)$$

wobei $\lim\limits_{y \to y_0} s(y, y_0) = 0$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
f(g(x)) - f(g(x_0)) &= f(g(x)) - f(y_0) \\
&= [f'(y_0) + s(g(x), y_0)] \cdot (g(x) - y_0) \\
&= [f'(y_0) + s(g(x), y_0)] \cdot [g'(x_0) + r(x, x_0)] \cdot (x - x_0) \\
&= f'(y_0) \cdot g'(x_0) \cdot (x - x_0) \\
&\quad + [f'(y_0) \cdot r(x, x_0) + s(g(x), y_0) \cdot (g'(x_0) + r(x, x_0))] \cdot (x - x_0)
\end{aligned}$$

und hier geht für $x \to x_0$ auch $g(x) \to y_0$ und damit insgesamt $[...] \to 0$. □

Wir wenden dies gleich auf das Differenzieren von Quotienten an:

Satz F.61 (Quotientenregel) *Sind $f, g : D \to \mathbb{C}$ differenzierbar, so ist $\frac{f}{g}$ überall dort differenzierbar, wo $g(x) \neq 0$ ist, und es gilt dort*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Speziell ist dort für die konstante Funktion $f(x) = 1$ dann

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Beweis: Die zweite Aussage folgt aus der Kettenregel für $F \circ g$ mit $F(y) := \frac{1}{y}$ zusammen mit Beispiel F.57.
Über die Produktregel folgt dann die erste Aussage. □

Nun können wir unsere Liste differenzierbarer Funktionen um wichtige Beispiele verlängern. Die Summen- und die Quotientenregel angewendet auf die Potenzen (Beispiel F.54) liefert

Beispiel F.62 *Polynome sind differenzierbar und es gilt die Formel*

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j x^j\right)' = \sum_{j=1}^{n} j \cdot a_j x^{j-1}.$$

Die Ableitung ist also wieder ein Polynom, Polynome sind also beliebig oft differenzierbar.
Rationale Funktionen, also Quotienten $\frac{p}{p}$ von Polynomen, sind an allen Stellen differenzierbar, wo der Nenner nicht veschwindet. Es ist

$$\left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p' \cdot q - p \cdot q'}{q^2}.$$

Die Ableitung ist also wieder eine rationale Funktion, deren Nenner dieselben Nullstellen hat wie die ursprüngliche Funktion.

Die Aussage über Polynome überträgt sich auch auf Potenzreihen.

Satz F.63 *Die Potenzreihe $f(x) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ habe den Konvergenzkreis $K(0,r)$ mit $r > 0$. Dann ist f für jedes $x \in K(0,r)$ differenzierbar und für solche x ist*

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot a_j x^{j-1}.$$

Die Ableitung ist also selbst eine Potenzreihe, die man aus der ursprünglichen durch gliedweises Differenzieren erhält. Beide Reihen haben denselben Konvergenzkreis.

Beweis: Die Gleichheit der Konvergenzkreise beider Reihen folgt aus Satz Z.50,3 und dem Majorantenkriterium. Nach Satz Z.52 gilt für x_0, x im Konvergenzkreis die Identität

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k,$$

wobei für $k \in \mathbb{N}$

$$b_k := \sum_{j=k}^{\infty} a_j \binom{j}{k} x_0^{j-k}$$

ist. Hierbei ist

$$b_0 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \binom{j}{0} x_0^{j-0} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x_0^j = f(x_0).$$

Wir haben also

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = b_0 + b_1(x - x_0) + \left(\sum_{k=2}^{\infty} b_k (x - x_0)^{k-2}\right)(x - x_0)^2.$$

Wegen $b_0 = f(x_0)$ ist dies eine Darstellung, wie wir sie in Satz F.50 hatten, sodaß f an der Stelle x_0 differenzierbar ist und zwar mit der Ableitung

$$f'(x_0) = b_1 = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \binom{j}{1} x_0^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot j \cdot x_0^{j-1},$$

was behauptet war. □

Der Mittelwertsatz

Für diesen Abschnitt beschränken wir uns auf den reellen Fall, d.h. wir untersuchen nur Funktionen, die ein eventuell uneigentliches reelles Intervall I wieder nach $\mathbb{R}$ abbilden.
Ist x_0 ein *innerer* Punkt von I und gilt für alle x aus einer Umgebung von x_0 stets $f(x) \leq f(x_0)$, so hat f an x_0 ein "lokales Maximum", gilt analog stets $f(x) \geq f(x_0)$, so hat f an x_0 ein "lokales Minimum".

Satz F.64 *Hat $f : I \to \mathbb{R}$ an der inneren Stelle x_0 ein lokales Maximum oder Minimum und ist f dort differenzierbar, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Beweis: In einer Umgebung eines Maximums haben wir $f(x) \leq f(x_0)$ und somit

$$\begin{aligned} \text{für } x < x_0 : \quad & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \\ \text{für } x > x_0 : \quad & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \end{aligned}$$

Für $x \to x_0$ werden beide Quotienten zur Ableitung $f'(x_0)$, die somit nur $= 0$ sein kann.
Ein Minimum von f ist ein Maximum von $-f$, womit auch die zweite Aussage bewiesen ist. □

Satz F.65 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei auf dem abgeschlossenen Intervall stetig, im Inneren differenzierbar. Dann gibt es mindestens eine Stelle $\xi \in (a, b)$, sodaß

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall, daß $f(b) = f(a)$ ist. Für diese Situation trägt der Mittelwertsatz den Namen **Satz von Rolle**. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, nimmt es nach dem Satz vom Maximum F.20 an einer Stelle $\xi \in [a, b]$ sein Maximum an. Ist ξ ein innerer Punkt, so ist $f'(\xi) = 0$ und wir haben

$$0 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Ist ξ dagegen ein Randpunkt, so hat f an beiden Rändern denselben maximalen Wert und damit im Inneren ein Minimum, für das wir dann wie eben schließen.

Den allgemeine Fall führen wir hierauf zurück. Betrachte

$$g(x) := f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right).$$

Dann ist

$$g(b) = g(a) = 0, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und $g'(\xi) = 0$ bedeutet $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Der Mittelwertsatz ist ein häufig eingesetztes Hilfsmittel, dessen Bedeutung sich erst allmählich zeigen wird. Wenden wir ihn gleich an:

Satz F.66 *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

1. *Ist* $[a,b] \subset I$ *und* $|f'(x)| \le C$ *auf ganz* $[a,b]$, *so ist für alle* $x, x_0 \in [a,b]$
$$|f(x) - f(x_0)| \le C \cdot |x - x_0|.$$
2. *Ist* $f'(x) = 0$ *auf ganz* I, *so ist* f *konstant auf* I.

Beweis: 1. Mit einem ξ zwischen x und x_0 können wir mit dem Mittelwertsatz abschätzen
$$|f(x) - f(x_0)| = |f'(\xi) \cdot (x - x_0)| \le C \cdot |x - x_0|.$$
2. Benutze 1. mit $C = 0$. □

Satz F.67 *Es sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Dann gelten*

1. f *ist genau dann monoton wachsend, wenn* $f'(x) \ge 0$ *für alle* $x \in I$.
2. *Ist* $f'(x) > 0$ *für alle* $x \in I$, *so ist* f *streng monoton wachsend.*

Analoges gilt mit dem anderen Vorzeichen für fallende Funktionen. Die zweite Aussage läßt sich nicht umkehren.

Beweis: Etwa $f(x) = x^5$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(0) = 0$.
Sei $[x_1, x_2] \subset I$. Dann sind dafür die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes erfüllt, d.h. es gibt ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.
Ist also $f'(x)$ stets ≥ 0 bzw. stets > 0, so ist dann stets $f(x_2) \ge f(x_1)$ bzw. $f(x_2) > f(x_1)$ für $x_2 > x_1$. Dann ist also f (streng) monoton wachsend.
Die Umkehrung von 1. folgt aus der Grenzwert-Definition der Ableitung. □

Satz F.68 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz) *Sind* f, g *auf* $[a,b]$ *stetig, im Inneren differenzierbar und ist* $g'(x) \ne 0$ *auf* (a,b), *so gibt es eine Stelle* $\xi \in (a,b)$, *für die*
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz folgt, da $g'(x)$ stets $\ne 0$ ist, daß $g(b) \ne g(a)$, sodaß der Quotient definiert ist. Wir setzen
$$h(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$
Hier ist
$$h(b) = h(a) = 0, \quad h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$
und der Mittelwertsatz (es reicht schon der Satz von ROLLE) liefert die Behauptung.
□

Aus diesem Satz erhalten wir eine wichtige Regel zum Bestimmen von Grenzwerten.

Satz F.69 (Regel von DE L'HOSPITAL)

1. *Sind* f, g *differenzierbar in* (a,b) *und ist*
$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0, \text{ aber } g'(x) \ne 0 \text{ in der Nähe von } a,$$
so ist
$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$
falls der rechtsstehende Grenzwert existiert.
Analoges gilt für linksseitige bzw. beidseitige Grenzwerte.

2. *Dies kann bei Vorliegen entsprechender Situationen iteriert werden. Sind f, g in (a, b) k-mal differenzierbar und ist*

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a+} f'(x) = ... = \lim_{x\to a+} f^{(k-1)}(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to a+} g(x) = \lim_{x\to a+} g'(x) = ... = \lim_{x\to a+} g^{(k-1)}(x) = 0,$$

aber für alle j stets $g^{(j)}(x) \neq 0$ in der Nähe von a, so ist

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f^{(k)}(x)}{g^{(k)}(x)},$$

falls der rechtsstehende Grenzwert existiert.

Beweis:
Zu 1.: Wir setzen $f(a) := \lim_{x\to a^+} f(x) = 0$, und entsprechend $g(a) := \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz ist dann für x nahe bei a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Für $x \to a+$ geht wegen $a < \xi < x$ auch $\xi \to a+$ und nach Voraussetzung existiert $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, somit auch $\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und beide sind gleich.
2. bekommt man über wiederholte Anwendung von 1. □

Beispiele F.70

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

Als Anwendung von Satz F.67 zeigen wir den folgenden Satz über die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion.

Satz F.71 *Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf dem Intervall I differenzierbar und die Ableitung f' sei entweder stets > 0 oder stets < 0. Dann ist $J := f(I)$ ein Intervall, $f : I \to J$ bijektiv und die Umkehrfunktion f^{-1} differenzierbar in J.
Für deren Ableitung gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)},$$

wobei $y \in J$ und $y = f(x)$ bzw. äquivalent $x = f^{-1}(y)$ ist.

Man beachte, daß es für die Aussage des Satzes *nicht* reicht, daß f differenzierbar ist und f^{-1} existiert. Etwa $f(x) = x^5$ ist ein Gegenbeispiel.

Beweis: Wir können davon ausgehen, daß stets $f'(x) > 0$ ist, also f streng monoton wächst. Wegen der Stetigkeit von f ist dann nach Satz F.23 auch $J := f(I)$ ein Intervall und wegen Satz F.25 existiert $f^{-1} : J \to I$ und ist nach Satz F.26 stetig. Es bleibt also die Differenzierbarkeit von f^{-1} zu zeigen.

Wir betrachten zu $y_0 \in J$ eine Folge (y_n) in J, für die stets $y_n \neq y_0$ ist und $y_n \to y_0$ konvergiert. Dazu seien $x_n := f^{-1}(y_n),\ x_0 := f^{-1}(y_0)$ die Urbilder. Dafür ist dann auch stets $x_n \neq x_0$ und wegen der Stetigkeit von f^{-1} gilt sogar $x_n \to x_0$. Dann können wir aber, wie folgt, rechnen:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}}.$$

Der Nenner rechts konvergiert gegen $f'(x_0)$ und dies ist nach Voraussetzung $\neq 0$. Folglich konvergiert auch der Quotient links und zwar gegen $\frac{1}{f'(x_0)}$, wie behauptet. □

Beispiel F.72 *Für $f(x) = e^x$ ist $f'(x) = e^x > 0$ und $f^{-1}(y) = \ln y$ für $y > 0$.*
Also ist $\ln y$ differenzierbar und $(\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$.
Dies liefert dann weiter:
Für $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ ist

$$(a^x)' = \left(e^{x \ln a}\right)' = \ln a \cdot a^x,$$
$$(\log_a y)' = \left.\frac{1}{(a^x)'}\right|_{x=\log_a y} = \frac{1}{(\ln a)y}.$$

Für $x > 0$ und beliebige $b \in \mathbb{R}$ ist

$$\left(x^b\right)' = \left(e^{b \ln x}\right)' = e^{b \ln x}(b \ln x)' = b x^{b-1}.$$

Eine weitere Anwendung des (verallgemeinerten) Mittelwertsatzes ist der

Satz F.73 (Satz von TAYLOR) *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Jede Funktion $f \in C^{n+1}(I)$ besitzt für beliebige Stellen $x_0 \in I$ eine Darstellung*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x)$$

mit einem "Restglied" der Form

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

wobei ξ zwischen x_0 und x liegt.

Man nennt den Anteil

$$p_n(x) := f(x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

das "TAYLOR-Polynom" der Ordnung n zu f an der Stelle x_0.

Der **Beweis** ist lediglich eine geschickte Anwendung des verallgemeinerten Mittelwertsatzes.
Wähle x und betrachte für $t \in I$ die Funktion

$$F(t) := f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - f''(t)\frac{(x - t)^2}{2!} - \ldots - f^{(n)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!}$$
$$G(t) := \frac{(x - t)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Wir bestimmen die Ableitungen nach t für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\right) &= f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!} + f^{(k)}(t)\frac{k(x-t)^{k-1}}{k!}(-1)\\ &= f^{(k+1)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!} - f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}.\end{aligned}$$

Summiert man über die relevanten k, so fällt fast alles weg und man bekommt

$$\frac{d}{dt}F(t) = -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}$$

Ferner ist

$$\frac{d}{dt}G(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}.$$

Setzen wir nun $t = x_0$, so folgt nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = f^{(n+1)}(\xi).$$

Andrerseits ist $F(x) = G(x) = 0$, also

$$F(x_0) = f^{(n+1)}(\xi)G(x_0),$$

was unmittelbar die Behauptung liefert. □

Mit dem Satz von TAYLOR lassen sich insbesondere Extrema charakterisieren:

Satz F.74 *Es sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $x_0 \in I$ ein innerer Punkt. Ist dann*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0, \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq 0,$$

so hat f an der Stelle x_0 ein

- *Maximum, wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$,*
- *Minimum, wenn n ungerade ist und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$.*

Ist n gerade, so hat f in jeder Umgebung von x_0 sowohl Werte $> f(x_0)$ als auch Werte $< f(x_0)$, also weder Maximum noch Minimum.

Beweis: Nach dem Satz von TAYLOR ist in einer Umgebung von x_0 unter den gemachten Vorausetzungen

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}.$$

Da $f^{(n+1)}$ stetig und in x_0 verschieden von 0 ist, können wir die Umgebung so klein machen, daß darauf $f^{(n+1)}(\xi)$ stets $\neq 0$ und damit stets > 0 oder stets < 0 ist.
Für ungerade n ist für $x \neq x_0$ der Term $(x-x_0)^{n+1} > 0$. Damit kann man die Aussagen über Maximum und Minimum direkt aus der obigen Darstellung ablesen.
Für gerade n wechselt dagegen der Term $(x-x_0)^{n+1}$ beim Durchgang durch x_0 sein Vorzeichen, woraus die zweite Behauptung folgt. □

Ferner können wir mit dem Satz von TAYLOR die Brücke zur Potenzreihendarstellung schlagen:

Satz F.75 *Es sei f auf I beliebig oft differenzierbar, $x_0 \in I$ ein innerer Punkt und mit einem $\delta > 0$ gelte*

$$\max\left\{|f^{(n)}(x)|\frac{\delta^n}{n!}\ ;\ |x-x_0|\le\delta\right\}\to 0\quad(n\to\infty).$$

Dann ist die sogenannte TAYLOR*-Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

für $|x-x_0|<\delta$ konvergent und stellt dort die Funktion f dar, d.h. dort ist

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k.$$

Bemerkung F.76 *Wegen Satz Z.50 konvergiert dann die* TAYLOR*-Reihe sogar in einer ganzen Kreisscheibe um x_0 in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ absolut und gleichmäßig.*

Beweis: Die n-te Partialsumme der TAYLOR-Reihe ist ja gerade das TAYLOR-Polynom n-ter Ordnung

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

und dafür gilt ja

$$f(x)=p_n(x)+R_n(x)$$

mit

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1},$$

wobei $|\xi-x_0|<|x-x_0|$. Für $|x-x_0|<\delta$ ist dann nach Voraussetzung

$$|R_n(x)|\le\max\left\{|f^{(n+1)}(x)|\frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\ ;\ |x-x_0|\le\delta\right\}\to 0\quad(n\to\infty),$$

was die Konvergenz zeigt. □

Aus Satz F.63 erhält man sofort

Satz F.77 *Für die durch eine in einer Umgebung von x_0 konvergente Potenzreihe*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

dargestellte Funktion f ist für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x_0)=n!\,a_n.$$

Damit ist jede Potenzreihe ihre eigene TAYLOR*-Reihe.*

Man beachte jedoch folgende

Warnung *Es gibt Funktionen f, deren* TAYLOR*-Reihe konvergiert, aber (fast) nirgends gegen den Wert der Funkion f.*
Die Voraussetzungen in Satz F.75 sind also ernst zu nehmen.

Ein Beispiel ist etwa die auf ganz $\mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

erklärte Funktion. Sie ist überall beliebig oft differenzierbar und bei $x = 0$ haben alle Ableitungen den Wert $f^{(n)}(0) = 0$. Somit stellt die TAYLOR-Reihe die Nullfunktion dar und nicht unsere Funktion f.
Die in Satz F.77 enthaltene Eindeutigkeitsaussage gilt noch wesentlich allgemeiner:

Identitätssatz F.78 *Es seien*

$$f(x) := \sum_k a_k(x - x_0)^k \quad \textit{und} \quad g(x) := \sum_k b_k(x - x_0)^k$$

zwei Potenzreihen, die beide im Kreis $K(x_0, r)$ konvergieren. In $K(x_0, r)$ gebe es eine gegen x_0 konvergente Folge (x_n), wobei stets $x_n \neq x_0$ sei, auf der für alle n $f(x_n) = g(x_n)$ gelte.
Dann stimmen beide Potenzreihen überein, d.h. für alle k ist $a_k = b_k$ und insbesondere auch $f(x) = g(x)$ auf dem ganzen Konvergenzkreis.

Beweis: Die Differenz $h(x) := f(x) - g(x)$ wird auf $K(x_0, r)$ dargestellt durch

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x - x_0)^k, \quad \text{wobei } c_k := a_k - b_k.$$

Nach Voraussetzung ist $h(x_n) = 0$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ und da Potenzreihen stetige Funktionen darstellen, ist dann auch

$$h(x_0) = 0, \quad \text{also} \quad c_0 = 0.$$

Wir haben somit genauer

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x - x_0)^k = (x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(x - x_0)^k =: (x - x_0)h_1(x),$$

wobei wir

$$h_1(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1}(x - x_0)^k$$

gesetzt haben.
Nach Voraussetzung gilt für alle (Folgen-)Punkte x_n, daß

$$0 = h(x_n) = (x_n - x_0)h_1(x_n)$$

ist, und da stets $x_n \neq x_0$ ist, muß dann auch immer $h_1(x_n) = 0$ sein. Wie eben folgt daraus, daß der Absolutkoeffizient der h_1 darstellenden Potenzreihe verschwindet, d.h. daß $c_1 = 0$ ist.
Diese Schlußweise kann man nun immer wieder anwenden und bekommt so, daß alle Koeffizienten $c_k = 0$ sein müssen, d.h. jeweils entsprechende Koeffizienten von f und g übereinstimmen. $\square$

Beispiel F.79 (Logarithmus-Reihe) *Die Funktion $f(x) := \ln(1+x)$ ist für $x \in \mathbb{R}, x > -1$ beliebig oft differenzierbar. Sie wird in $-1 < x < +1$ durch ihre* TAYLOR-*Reihe dargestellt:*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} x^n.$$

Beweis: Nach Beispiel F.72 und der Kettenregel folgt induktiv:
f besitzt für $x \in \mathbb{R}, x > -1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die n-te Ableitung und es ist

$$f^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Folglich hat nach Satz F.75 die TAYLOR-Reihe um $x_0 = 0$ die angegebene Form. Die für die Konvergenz maßgebliche Abschätzung lautet hier

$$|f^{(n)}(x)| \frac{\delta^n}{n!} = (n-1)! \frac{1}{(1+x)^n} \frac{\delta^n}{n!} \le \frac{1}{n} \frac{\delta^n}{(1-\delta)^n},$$

woraus man wenigstens für $|x| \le \delta := \frac{1}{2}$ die Konvergenz gegen $f(x)$ bekommt. Tatsächlich konvergiert die Reihe für $|x| < 1$ und stellt dort auch die Funktion dar. □

In Satz und Definition F.46 hatten wir die Funktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$$

als Umkehrfunktion des Tangens definiert. Sie besitzt eine sie darstellende TAYLOR-Reihe.

Beispiel F.80 (Arcustangens-Reihe) *Die Funktion $f(x) := \arctan x$ wird für $|x| < 1$ durch ihre* TAYLOR-*Reihe dargestellt:*

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1} \quad (|x| < 1).$$

Dier Reihe konvergiert auch noch für $x = \pm 1$ und stellt auch dort die Funktion dar.

Beweis: Es ist $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, somit die Ableitung

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + (\tan x)^2 \neq 0.\end{aligned}$$

Also ist nach Satz F.71 auch die Umkehrfunktion arctan überall differenzierbar und

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

woraus man mittels der Quotientenregel schließt, daß arctan beliebig oft differenzierbar ist. Das Berechnen der Ableitungen ist allerdings sehr mühsam. Aus den ersten paar Ableitungen kann man vermuten, daß wir bei $x_0 = 0$ folgende Werte für die Ableitungen bekommen:

$$f^{(2k)}(0) = 0, \; f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)! \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Dies würde zu folgender TAYLOR-Reihe führen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Diese Reihe stellt nun tatsächlich die Funktion dar, was man für reelle x wie folgt sehen kann: Für

$$R_n(x) := \arctan x - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}$$

ist

$$\begin{aligned} R_n'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{2k} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x^2)^k \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-(-x^2)^n}{1+x^2} = \frac{(-x^2)^n}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Wenden wir den verallgemeinerten Mittelwertsatz (Satz F.68) an auf

$$f(x) := R_n(x),\ g(x) := \frac{1}{2n+1} x^{2n+1},$$

so folgt

$$\frac{R_n(x) - R_n(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{R_n'(\theta x)}{g'(\theta x)} = \frac{(-(\theta x)^2)^n}{1+(\theta x)^2} \cdot \frac{1}{(\theta x)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{1+(\theta x)^2}, \text{ mit } 0 < \theta < 1,$$

sodaß wegen $R_n(0) = g(0) = 0$

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+(\theta x)^2} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

ist. Somit ist für reelle x mit $|x| \le 1$

$$|R_n(x)| \le \frac{1}{2n+1} \to 0 \ (n \to \infty),$$

was die Konvergenz zeigt. □

Es ist

$$\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1,$$

somit

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1$$

und wir haben damit eine erste Darstellung für π.

Satz F.81 *Es ist*

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \ldots\ldots .$$

Diese Reihe ist allerdings sehr schlecht konvergent.

Beispiel F.82 (Binomial-Reihe) *Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ sei*

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k > 0).$$

Dann ist für $x \in \mathbb{R}, |x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k.$$

Diese Reihe heißt die "Binomialreihe".

Beweis: Es ist $f_\alpha(x) := (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$. Damit ist f beliebig oft differenzierbar für $x > -1$ und es ist

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{1+x} f_\alpha(x) = \alpha f_{\alpha-1}(x) \text{ und damit induktiv}$$
$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1) f_{\alpha-n}(x) = \binom{\alpha}{n} n!(1+x)^{\alpha-n}.$$

Für $x = 0$ ist also $f_\alpha^{(n)}(0) = \binom{\alpha}{n} n!$, was sofort zu obiger TAYLOR-Reihe führt.
Für den Konvergenznachweis beschränken wir uns auf den Bereich $|x| < \frac{1}{3}$. Dafür ist mit $\delta := \frac{1}{3}$ und $|x| < \delta$ abzuschätzen

$$R_{n-1} := |f_\alpha^{(n)}(x)| \frac{\delta^n}{n!} = \left|\binom{\alpha}{n}\right| (1+x)^{\alpha-n} \delta^n \leq (\frac{3}{2})^{|\alpha|} \cdot \left|\binom{\alpha}{n}\right| \frac{\delta^n}{(1-\delta)^n}.$$

Für große n ist $\left|\frac{\alpha-n+1}{n}\right| < \frac{4}{3}$ und mit einer geeigneten Konstanten C also bei $\delta := \frac{1}{3}$

$$R_n \leq C \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^n = C \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0.$$

□

Zur numerischen Lösung von Gleichungen

Ein häufig auftretendes Problem ist die Bestimmung einer Nullstelle einer stetigen Funktion $g : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$, d.h die Bestimmung einer Stelle ξ, für die $g(\xi) = 0$ ist, was meist nur mit numerischen Methoden möglich ist. Solche Probleme lassen sich auf viele Weise als ein sogenanntes "Fixpunktproblem" schreiben, d.h. in eine Gleichung der Gestalt $f(x) = x$ umformulieren und dies kann man unter geeigneten Voraussetzungen an f durch das folgende Iterationsverfahren lösen:
Aus einem Näherungswert x_0 berechnet man sukzessive neue Werte durch die simple Vorschrift

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad (n = 0, 1, ...).$$

Ist diese Folge definiert und konvergiert sie gegen einen Wert ξ, so ist dann für ein stetiges f

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi),$$

d.h. ξ der gesuchte Fixpunkt.
Eine häufig anwendbare Form dieser Idee enthält der folgende Satz, der ein Spezialfall des in einem sehr allgemeinen Rahmen geltenden Fixpunktsatzes von BANACH ist.

Satz F.83 *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar und $f(I) \subset I$. Ferner gebe es eine Zahl $q < 1$, mit der $|f'(x)| \leq q$ für alle $x \in I$. Dann gelten für jedes $x_0 \in I$*

1. *Die durch $x_{n+1} := f(x_n) \quad (n = 0, 1, ...)$ erklärte Folge ist wohldefiniert und konvergiert gegen die eindeutig bestimmte Lösung ξ von $f(x) = x$ in I.*

2. *Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Beweis: Da f das Intervall wieder in sich selbst abbildet, ist die Folge jedenfalls wohldefiniert. Ferner liefert der Mittelwertsatz $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ für alle $x, y \in I$. Damit kann es höchstens eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$ geben; denn sind x' und x'' beides solche Lösungen, man sagt "Fixpunkte", so bekommen wir

$$|x' - x''| = |f(x') - f(x'')| \leq q|x' - x''|,$$

was wegen $q < 1$ nur für $x' = x''$ möglich ist.
Ferner haben wir aus derselben Ungleichung die Abschätzung

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}|,$$

woraus durch Induktion sofort für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0| \qquad (*)$$

folgt. Nun ist

$$x_{n+1} = x_0 + \sum_{k=0}^{n}(x_{k+1} - x_k) \qquad (**)$$

und die letzte Ungleichung besagt gerade, daß nach dem Majoranten-Kriterium die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$, also unsere Folge der (x_n) konvergiert. Der Grenzwert ξ liegt dann ebenfalls in dem abgeschlossenen Intervall I und ist damit der einzig mögliche Fixpunkt unserer Funktion.
Die Fehlerabschätzung ist nichts anderes als die Anwendung von $(*)$ auf $(**)$. □

Eine der wichtigsten Anwendungen dieses Satzes ist das Newton-Verfahren, das wir nun kennenlernen werden.
Zur Bestimmung einer Nullstelle von g, also einer Lösung von $g(x) = 0$ behandelt man das Fixpunktproblem

$$x = f(x) \text{ für die Funktion } f(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Motiviert wird dies dadurch, daß man mit einer Näherung x_n für die Nullstelle die Funktion g durch die lineare Funktion $\ell(x) := g(x_n) + g'(x_n)(x - x_n)$, das ist die Tangente an den Graphen im Punkt $(x_n, g(x_n))$, ersetzt und deren Nullstelle als neue Näherung nimmt.
Dafür gilt der folgende

Satz F.84 (Newton-Verfahren) *Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dabei sei $g(a) < 0$, $g(b) > 0$, und $g'(x) > 0$ auf ganz $[a, b]$. Dann gelten:*

1. *g hat in $[a, b]$ genau eine Nullstelle ξ, und die durch*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$$

erklärte Folge ist wohldefiniert und konvergiert gegen ξ, sofern der Startwert x_0 nahe genug bei ξ gewählt wurde.

2. *Ist überdies $g''(x) \geq 0$ auf ganz $[a,b]$, so konvergiert diese Folge für jedes $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) > 0$ monoton fallend gegen ξ.*
3. *Die Konvergenz ist quadratisch, d.h. mit einer Konstanten L ist*

$$|x_{n+1} - \xi| \leq L|x_n - \xi|^2.$$

Beweis: Zu 1.: Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Funktion g auf $[a,b]$ stetig, streng monoton mit unterschiedlichen Vorzeichen am Rand und hat somit genau eine Nullstelle $\xi \in [a,b]$. Ferner ist die Funktion

$$f: \quad f(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

auf ganz $[a,b]$ definiert, dort stetig differenzierbar und besitzt dort den einzigen Fixpunkt ξ, eben die Nullstelle von g. Es ist

$$f'(x) = 1 - \frac{g'(x)^2 - g(x)g''(x)}{g'(x)^2} = \frac{g(x)g''(x)}{g'(x)^2}$$

auf $[a,b]$ stetig und überdies sogar $f'(\xi) = 0$. Somit gibt es ein Intervall $I_\delta := [\xi - \delta, \xi + \delta] \subset [a,b]$, auf dem $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ ist. Dann ist dort insbesondere

$$|f(x) - \xi| = |f(x) - f(\xi)| \leq \frac{1}{2}|x - \xi|,$$

sodaß das Intervall I_δ von f in sich abgebildet wird. Also können wir Satz F.83 anwenden, der die Behauptung 1. liefert.

Zu 2.: Nach Voraussetzung ist sogar $\min\limits_{x\in[a,b]} g'(x) =: C > 0$, ferner $g(x) > 0$ für $x > \xi$. Also ist für solche x dann $\frac{g(x)}{g'(x)} > 0$ und damit

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)} < x \qquad \text{für } x > \xi.$$

Andrerseits ist nach TAYLOR

$$0 = g(\xi) = g(x) + g'(x)(\xi - x) + \frac{1}{2}g''(\theta)(\xi - x)^2,$$

woraus sofort

$$f(x) - \xi = x - \frac{g(x)}{g'(x)} - \xi = \frac{(x-\xi)g'(x) - g(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}\frac{g''(\theta)}{g'(x)}(\xi - x)^2$$

folgt. Nach unseren Voraussetzungen ist für $x \neq \xi$ hier die rechte Seite stets positiv, sodaß also

$$f(x) > \xi \qquad \text{für } x \neq \xi.$$

Beginnen wir also die Iteration mit einer Stelle x_0 für die $g(x_0) > 0$ ist, so ist dann $x > \xi$ und damit die Iterationsfolge definiert, monoton abnehmend und nach unten durch ξ beschränkt. Damit ist sie konvergent und wie oben kann der Grenzwert als Fixpunkt von f nur ξ sein. Dies zeigt 2.

Zu 3.: Ist $|g''(x)| \leq K$ auf $[a,b]$, so liefert obige Darstellung für f die Abschätzung

$$|f(x) - \xi| = \left|\frac{1}{2}\frac{g''(\theta)}{g'(x)}(\xi - x)^2\right| \leq \frac{1}{2}\frac{K}{C}|\xi - x|^2,$$

was behauptet war. □

Nutzen wir dies zur Berechnung von $\sqrt[r]{a}$.

Beispiel F.85 *Für* $a \in \mathbb{R}, > 0$ *und* $r \in \mathbb{N}$ *sei*

$$g(x) := x^r - a, \text{ mit } \xi := \sqrt[r]{a} \text{ als einziger positiver Nullstelle.}$$

Dafür lautet dann das Newton*-Verfahren*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^r - a}{r x_n^{r-1}} = \frac{1}{r}\left((r-1)x_n + \frac{a}{x_n^{r-1}}\right).$$

Speziell für die Quadratwurzel ergeben diese Formeln die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Die entstehende Folge konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 > 0$ *quadratisch gegen die gesuchte positive Wurzel.*