# H Homomorphismen

$K$ bezeichnet wieder die reellen oder die komplexen Zahlen.
Wir hatten gesehen, daß eine $n \times m$ Matrix $A$ über

$$K^m \ni x \mapsto f(x) := Ax \in K^n$$

eine Abbildung definiert, für die für alle $x, y \in K^m, \alpha \in K$ gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

Diese Formeln greifen nur auf Operationen zurück, die in jedem Vektorraum erklärt sind.

**Definition H.1 (Homomorphismus, lineare Abbildung)** *$U, V$ seien Vektorräume über demselben Körper $K$. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt "linear" oder ein "Homomorphismus", wenn für alle $x, y \in U$, alle $\alpha \in K$ gilt:*

*H1:* $f(x+y) = f(x) + f(y)$

*H2:* $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

*Die Menge aller Homomorphismen von $U$ nach $V$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(U, V)$. Stimmen die beiden Räume überein, ist also $U = V$, so reden wir auch von einem "Endomorphismus" und schreiben $\mathrm{End}(U)$ statt $\mathrm{Hom}(U, U)$. Ist der Bildraum $V$ der Grundkörper $K$ selbst, also der eindimensionale Raum der reellen oder komplexen Zahlen, so spricht man spezieller von "linearen Funktionalen".*
*In vielen physikalischen Zusammenhängen ist es auch üblich, statt von Homomorphismen von "linearen Operatoren" zu reden.*

Die Rechenregel H1 überträgt sich sofort auf mehrere Summanden, sodaß wir zusammen mit H2 die folgenden ständig anzuwendenden Regeln haben.

**Satz H.2** *Es sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Dann ist*

1. $f(0) = 0$ *und*
2. *für jede Linearkombination ist* $f(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f(x_j)$.

**Bemerkung H.3** *Statt $\mathrm{Hom}(U, V)$ ist auch $\mathrm{L}(U, V)$ gebräuchlich – $L$ von linear –, für $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ auch $U \xrightarrow{f} V$.*

**Beispiele H.4**

1. *Für jede $n \times m$ Matrix $A$ liefert*

$$f : K^m \to K^n,\ x \mapsto f(x) := Ax$$

*einen Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$.*

2. *Nehmen wir als Raum $U$ die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig differenzierbaren Funktionen, als $V$ die auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen und als $f$ die Abbildung "Differenzieren", die also jeder Funktion in $U$ ihre Ableitung, die dann in $V$ liegt, zuordnet, so ist dies nach den elementaren Regeln für das Differenzieren einer Summe und das Behandeln von Zahlen-Faktoren ein Homomorphismus.*

3. *Dies kann man auf kompliziertere "Differentialoperatoren" ausdehnen, die etwa auch höhere Ableitungen und Kombinationen von verschiedenen Ableitungen ein und derselben Funktion liefern. Auch hier entstehen Homomorphismen. So etwas taucht etwa bei Schwingungsproblemen auf.*

4. *Einer auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktion $g(t)$ können wir ihre Stammfunktion $G(x) := \int_0^x g(t)dt$ zuordnen, die selbst wieder auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Nach den Regeln über das Integrieren einer Summe und das Umgehen mit Zahlen-Faktoren ist dies wieder ein Homomorphismus, genauer eine Endomorphismus im Raum der auf ganz $\mathbb{R}$ stetigen Funktionen.*
5. *Weitere physikalisch relevante Beispiele sind etwa die "partiellen Differentialoperatoren" $\nabla$ und $\Delta$, die Sie bald in Ihrer Physikvorlesung kennenlernen werden.*

Wenn wir also im Weiteren Homomorphismen studieren, so gelten diese Ergebnisse stets für die durch Matrizen gegebene Abbildungen aber gleichzeitig bekommen wir Aussagen über Differentialoperatoren, die Sie speziell im Zusammenhang mit den in der Physik allgegenwärtigen Differentialgleichungen brauchen werden.
Eine erste solche zentrale Aussage ist

**Satz H.5** *"Ein Homomorphismus ist durch seine Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt,"*
*d.h. sind $U, V$ zwei reelle oder zwei komplexe Vektorräume, $(u_1, ..., u_m)$ eine Basis in $U$, und ist $(y_1, ..., y_m)$ eine beliebige Familie in $V$, so gibt es genau einen Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ mit*

$$f(u_j) = y_j \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

*Für ihn gilt*

$$x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j \mapsto f(x) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j.$$

**Beweis**: Da $(u_1, ..., u_m)$ Basis von $U$ ist, besitzt jedes $x \in U$ eine eindeutig bestimmte Darstellung als $x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j$. Damit ist durch

$$x \mapsto f(x) := \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j$$

eine Abbildung $f : U \to V$ definiert, für die trivialerweise $f(u_j) = y_j$ gilt, und die überdies, wie Sie leicht nachrechnen können, die Forderungen H1 und H2 erfüllt. Somit ist diese Abbildung $f$ ein Homomorphismus. Ist nun $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ irgend ein Homomorphismus, mit $g(u_j) = y_j \quad (j = 1, 2, ..., m)$, so gilt mit Satz H.2

$$g(x) = g(\sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j g(u_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j = f(x),$$

sodaß also $g = f$. Der Homomorphismus ist also eindeutig bestimmt. □

Für den Spezialfall, daß $U := K^m$ mit der Basis $(u_1, ..., u_m)$ aus den kanonischen Einheitsvektoren $(e_1, ..., e_m)$ und $V := K^n$ ist, können wir einen solchen Homomorphismus sofort durch eine Matrix beschreiben, wenn wir nur an den Spruch

*die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren*

denken. Bilden wir nämlich die Matrix $Y$, deren Spalten gerade der Reihe nach die vorgegeben Vektoren $y_j \in K^n$ sind, so liefert ja

$$K^m \ni x \mapsto f(x) := Yx \in K^n$$

einen Homomorphismus, für den eben $f(e_j) := Ye_j = y_j$ ist, der also gerade die gegebene Aufgabe löst.

Abbildungen kann man unter geeigneten Randbedingungen zusammensetzen, indem man erst die eine und danach die andere ausführt. Dies geht natürlich auch bei Homomorphismen.

**Satz und Definition H.6** *Es seien $U, V, W$ Vektorräume, $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gelten*

1. *Durch $\mathrm{id}_U : U \to U, u \mapsto \mathrm{id}_U(u) := u$ ist ein Homomorphismus $\in \mathrm{Hom}(U, U)$ gegeben, die sogenannte Identität in $U$.*
2. *Durch $g \circ f : u \mapsto g(f(u))$ ist ein Homomorphismus $g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$ erklärt. (Reihenfolge beachten!)*
3. *Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist $g$ surjektiv.*
4. *Ist $g \circ f$ injektiv, so ist $f$ injektiv.*
5. *Gibt es zu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ ein $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$, sodaß*

   $$g \circ f = \mathrm{id}_U, \; f \circ g = \mathrm{id}_V,$$

   *so heißen $f$ und $g$ zueinander inverse "Isomorphismen". Man notiert dann auch $g = f^{-1}$. In dieser Situation sind $g$ und $f$ beide bijektiv.*
   *Gibt es einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ zwischen den Räumen $U$ und $V$, so heißen diese Räume "isomorph".*
6. *Für die durch passende Matrizen dargestellten Homomorphismen $f_A : x \mapsto Ax$ und $g_B : y \mapsto By$ ist $g_B \circ f_A : x \mapsto BAx$, d.h. das Hintereinanderausführen entspricht der Matrixmultiplikation. Zueinander inverse Isomorphismen im $K^n$ werden durch zueinander inverse Matrizen beschrieben.*

**Beweis**: 1.: Daß für $\mathrm{id}_U$ die Eigenschaften H1 und H2 gelten, können Sie wohl selbst.
2.: Wir haben für $g \circ f$ die Eigenschaften H1 und H2 nachzuweisen, die für $f$ und $g$ jeweils einzeln gelten:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u_1 + u_2) = g(f(u_1 + u_2)) &\overset{H1,f}{=} g(f(u_1) + f(u_2)) \\ &\overset{H1,g}{=} g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2).\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(\alpha u) = g(f(\alpha u)) \overset{H2,f}{=} g(\alpha f(u)) \overset{H2,g}{=} \alpha g(f(u)) = \alpha(g \circ f)(u).$$

3.: Ist $g \circ f$ surjektiv, so gibt es zu jedem $w \in W$ ein $u \in U$, mit $w = (g \circ f)(u) = g(f(u))$. Mit $v := f(u)$ ist also $w = g(v)$ und da $w \in W$ beliebig war, ist somit $g$ surjektiv.
4.: Ist $g \circ f$ injektiv, so gilt: Ist $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(u')$, so ist $u = u'$. Ist nun für $u, u' \in U$ schon $f(u) = f(u')$, so ist trivialerweise $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(u')$ also wegen unserer Voraussetzung dann $u = u'$ und damit $f$ injektiv.
6.: Das hatten wir schon im Matrizen-Kapitel gesehen. □

Für das Weitere benötigen wir noch ein paar Begriffe:

**Definition H.7 (Kern, Bild)** *Ist $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ so heißt*
$\ker f := \{u \in U \mid f(u) = 0\}$ *der "Nullraum" oder "Kern" von $f$,*
$\mathrm{im}\, f := \{f(u) \in V \mid u \in U\}$ *das "Bild" von $f$.*
*Dies gilt natürlich auch für den durch eine $n \times m$-Matrix $A$ dargestellten Homomorphismus $f_A$. Wir bezeichnen hier kurz*
$\ker A := \ker f_A = \{x \in K^m \mid Ax = 0\}$ *als den "Kern" von $A$ und*
$\mathrm{im}\, A := \mathrm{im}\, f_A = \{Ax \in K^n \mid x \in K^m\}$ *als das "Bild" von $A$.*

**Satz und Definition H.8 (Rang, Defekt)** $\ker f$ *und* $\operatorname{im} f$ *sind Unterräume von* $U$ *bzw.* $V$*. Man nennt die Dimension des Bildes den "Rang" von* $f$ *:* $\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{im} f$*, und die Dimension des Kernes den "Defekt" von* $f$ *:* $\operatorname{def} f := \dim \ker f$*.*
*Entsprechend der vorigen Definition redet man auch von dem Rang einer Matrix bzw. dem Defekt einer Matrix.*

**Beweis**: (der Unterraum-Aussagen:) Wegen $f(0) = 0$ ist $0 \in \ker f$ und $0 \in \operatorname{im} f$.
Sind $x, y \in \ker f, \alpha, \beta \in K$, so ist $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, also $\alpha x + \beta y \in \ker f$. Somit ist $\ker f$ ein Unterraum.
Sind $v, w \in \operatorname{im} f$, so gibt es $x, y \in U$, sodaß $v = f(x), w = f(y)$. Dann gilt für beliebige Koeffizienten $\alpha, \beta \in K : \alpha v + \beta w = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \in \operatorname{im} f$.
Somit ist auch $\operatorname{im} f$ ein Unterraum. □

Diese Begriffe von Kern und Bild werden uns insbesonder im Zusammenhang mit linearen Gleichungen aller Arten beschäftigen, da wir über sie etwa formulieren können, ob eine Gleichung überhaupt lösbar bzw. eindeutig lösbar ist. Eine Reihe wichtiger Aussagen darüber enthält der folgende Satz, der für allgemeine Homomorphismen formuliert ist, aber natürlich insbesondere für die "Matrix-Homomorphismen" $f_A$ gilt.

**Satz H.9** *Es sei* $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$*. Dann gelten*

1. $f$ *injektiv* $\Leftrightarrow \ker f = (0)$.
2. $f$ *surjektiv* $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = V$.
3. $f$ *bijektiv* $\Leftrightarrow (\ker f = (0)$ *und* $\operatorname{im} f = V)$.

*Sei* $(x_1, ..., x_m)$ *eine Familie in* $U$*. Dann gelten*

4. $(f(x_1), ..., f(x_m))$ *unabhängig (in* $V$*)* $\Rightarrow (x_1, ..., x_m)$ *unabhängig (in* $U$*).*
5. $(x_1, ..., x_m)$ *unabhängig und* $f$ *injektiv* $\Rightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *unabhängig.*
6. $(x_1, ..., x_m)$ *erzeugend für* $U \Rightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *erzeugend für* $\operatorname{im} f$.
7. $(x_1, ..., x_m)$ *erzeugend für* $U$ *und* $f$ *surjektiv* $\Rightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *erzeugend für* $V$*.*

*Ist* $(x_1, ..., x_m)$ *eine Basis von* $U$*, so gilt*

8. $f$ *ist bijektiv* $\Rightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *ist Basis von* $V \Rightarrow f$ *ist Isomorphismus* $\Rightarrow f$ *bijektiv.*

**Beweis**:

1. $f$ injektiv liefert insbesondere, daß $f(x) = 0$ nur für $x = 0$ gelten kann. Ist $\ker f = (0)$ und $f(x) = f(y)$, so ist $f(y - x) = 0$, also $y - x \in \ker f$ und damit $y - x = 0$, also $x = y$.
2. Dies folgt trivial aus der Definition.
3. folgt direkt aus 1. und 2..
4. Wir betrachten eine Linearkombination der $x_j$, die 0 ergibt: $0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j$. Dann ist $0 = f(0) = f(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_j)$. Da die $f(x_j)$ unabhängig sind, müssen notwendig alle Koeffizienten $\alpha_j = 0$ sein. Wir haben also gezeigt: Aus $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0$ folgt $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$, d.h. die $(x_1, ..., x_m)$ sind unabhängig.
5. Sei $0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_j)$. Dann ist auch $0 = f(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j)$, d.h. $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \in \ker f = (0)$. Also ist $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0$ und, da die $x_j$ unabhängig sind, sind also alle $\alpha_j = 0$. Somit sind also mit dem selben Schluß wie eben nun die $f(x_j)$ unabhängig.

6. Sei $y \in \operatorname{im} f$. Dann gibt es ein $x \in U$, mit dem $y = f(x)$. Da $(x_1, ..., x_m)$ erzeugend für $U$ ist, kann man $x$ darstellen als $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j$. Dann ist $y = f(x) = f(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f(x_j)$, d.h. $(f(x_1), ..., f(x_m))$ erzeugt $\operatorname{im} f$.
7. Dies ist wegen 2. und 6. trivial.
8. Als Basis ist $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig und erzeugend.

   Ist $f$ bijektiv, so injektiv und surjektiv. Also ist $(f(x_1), ..., f(x_m))$ nach 5. unabhängig und nach 7. erzeugend für $V$, also Basis von $V$.

   Ist $(f(x_1), ..., f(x_m))$ Basis von $V$, so gibt es nach Satz H.5 einen Homomorphismus $g \in \operatorname{Hom}(V, U)$, der $g : f(x_j) \mapsto x_j \quad (j = 1, 2, ..., m)$ bewirkt. Für ihn ist dann $g \circ f = \mathrm{id}_U$; denn es gilt dann für alle $j$

   $$x_j \overset{f}{\mapsto} f(x_j) \overset{g}{\mapsto} g(f(x_j)) = x_j$$

   und da $(x_1, ..., x_m)$ eine Basis ist und trivialerweise auch für alle $j$ ja $\mathrm{id}_U(x_j) = x_j$ gilt, muß $g \circ f = \mathrm{id}_U$ sein.

   Ferner ist $f \circ g = \mathrm{id}_V$; denn es ist wieder für alle $j$

   $$f(x_j) \overset{g}{\mapsto} g(f(x_j)) = x_j \overset{f}{\mapsto} f(x_j)$$

   und da $(f(x_1), ..., f(x_m))$ eine Basis und ebenfalls stets $\mathrm{id}_V(f(x_j)) = f(x_j)$ ist, folgt $f \circ g = \mathrm{id}_V$ . Damit ist $f$ ein Isomorphismus.

   Da $\mathrm{id}_U$ und $\mathrm{id}_V$ jeweils injektiv und surjektiv sind, müssen also nach Satz und Definition H.6 beide Abbildungen $f$ und $g$ jeweils injektiv und surjektiv, d.h. bijektiv sein. □

Wenden wir dies auf den durch eine Matrix $A$ gegebenen Homomorphismus an, so sind ja die kanonischen Einheitsvektoren $e_i$ ein Erzeugenden-System für den Urbildraum und damit nach Satz H.9,6. deren Bilder erzeugend für das Bild $\operatorname{im} A$. Nun gilt aber

*die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren*

und damit erzeugen also die Spalten einer Matrix gerade den Bildraum der Matrix. Wir haben also

**Satz H.10**

1. *Die Spalten einer Matrix sind ein Erzeugendensystem für das Bild,*
2. *der Rang einer Matrix ist die Maximalzahl unabhängiger Spalten. Man redet daher auch von dem "Spaltenrang" einer Matrix.*

Zwischen dem Rang, also der Dimension des Bildes, und dem Defekt, also der Dimension des Kerns besteht eine wichtige Relation:

**Satz H.11** *Für jeden Homomorphismus $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ ist*

$$\operatorname{def} f + \operatorname{rg} f = \dim U,$$

*bzw. für Matrizen $A \in K^{n \times m}$ formuliert*

$$\operatorname{def} A + \operatorname{rg} A = m \ (= \dim K^m).$$

*Letzteres kann man auch so formulieren:*

$$\begin{aligned}\operatorname{def} A &= \dim \ker A = m - \operatorname{rg} A \\ &= (\textit{Anzahl aller Spalten}) - (\textit{Maximalzahl unabhängiger Spalten})\end{aligned}$$

**Beweis**: Wir wählen eine Basis $(u_1, ...., u_s)$ von $\ker f \subset U$ – dann ist $s = \operatorname{def} f$ – und ergänzen sie zu einer Basis $(u_1, ...., u_s, u_{s+1}, ..., u_m)$ von ganz $U$. Dann ist nach Satz H.9 die Familie $(f(u_1), ..., f(u_m))$ erzeugend für $\operatorname{im} f$. Nach Konstruktion ist aber $f(u_1) = ... = f(u_s) = 0$, sodaß schon $(f(u_{s+1}), ..., f(u_m))$ erzeugend für $\operatorname{im} f$ ist. Sei nun $\sum_{j=s+1}^{m} \alpha_j f(u_j) = 0$. Dann ist also $0 = f\left(\sum_{j=s+1}^{m} \alpha_j u_j\right)$, d.h. es ist $\sum_{j=s+1}^{m} \alpha_j u_j \in \ker f$. Da $(u_1, ...., u_s)$ eine Basis von $\ker f$ war, ist mit gewissen Koeffizienten $\beta_j$ also $\sum_{j=s+1}^{m} \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^{s} \beta_j u_j$. Nun sind aber $(u_1, ...., u_m)$ als Basis unabhängig, sodaß notwendig alle Koeffizienten $\alpha_j$ und $\beta_j$ verschwinden müssen. Insbesondere ist also notwendig $\alpha_{s+1} = ... = \alpha_m = 0$. Folglich sind also die $(f(u_{s+1}), ..., f(u_m))$ auch unabhängig und somit eine Basis für $\operatorname{im} f$.
Also ist $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f = m - s$ oder $\dim U = m = s + \operatorname{rg} f = \operatorname{def} f + \operatorname{rg} f$, was behauptet war. □

Letzteres liefert uns nun auch eine wichtige Charakterisierung von Isomorphismen bzw. von invertierbaren Matrizen.

**Satz H.12** *Es seien $U, V$ Räume derselben Dimension,* $\dim U = \dim V = m$, *und* $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$. *Dann sind äquivalent:*

1. *$f$ ist Isomorphismus.*
2. *$f$ ist injektiv.*
3. *$f$ ist surjektiv.*
4. *$f$ bildet eine Basis von $U$ in eine Basis von $V$ ab.*
5. *$f$ bildet jede Basis von $U$ in eine Basis von $V$ ab.*

**Beweis**: Aus 1. folgen trivialerweise 2. und 3. Zum Beweis, daß *bei gleichen Dimensionen* von $U$ und $V$ schon jeweils eine der Eigenschaften injektiv oder surjektiv die andere impliziert, benutzen wir die eben gezeigte Dimensionsformel:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim U = \dim V.$$

Ist $f$ injektiv, so ist $\ker f = (0)$, also $\dim \ker f = 0$, folglich $\dim \operatorname{im} f = \dim V$ und damit $f$ surjektiv.
Ist $f$ surjektiv, so ist $\operatorname{im} f = V$, also $\dim \operatorname{im} f = \dim V = \dim U$ und somit $\dim \ker f = 0$, also $\ker f = (0)$ und folglich $f$ injektiv.
Die restlichen Aussagen beweist man leicht mit Satz H.9. □

Für Matrizen formuliert bedeutet dies

**Satz H.13** *Ist $A \in K^{n \times n}$, also eine quadratische Matrix, $f := f_A$ der zugehörige Homomorphismus* $\in \operatorname{Hom}(K^n, K^n)$, *so sind äquivalent:*

1. *$f$ ist Isomorphismus.*
2. *$A$ ist invertierbar.*
3. $\operatorname{rg} A = n$.
4. $\ker A = 0$.
5. *Die Spalten von $A$ erzeugen den $K^n$.*
6. *Die Spalten von $A$ sind Basis des $K^n$.*

**Beweis**: Man prüft leicht nach, daß die Identität im $K^n$ durch die $n \times n$ Einheitsmatrix $I_n$ beschrieben wird. Damit folgen:
1. $\Leftrightarrow$ 2.: Ist $f$ ein Isomorphismus, so existiert ein $g \in \operatorname{Hom}(K^n, K^n)$ mit $g \circ f = f \circ g = \operatorname{id}_{K^n}$. Sei $G$ die zugehörige Matrix, dann ist $AG = GA = I_n$ und somit $A$ invertierbar.

Ist andrerseits $A$ invertierbar, so setzte $G := A^{-1}, g : x \mapsto Gx \in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$. Dafür rechnet man leicht nach, daß $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_{K^n}$, also $f$ ein Isomorphismus.
$1 \Rightarrow 3., 4., 5., 6.$: Ist $f$ Isomorphismus, so ist nach Satz H.12 $(f(e_1), ..., f(e_n))$ Basis. Dies sind aber genau die Spalten von $A$. Dies gibt 6.. Als Basis sind sie unabhängig und erzeugend, was 3. und 5. liefert. Zusammen mit der Dimensionsformel folgt auch die Aussage über den Defekt.
Derselbe Zusammenhang zwischen den Spalten von $A$ und den Werten von $f$ auf der kanonischen Basis $(e_1, ..., e_n)$ liefert
bei 6.: $f$ bildet eine Basis in eine Basis ab und ist somit Isomorphismus,
bei 5.: $f$ ist surjektiv, somit Isomorphismus (Satz H.12 und gleiche Dimensionen!),
bei 3.(und analog bei 4.): $\mathrm{rg}\, f = n \Rightarrow \mathrm{def}\, f = 0$ (nach Satz H.11) $\Rightarrow f$ injektiv (nach Satz H.9) $\Rightarrow f$ Isomorphismus (nach Satz H.12), womit in allen Fällen 1. folgt. □

Im Kapitel über Matrizen hatten wir die GAUSS-JORDAN-Elimination behandelt und dabei insbesondere die Invertierbarkeit von Matrizen untersucht. Wir hatten in Satz H.9,5. gesehen, daß die Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix, also insbesondere die GAUSS-JORDAN-Elimination den Rang nicht verändert. Damit folgt insbesondere:

*Geht eine $n \times n$ Matrix $A$ durch* GAUSS-JORDAN-*Elimination über in die Matrix $CA = \hat{A}$ und ist dies die $n \times n$ Einheitsmatrix $I_n$, so ist $A$ invertierbar und $C$ die Inverse.*

Ungeklärt war die Frage nach der Invertierbarkeit von $A$, wenn $\hat{A} \neq I_n$ ist. Dies können wir nun beantworten.
Nach Satz M.10 gilt: Sind $A$ und $C$ invertierbare Matrizen, so ist auch $CA$ invertierbar. GAUSS-JORDAN-Elimination überführt $A$ in $\hat{A} = CA$, wobei $C$ invertierbar ist. Ist also $\hat{A}$ nicht invertierbar, so kann $A$ selbst auch nicht invertierbar sein. Nun betrachten wir die GAUSS-JORDAN-Form $\hat{A}$ einer $n \times n$ Matrix $A$. (Siehe Definition M.14). Es ist dann notwendig $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \hat{A}$.
Fall 1: $\hat{A}$ enthält $n$ Pivotspalten: Dann ist notwendig $\hat{A} = I_n$ und wir wisen, daß in diesem Fall $A$ invertierbar ist.
Fall 2: $\hat{A}$ enthält $r < n$ Pivotspalten: Dann enthalten die Zeilen von $\hat{A}$ mit Nummern $r+1, ..., n$ nur Nullen, d.h. die Spalten von $\hat{A}$ erzeugen nicht den ganzen $K^n$. Nach Satz H.13 ist dann $\hat{A}$ nicht invertierbar, also auch $A$ selbst nicht.
Wir fassen dies zusammen zum

**Satz H.14** *Es sei $A$ eine $n \times n$ Matrix, $(\hat{A}|C)$ die* GAUSS-JORDAN-*Transformierte der Matrix $(A|I_n)$. Dann gilt folgende Alternative:*
*Entweder ist $\hat{A} = I_n$ : Dann ist $A$ invertierbar und $C = A^{-1}$.*
*Oder es ist $\hat{A} \neq I_n$ : Dann ist $A$ nicht invertierbar.*

## Lineare Gleichungen

GAUSS-JORDAN-Elimination hatten wir auch im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen behandelt. Dies greifen wir nun auf der Ebene der Homomorphismen wieder auf.

**Satz H.15** *Es seien $U, V$ Vektorräume (über demselben Körper), $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Wir bezeichnen zu $v \in V$ mit*

$$L(f; v) := \{u \in U \mid f(u) = v\},$$

*also die Menge aller Lösungen der Gleichung $f(u) = v$.*
*Dafür gelten*

1. *$(L(f;v) \neq \emptyset) \Leftrightarrow (v \in \operatorname{im} f)$*
2. *Ist $v \in \operatorname{im} f$ und $u_0 \in L(f;v)$, so ist*

$$L(f,v) = u_0 + \ker f, \text{ d.h. } L(f,v) = \{u \in U \mid u = u_0 + u' \text{ mit } u' \in \ker f\}.$$

**Bemerkung H.16** *Man nennt für $v \neq 0$ die Gleichung $f(u) = v$ eine "inhomogene" Gleichung und $f(u) = 0$ die zugehörige "homogene" Gleichung. Die Lösungen der homogenen Gleichung bilden definitionsgemäß genau den Kern von $f$, also den Unterraum $\ker f \subset U$. Mit diesen Bezeichnungen sagt unser Satz:*

1. *$f(u) = v$ besitzt (mindestens) eine Lösung genau, wenn $v \in \operatorname{im} f$.*
2. *Ist $f(u) = v$ lösbar und $u_0$ irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung, so erhält man alle Lösungen von $f(u) = v$, indem man zu allen Lösungen der homogenen Gleichung jeweils diese spezielle Lösung $u_0$ addiert.*

**Beweis**: 1. ist nach der Definition von $\operatorname{im} f$ klar.
2.: Ist $u_0 \in L(f,v)$ und $u' \in \ker f$, so ist $f(u_0 + u') = f(u_0) + f(u') = v + 0 = v$, sodaß also $u_0 + \ker f \subset L(f,v)$.
Sind umgekehrt $u$ und $u_0$ beide in $L(f,v)$, so ist $0 = v - v = f(u) - f(u_0) = f(u - u_0)$, d.h. $u - u_0 \in \ker f$. Damit ist $u = u_0 + (u - u_0) \in u_0 + \ker f$, also $L(f,v) \subset u_0 + \ker f$. □

Der Kern $\ker f$ ist nach Satz H.11 ein Unterraum von $U$ mit der Dimension $s := \operatorname{def} f = \dim U - \operatorname{rg} f$. Wir sagen dafür (etwas unpräzise) auch:

*Die Gleichung $f(u) = v$ besitzt $s = \operatorname{def} f = \dim U - \operatorname{rg} f$ unabhängige Lösungen.*

**Satz H.17 (Lösungen linearer Gleichungen)** *Es seien $U, V$ endlich-dimensionale lineare Räume, $f \in \operatorname{Hom}(U,V)$. Dann gelten*

1. *$f(u) = v$ ist lösbar, genau wenn $v \in \operatorname{im} f$. Ist $f(u) = v$ lösbar, so gibt es $\dim U - \operatorname{rg} f$ viele unabhängige Lösungen.*

*Insbesondere haben wir die folgenden Spezialfälle:*

2. *$f(u) = v$ ist für jedes $v \in V$ lösbar, genau wenn $\operatorname{rg} f = \dim V$.*
3. *$f(u) = v$ besitzt (wenn überhaupt) stets nur eine Lösung, genau wenn $\operatorname{rg} f = \dim U$.*
4. *$f(u) = v$ ist für jedes $v \in V$ eindeutig lösbar, genau wenn $\operatorname{rg} f = \dim U = \dim V$, also genau wenn $f$ ein Isomorphismus ist.*

**Beweis**: 1. ist die Aussage von Satz H.15.
2. $f(u) = v$ ist genau dann für jedes $v \in V$ lösbar, wenn $\operatorname{im} f = V$, also $\operatorname{rg} f = \dim V$.
3. Sei $f(u) = v$ lösbar. Dann ist die Lösung eindeutig, genau wenn $\ker f = (0)$, d.h. $\dim U - \operatorname{rg} f = 0$.
4. ist eine Zusammenfassung von 2. und 3. und Satz H.12. □

Dies gilt natürlich insbesondere für die durch $n \times m$ Matrizen $A \in K^{n \times m}$ gegebenen Homomorphismen $f \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n) : f(x) = Ax$. Hier ist $\dim U = m =$ die Spaltenzahl, $\dim V = n =$ die Zeilenzahl und $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A =$ der Spaltenrang von $A$. Wir formulieren Satz H.17 für diesen Fall nochmal neu als

**Satz H.18** *Es sei $A \in K^{n \times m}$ eine $n \times m$ Matrix. Dann gelten*

1. *Das Gleichungssystem $Ax = y$ ist lösbar $\Leftrightarrow y \in \operatorname{im} A \Leftrightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|y)$.*
   *Dabei ist $(A|y)$ die um die Spalte $y$ verlängerte Matrix. (Vergleiche Kapitel M).*
   *Ist $Ax = y$ lösbar, so gibt es $\operatorname{def} A = m - \operatorname{rg} A =$ (Spaltenzahl - Maximalzahl unabhängiger Spalten) viele unabhängige Lösungen.*

*Wir haben wieder folgende Spezialfälle:*

2. *$Ax = y$ ist für jedes $y \in K^n$ lösbar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = n \Leftrightarrow$ Die Spalten von $A$ erzeugen den $K^n$.*
3. *$Ax = y$ ist, wenn überhaupt, dann jeweils eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \operatorname{rg} A = m \Leftrightarrow$ Die Spalten von $A$ sind unabhängig.*
4. *$Ax = y$ ist für jedes $y \in K^n$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow n = m = \operatorname{rg} A \Leftrightarrow A$ invertierbar.*

**Beweis**: Wir haben nur wenig zusätzlich zu zeigen.
Zu 1.: Die Spalten von $A$ erzeugen im $A$. Somit folgt

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{im} A &\Leftrightarrow y \in \operatorname{span}(Ae_1, ..., Ae_m) \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{span}(Ae_1, ..., Ae_m) = \dim \operatorname{span}(Ae_1, ..., Ae_m, y), \end{aligned}$$

d.h. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|y)$.
Für die Defektformel siehe Satz H.11.
Zu 2.: Es ist $\operatorname{rg} A = \dim K^n = n \Leftrightarrow \operatorname{span}(Ae_1, ..., Ae_m) = K^n$.
Zu 3.: Es ist $\operatorname{rg} A = m \Leftrightarrow A$ besitzt $m$ unabhängige Spalten (und das sind ja alle Spalten von $A$!).
Zu 4.: Siehe Satz H.13 □

Im Kapitel über Matrizen hatten wir gesehen, daß GAUSS-JORDAN-Elimination die Lösungsmenge nicht verändert. Nehmen wir also an, wir hätten das System $Ax = y$ auf $\hat{A}x = b$ transformiert, wobei $\hat{A}$ in GAUSS-JORDAN-Form (siehe Definition M.14.) Dann bedeuten die Aussagen von Satz H.18:

**Satz H.19**

1. *$\hat{A}x = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ die zu den "Nullzeilen" von $\hat{A}$ gehörenden Komponenten von $b$ sind selbst $= 0$.*

   *Ist das System lösbar, so hat es soviel unabhängige Lösungen, wie $\hat{A}$ an "Nicht-Pivot-Spalten" enthält.*
2. *$\hat{A}x = b$ ist für jedes $b$ lösbar $\Leftrightarrow \hat{A}$ enthält keine Nullzeile.*
3. *$\hat{A}x = b$ ist wenn überhaupt, dann jeweils eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \hat{A}$ enthält nur Pivot-Spalten*
4. *$\hat{A}x = b$ ist für jedes $b$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow \hat{A} = I_n = (n \times n)$-Einheitsmatrix.*

## Basistransformation

Ein wichtiges Handwerkszeug beim Umgang mit Matrizen oder allgemeiner mit Homomorphismen zwischen endlichdimensionalen Räumen ist das Darstellen mittels geeigneter Basen und der Übergang von einer solchen Darstellung zu einer anderen. Wir beginnen mit folgendem

**Problem H.20** *Es seien $B = (u_1, ..., u_m)$ und $B' = (u'_1, ..., u'_m)$ zwei Basen in $K^m$. Dann besitzt jeder Vektor $u \in K^m$ eindeutig bestimmte Darstellungen*

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j = \sum_{i=1}^{m} \eta_i u'_i.$$

*Deren Koeffizientenvektoren seien* $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$.

*Wie erhält man $y$ aus $x$?*

**Lösung** *Schreibt man die Spaltenvektoren der jeweiligen Basis als die Spalten einer Matrix $R$ für $B$, bzw. einer Matrix $S$ für $B'$, (die Matrizen $R$ und $S$ sind dann invertierbar), so haben wir ja*

$$u = Rx = Sy,$$

*und wir bekommen*

$$y = S^{-1}Rx.$$

Von speziellem Interesse ist natürlich der Fall, daß eine der Basen die der kanonischen Einheitsvektoren ist. Hier ist dann eine der beiden Matrizen $R$ oder $S$ die Einheitsmatrix und fällt damit in der eben gewonnenen Formel weg.

Kombinieren wir dieses Ergebnis noch mit einer durch eine Matrix $A$ dargestellten Abbildung:

**Problem H.21** *Es sei $A$ eine $n \times m$-Matrix, $B = (u_1, ..., u_m)$ eine Basis im $K^m$, $B' = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis im $K^n$. Zu $u \in K^m$ sei $v := Au$, ferner haben wir die Darstellungen bezüglich der anderen Basen*

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \eta_i v_i.$$

*Deren Koeffizientenvektoren seien wieder* $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$.

*Wie erhält man $y$ aus $x$?*

**Lösung** *Schreibt man die Spaltenvektoren der jeweiligen Basis als die Spalten einer Matrix $R$ für $B$, bzw. einer Matrix $S$ für $B'$, so haben wir ja*

$$u = Rx, \qquad v = Sy,$$

*und wir bekommen*

$$Sy = v = Au = ARx, \quad \text{also} \quad y = S^{-1}ARx.$$

Man sagt dafür auch

**Satz und Bezeichnung H.22** *In der Situation des vorigen Problems wird der bezüglich der kanonischen Basen durch die Matrix $A$ dargestellte Homomorphismus $f$ bezüglich der neuen Basen durch die Matrix $A' := S^{-1}AR$ dargestellt.*
*Ist $A' = (\alpha'_{ij})$, so ist für die Elemente der neuen Basen $u_j, v_i$, dann*

$$f(u_j) = Au_j = \sum_i \alpha'_{ij} v_i.$$

**Beweis**: $u_j$ ist die $j$-te Spalte von $R$ und somit $u_j = Re_j$. Dann ist

$$f(u_j) = Au_j = ARe_j = SS^{-1}ARe_j = SA'e_j$$

und wegen $S = (v_1, ..., v_n)$ und $A'e_j = \begin{pmatrix} \alpha'_{1j} \\ \vdots \\ \alpha'_{nj} \end{pmatrix}$ ist dies gerade die behauptete Formel. □

Ist speziell $n = m$, d.h. betrachten wir eine quadratische Matrix $A$, die also einen Endomorphismus des $K^n$ vermittelt, so können wir in dem Urbild- und dem Bild-Exemplar des $K^m$ dieselbe Basis wählen, was dann dazu führt, daß die transformierenden Matrizen $R$ und $S$ übereinstimmen. Bezüglich derselben neuen Basis in beiden Räumen geht dann die Matrix $A$ über in die Matrix $A' := S^{-1}AS$.

**Definition H.23 (ähnlich)** *Zwei $n \times n$-Matrizen heißen "ähnlich", wenn es eine invertierbare Matrix $S$ gibt, sodaß $A' := S^{-1}AS$.*

Dieser Sonderfall wird uns noch ausgiebig beschäftigen.

Durch die eben behandelten Basistransformationen können wir jede Matrix auf eine besonderes einfache Form bringen.
Gegeben sei ein $n \times m$-Matrix $A$, die uns natürlich über $x \mapsto y := f(x) := Ax$ eine Homomorphismus $f : K^m \to K^n$ beschreibt. Es sei $s := \operatorname{def} f = \operatorname{def} A$, $r := \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} A$. Im Beweis von Satz H.11 hatten wir eine Basis $B = (u_1, ..., u_m)$ von $U := K^m$ konstruiert, für die $(u_1, ..., u_s)$ eine Basis von $\ker f$, als hier von $\ker A$ ist, und $(f(u_{s+1}), ..., f(u_m))$, also hier $(Au_{s+1}, ..., Au_m)$ eine Basis von $\operatorname{im} f = \operatorname{im} A$ ist. Indem wir letztere noch zu einer Basis von $K^n$ ergänzen und umnumerieren erhalten wir

Es gibt Basen $B = (u_1, ..., u_m)$ von $K^m$ und $B' = (v_1, ..., v_n)$ von $K^n$, sodaß

1. $f(u_j) = Au_j = v_j, \ (j = 1, ..., r)$ und
2. $f(u_j) = 0, \ (j = r + 1, ..., m)$.

Nach Satz und Bezeichnung H.22 können wir aber die Matrixdarstellung $A'$ von $f$ bezüglich dieser Basen sofort hinschreiben:
Für die Spalte $a'_{.j}$ von $A'$ gilt aus der Wirkung von $f$ :

$$a'_{.j} = \begin{cases} e_j & \text{für } j = 1, ..., r, \\ 0 & \text{für } j = r + 1, ..., m \end{cases}$$

Mit $r = \operatorname{rg} f$ hat also die Matrix $A'$ die Gestalt

$$A' = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{n,m}.$$

Dies liefert

**Satz H.24**

1. *Zu jedem Homomorphismus $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ gibt es Basen, bezüglich derer $f$ die Matrixdarstellung*
$$A' = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{n,m}$$
*hat. Dabei ist $r = \operatorname{rg} f$.*
2. *Zu jeder Matrix $A$ gibt es invertierbare Matrizen $R, S$, sodaß $A' := S^{-1}AR$ die obige Gestalt hat, wobei wieder $r = \operatorname{rg} A$.*

**Beweis**: 1. hatten wir eben gezeigt, 2. folgt aus Satz und Bezeichnung H.22 für die "richtigen" Basen. □

Den Rang eines Homomorphismus hatten wir erklärt als die Dimension seines Bildes und die ist natürlich unabhängig davon bezüglich welcher Basen wir den Homomorphismus darstellen. Alle so entstehenden Matrixdarstellungen haben also den selben Rang. Dies bedeutet

**Satz H.25** *Sind $R, S$ invertierbare Matrizen, so haben $A$ und $A' := S^{-1}AR$ den selben (Spalten-)Rang.*

Unter den so aus einer Matrix $A$ erhaltenen Matrizen ist auch eine von der speziellen Gestalt von Satz H.24 und die hat offenbar gleich viel unabhängige Zeilen und unabhängige Spalten.
Erklären wir also den "Zeilenrang" einer Matrix als die Maximalzahl unabhängiger Zeilen, so stimmen für diese Matrix offenbar Spaltenrang und Zeilenrang überein. Dies gilt allgemein.

**Satz H.26** *Für jede Matrix ist Zeilenrang = Spaltenrang.*

Zum Beweis benutzen wir den schon im Kapitel M verwendeten Begriff der transponierten Matrix.
Zur Erinnerung:

**Fakt H.27** *Beim Transponieren werden Zeilen zu Spalten und Spalten zu Zeilen und damit ist der Zeilenrang von $A$ gleich dem Spaltenrang von $A^T$ und umgekehrt.*

Mit den Abkürzungen sprg := Spaltenrang, zrg := Zeilenrang ist dann für die Matrix $A' = S^{-1}AR$ der speziellen Form von Satz H.24 nach dem oben Gesagten

$$\begin{aligned}\operatorname{sprg} A &= \operatorname{sprg} A' = \operatorname{zrg} A' = \operatorname{sprg}(A')^T \\ &= \operatorname{sprg}(S^{-1}AR)^T = \operatorname{sprg}(R^T A^T (S^T)^{-1}) = \operatorname{sprg} A^T = \operatorname{zrg} A,\end{aligned}$$

womit Satz H.26 gezeigt ist.

## Etwas Differentialgleichungen

**Radioaktiver Zerfall:** Die Anzahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome ist proportional der Anzahl $u(t)$ der vorhandenen:

$$u'(t) = -\lambda u(t), \qquad \text{mit einem } \lambda \in \mathbb{R}.$$

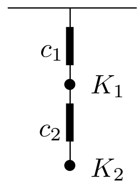
**Harmonischer Oscillator:** Bezeichnet $u(t)$ die Auslenkung eines an einer Feder aufgehängten Massenpunktes aus der Ruhelage, so wird sein Bewegungsverhalten (mit Dämpfung und externer Anregung) beschrieben durch

$$u''(t) = (\delta - q^2)u(t) - 2qu'(t) + \beta(t), \quad (q, \delta \in \mathbb{R}).$$

**Gekoppelte Schwingungen:** Zwei Kugeln je der Masse 1 seien an Federn mit Konstanten $c_1, c_2$ wie skizziert aufgehängt. Es bezeichne $u_1(t)$ bzw. $u_2(t)$ die vertikale Auslenkung der entsprechenden Kugel aus der Ruhelage. Dann wird der Bewegungsablauf (ohne Dämpfung und externe Anregung) beschrieben durch

$$\begin{array}{rcrcr} u_1'' &=& -c_1u_1(t) + c_2(u_2(t) - u_1(t)) &=& -(c_1+c_2)u_1(t) + c_2u_2(t) \\ u_2'' &=& -c_2(u_2(t) - u_1(t)) &=& c_2u_1(t) - c_2u_2(t). \end{array}$$

Dies sind Beispiele von linearen Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungssystemen.




Es sei nun zunächst einmal exemplarisch gezeigt, wie man die bisher erarbeiteten Ergebnisse der Linearen Algebra hier sinnvoll einsetzen kann.

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, t \mapsto y(t) := (\eta_1(t), ..., \eta_n(t))^T$$

bezeichne stetig differenzierbare Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{C}^n$. Dazu sei

$$y' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, t \mapsto y'(t) := (\eta_1'(t), ..., \eta_n'(t))^T$$

die Ableitung. Sie ist, d.h. alle ihre Komponenten $\eta_i'(t)$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.
Ferner sei $A := (\alpha_{ij})_{nn} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine fest gewählte Matrix (mit komplexen Zahlen als Elementen).

**Bezeichnung H.28**

1. *Wir nennen eine Abbildung*

$$D : y \mapsto D(y) := y' - Ay, \quad \textit{d.h.} \quad (D(y))(t) := y'(t) - Ay(t),$$

*einen linearen Differential-Operator erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.*

2. *Für eine stetige Funktion*

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, t \mapsto b(t) := (\beta_1(t), ..., \beta_n(t))^T$$

*heißt*

$$D(y) = b, \ \textit{d.h.}\ y' = Ay + b$$

*ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten).*
*Ist $b(t) \equiv 0$, so reden wir von einem homogenen System, andernfalls von einem inhomogenen.*

Mit den Funktionenräumen

$$U := \{y \mid \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, y \text{ stetig differenzierbar } \} \text{ und}$$
$$V := \{y \mid \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, y \text{ stetig } \}$$

ist offenbar $D \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Dies rechtfertigt die Benennung "linearer Differentialoperator" und gibt den Zusammenhang mit dem bisher Betrachteten.
Formulieren wir die Beispiele in dieser Sprache.

**Radioaktiver Zerfall:**
Wir setzen $n = 1$, identifizieren $y(t) := u(t)$, $A := (-\lambda)$, das ist also eine $1 \times 1$ – Matrix und bekommen dann

$$Dy := y' - Ay = y' + \lambda y$$

und die Gleichung des Zerfalls entspricht der homogenen Aufgabe

$$Dy = 0.$$

**Oscillator:**
Hier taucht in der Gleichung die zweite Ableitung $u''$ auf, bei unserem Differentialoperator aber nur die erste Ableitung. Dies scheint nicht zusammen zu passen. Da hilft folgender Trick. Wir setzen $n = 2$, d.h. $y(t) := \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix}$ und identifizieren

$$\eta_1(t) := u(t), \quad \eta_2(t) := u'(t) = \eta_1'(t).$$

Damit ist also

$$y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix}$$

und wir können nun für die Oscillator-Gleichung das System schreiben

$$\begin{aligned} \eta_1'(t) =& \eta_2(t) \\ \eta_2'(t) =& (\delta - q^2)\eta_1(t) - 2q\eta_2(t) + \beta(t) \end{aligned}$$

oder mit der Matrix $A$ und dem "Inhomogenitätsvektor" $b$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\delta - q^2) & -2q \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

kompakt als

$$y'(t) = Ay(t) + b(t).$$

Es ist also wieder die Form $D(y) = 0$ bzw. $D(y) = b(t)$ mit einem linearen Differentialoperator erster Ordnung $D$ erhalten.

**Gekoppelte Pendel:**
Analog kann man hier vorgehen. Setzen wir

$$\eta_1(t) := u_1(t),\ \eta_2(t) := u_1'(t) = \eta_1'(t),\ \eta_3(t) := u_2(t),\ \eta_4(t) := u_2'(t) = \eta_3'(t),$$

so ist also

$$y(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \\ u_2(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} \text{ und } y'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_1''(t) \\ u_2'(t) \\ u_2''(t) \end{pmatrix}$$

und wir bekommen das System

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_1''(t) \\ u_2'(t) \\ u_2''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 - c_2 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & 0 & -c_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \\ u_2(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix},$$

also wieder von der betrachteten Gestalt

$$y'(t) = A \cdot y(t),$$

d.h. von der Form $D(y) = 0$.
Diese "Übersetzung" läßt sich zu einem allgemeinen Prinzip für Differentialgleichungssysteme ausbauen.

In jedem der Beispiele haben wir also

– zwei lineare (Funktionen-)Räume $U, V$,

– dazwischen einen linearen (Differential-)Operator $D \in \mathrm{Hom}(U, V)$,

– ein Element $b \in V$

und interessieren uns für die Lösungen:

$$L(D;b) := \{y \in U \mid Dy = b\}.$$

Der oben gezeigte abstrakte Satz H.15 liefert somit in dieser Situation:

**Satz H.29** *Ist $y_*$ eine Lösung des inhomogenen Systems*

$$Dy := y' - Ay = b,$$

*so ist*

$$L(D;b) = \{y_* + y_h \mid y_h \in \ker D\}$$

*die Gesamtheit aller Lösungen.*
*Dies bedeutet:*
$\ker D$ *besteht aus allen Lösungen der homogenen Gleichung*

$$Dy := y' - Ay = 0$$

*und man bekommt alle Lösungen der inhomogenen Gleichung, indem man zu einer beliebig gewählten Lösung $y_*$ der inhomogenen jede Lösung der homogenen Gleichung addiert.*

Der Kern eines linearen Operators ist ein linearer Raum, d.h. die Lösungen unserer homogenen Differentialgleichung $Dy = 0$ bilden einen linearen Raum und – wenn der endlichdimensional ist – können wir alle Lösungen als Linearkombinationen einer Basis darstellen. Diese Situation liegt nun hier tatsächlich vor und ist physikalisch gesprochen die Folge davon, daß etwa das Verhalten eines schwingungsfähigen Systems von Massenpunkten als Überlagerung besonders einfacher Schwingungen gesehen werden kann und andrerseits ohne äußere Anregung durch seinen Zustand, d.h. durch Lage und Impuls zu einem Zeitpunkt $t_0$ für alle späteren Zeiten festliegt.

**Lemma H.30** *Ist $y$ Lösung von $Dy = 0$, d.h. ist $y' = Ay$ und hat für eine Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion $y$ eine Nullstelle, d.h. ist $y(t_0) = 0$, so ist $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

**Beweis**: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $y'(t) = Ay(t)$, sodaß also für $i = 1, ..., n$ gilt

$$\eta_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_j(t).$$

Durch Integration folgt

$$\eta_i(t) = \eta_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \eta_i'(\tau)d\tau = 0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\eta_j(\tau)d\tau.$$

Mit

$$\eta(t) := \max\nolimits_{i=1}^{n} \left\{ \max_{|\tau - t_0| \le |t - t_0|} \mid \eta_i(\tau)| \right\}$$

und

$$a := \max_{i,j} |\alpha_{ij}|$$

ist damit

$$0 \le \eta(t) \le \left| \int_{t_0}^{t} n \cdot a \cdot \eta(t)\, d\tau \right| = \eta(t) \cdot n \cdot a \cdot |t - t_0|.$$

Ist $t$ so nahe bei $t_0$, daß $n \cdot a \cdot |t - t_0| < 1$, so folgt aus der letzten Ungleichung notwendig $\eta(t) = 0$, sodaß also auch $\eta(\tau) = 0$ für $|\tau - t_0| < |t - t_0|$. Diesen Schluß kann man iterieren und erhält daraus, daß notwendig $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. □

Wir erhalten damit als

**Folgerung H.31**

1. *Für jedes $y_0 \in \mathbb{C}^n$ hat das "Anfangswertproblem"*
$$Dy = b,\ y(0) = y_0,$$
*höchstens eine Lösung.*
2. *Die Abbildung*
$$\varphi : \ker D \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ y \longmapsto y(0),$$
*ist injektiv und damit*
$$\dim \ker D \leq n.$$

**Beweis**: 1. Sind $y_1, y_2$ Lösungen von $Dy = b$, die beide $y_1(0) = y_2(0) = y_0$ erfüllen, so gilt für $y := y_1 - y_2$ :

$$\begin{aligned} Dy &= D(y_1 - y_2) = Dy_1 - Dy_2 = b - b = 0, \\ y(0) &= y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0 \end{aligned}$$

und mit Lemma H.30 folgt, daß $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
2. Stimmen zwei Lösungen von $Dy = 0$ an der Stelle $t_0 = 0$ überein, so sind sie nach 1. identisch. Dies besagt aber gerade, daß die Abbildung $\varphi$ injektiv ist. □

Tatsächlich ist bei den uns hier interessierenden linearen Differentialoperatoren die Situation noch viel schöner.

**Satz H.32** *Die Abbildung*

$$\varphi : \ker D \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ y \longmapsto y(0),$$

*ist auch surjektiv und damit bijektiv, d.h. zu jedem $y_0 \in \mathbb{C}^n$ gibt es genau eine Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe*

$$Dy = y' - Ay = 0,\ y(0) = y_0.$$

Zusammen mit dem vorigen Satz bedeutet dies, daß $Dy = 0$ genau $n$ unabhängige Lösungen besitzt. Eine solche Basis des Lösungsraumes nennt man ein "Fundamentalsystem" zu dem Differentialoperator $D$.

Einen allgemeinen Beweis für diesen Satz können wir erst später führen, am Beispiel des Oscillators sei das jetzt aber ausgeführt.

### Der lineare Oscillator

Als Differentialgleichung zweiter Ordnung geschrieben haben wir die Aufgabe:
*Suche zweimal stetig differenzierbare Funktionen $u(t)$, für die*

$$L(u)(t) := u''(t) + 2qu'(t) + (q^2 - \delta)u(t) = \begin{cases} 0 \\ \beta(t) \end{cases},$$

*wobei die beiden "rechten Seiten" das homogene Problem ohne äußere Anregung bzw. das inhomogene Problem mit äußerer Anregung beschreiben.*
Wie oben notiert haben wir in der Schreibeweise als System zu betrachten mit

$$y(t) := \begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$D(y) := y'(t) - Ay(t) = b(t),$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\delta - q^2) & -2q \end{pmatrix}, \quad \text{und } b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix} \text{ bzw. } b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zunächst behandeln wir die *homogene Gleichung* d.h. $\beta(t) = 0$.
Die Dimension der Aufgabe ist hier $n = 2$, sodaß der Kern von $D$ höchsten zweidimensional ist. Wir konstruieren uns nun zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Aufgabe. Dazu verwenden wir die Darstellung mittels $L(u) = 0$ und machen mit einem noch zu bestimmenden $\lambda \in \mathbb{C}$ den Ansatz

$$u(t) := e^{\lambda t}.$$

Es ist $u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, somit

$$L(e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t} + 2q\lambda e^{\lambda t} + (q^2 - \delta)e^{\lambda t} = \big(\lambda^2 + 2q\lambda + q^2 - \delta\big)e^{\lambda t}.$$

Den hier auftretenden Term

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + 2q\lambda + q^2 - \delta$$

nennt man das "charakteristische Polynom". Es ist also

$$L(e^{\lambda t}) = \chi(\lambda)e^{\lambda t}$$

und da ja $e^{\lambda t} \neq 0$ für alle $t$ ist, gilt

$$L(e^{\lambda t}) = 0 \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0.$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind

$$\chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -q \pm \sqrt{\delta}.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

**Fall 1:** $\delta \neq 0$ : Dann haben wir die beiden *verschiedenen* evtl. komplexen Lösungen

$$\lambda_1 := -q + \sqrt{\delta}, \quad \lambda_2 := -q - \sqrt{\delta}.$$

Es sind dann

$$u_1(t) := e^{\lambda_1 t} \text{ und } u_2(t) := e^{\lambda_2 t}$$

zwei Lösungsfunktionen der Oscillatorgleichung. Zu ihnen gehören an Lösungen des Systems

$$y_1(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_1'(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix},$$
$$y_2(t) := \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2. \end{pmatrix}$$

Bei $t = 0$ sind die entstehenden Vektoren unabhängig, und nach Folgerung H.31 sind somit $y_2(t), y_2(t)$ eine Basis des Lösungsraumes des homogenen Systems.
Dies bedeutet

**Satz H.33** *Ist $\delta \neq 0$, so gibt es zu jedem Startvektor $y_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösungsfunktion $u(t)$ von $L(u)(t) = 0$ mit $u(0) = u_0,\ u'(0) = u_0'$.*
*Jede Lösung hat die Darstellung*

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

Schauen wir dies für $\delta, q \in \mathbb{R}, \delta \neq 0$ genauer an.

Es sei $\delta > 0$ : Dann sind beide Wurzeln $\lambda_{1,2} = -q \pm \sqrt{\delta}$ reell. Physikalisch sinnvoll ist hier nur der Fall, daß beide Nullstellen $\leq 0$ sind, was einer ohne Schwingung abklingenden Auslenkung entspricht.

Es sei $\delta < 0$ : Wir setzen $\delta = -\omega^2$. Dann ist

$$\lambda_{1,2} = -q \pm \sqrt{-\omega^2} = -q \pm i\omega,$$

sodaß

$$\begin{aligned} u_1(t) =& e^{(-q+i\omega)t} = e^{-qt+i\omega t} = e^{-qt}(\cos\omega t + i\sin\omega t), \\ u_2(t) =& e^{(-q-i\omega)t} = e^{-qt-i\omega t} = e^{-qt}(\cos\omega t - i\sin\omega t). \end{aligned}$$

Mit einem Trick bekommen wir auch hier reelle Lösungen, nämlich

$$\begin{aligned} v_1(t) :=& \frac{1}{2}\big(u_1(t) + u_2(t)\big) = e^{-qt}\cos\omega t, \\ v_2(t) :=& \frac{1}{2i}\big(u_1(t) - u_2(t)\big) = e^{-qt}\sin\omega t. \end{aligned}$$

Dies sind ja nur Linearkombinationen von Lösungen, also selbst wieder Lösungen und wegen

$$\begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_2(0) \\ v_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind auch dies wieder unabhängige Lösungen, also ein Fundamentalsystem.
Typischerweise ist hier $q \geq 0$ und wir haben abklingende Schwingungen.

Es bleibt

**Fall 2:** $\delta = 0$ : Dann ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -q$ und wir bekommen zunächst nur eine Lösung $u_1(t) := e^{-qt}$.
Nun rechnet man einfach nach, daß in diesem Fall auch $u_2(t) := te^{-qt}$ eine Lösung ist, d.h. $L(te^{-qt}) = 0$ ist. Indem man wieder, wie oben, diese Lösungen und ihre Ableitungen bei $t = 0$ betrachtet, sieht man, daß auch dies wieder unabhängige Lösungen sind, die also (ergänzt um ihren Ableitungen) wieder ein Fundamentalsystem bilden.
Somit haben wir hier

**Satz H.34** *Ist $\delta = 0$, so gibt es zu jedem Startvektor $y_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ genau eine Lösungsfunktion $u(t)$ von $L(u)(t) = 0$ mit $u(0) = u_0,\ u'(0) = u_0'$.*
*Jede Lösung hat die Darstellung*

$$u(t) = c_1 e^{-qt} + c_2 t e^{-qt}, \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

Betrachten wir noch die inhomogene Gleichung

$$L(u)(t) = \beta(t).$$

Nach Satz H.29 genügt es, *eine* Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen. Alle weiteren bekommt man dann daraus durch Addieren von Lösungen der homogenen, und die haben wir ja gerade bestimmt.

Physikalisch relevant sind “Anregungen” $\beta(t)$, die periodisch sind, sich also in der Form

$$\begin{aligned}\beta(t) &= \sum_k \big(\alpha_k \cos\omega_k t + \gamma_k \sin\omega_k\big) \qquad \text{(reell), bzw.}\\ &= \sum_m \epsilon_m e^{i\omega_m t} \qquad \text{(komplex)}\end{aligned}$$

schreiben lassen. Haben wir nun Lösungen $v_m$ von $L(v_m)(t) = e^{i\omega_m t}$, so ist wegen der Linearität von $L$ dann

$$L(\sum_m \epsilon_m v_m)(t) = \sum_m \epsilon_m L(v_m)(t) = \sum_m \epsilon_m e^{i\omega_m t} = \beta(t).$$

Physikalisch heißt das, daß sich überlagernde Anregungen die entsprechende Überlagerung der Schwingungen liefern.

Studieren wir also die inhomogene Gleichung für solche speziellen rechten Seiten

$$L(u)(t) = e^{i\omega_0 t}.$$

Wir hatten schon oben ausgerechnet, daß für beliebige $\gamma \in \mathbb{C}$ mit dem charakteristischen Polynom $\chi$ stets

$$L(e^{\gamma t}) = \chi(\gamma)e^{\gamma t}$$

ist. Dies bedeutet:

***Ist*** $\chi(\gamma) \neq 0$, ***so ist*** $v(t) := \frac{1}{\chi(\gamma)}e^{\gamma t}$ ***eine Lösung von*** $L(e^{\gamma t}) = e^{\gamma t}$.

Nun lauten die Nullstellen von $\chi$ ja gerade $\lambda_{1,2} = -q \pm \sqrt{\delta}$.
Ist also $\delta \geq 0$, so sind beide Nullstellen reel und damit ist $\chi(i\omega_0) \neq 0$.
Ist $\delta < 0$, also $\delta = -\omega^2$ und damit $\lambda_{1,2} = -q \pm i\omega$, so ist also

$$\chi(i\omega_0) = 0 \Leftrightarrow q = 0 \text{ und } \delta = -\omega_0^2.$$

Lezteres besagt, daß ($q = 0$) keine Dämpfung vorliegt und die anregende Frequenz mit der Eigenfrequenz des Systems übereinstimmt.

Liegt dieser *Resonanzfall* nicht vor, so erhält man immer in

$$v(t) := \frac{1}{\chi(i\omega_0)}e^{i\omega_0 t}$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung $L(v)(t) = e^{i\omega_0 t}$.

Für den *Resonanzfall*, also $q = 0$ und $\omega = \omega_0$ erhält man die beliebig groß werdende Lösung

$$v(t) := \frac{1}{2i\omega_0} \cdot t \cdot e^{i\omega t}.$$

Die Behandlung allgemeiner Differentialgleichungssysteme müssen wir auf später verschieben.