K Konvergenz und Stetigkeit im Mehrdimensionalen

Norm und Konvergenz

In mehreren Zusammenhängen hatten wir schon von Normen gesprochen.

Definition und Satz K.1 *Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K (d.h. $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$). Ein Abbildung $|\ | : V \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ heißt Norm, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

N1: $|x| \geq 0,\ = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

N2: $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$

N3: $|x + y| \leq |x| + |y|.$

Wir sagen dann, $(V, |\ |)$ ist ein normierter Raum. Man erhält aus diesen Eigenschaften sofort

N4: $|\sum \alpha_k x_k| \leq \sum |\alpha_k|\,|x_k|,$

N5: $|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|.$

Für $x_0 \in V, r > 0$ sei $K(x_0, r) := \{x \in V \big|\, |x - x_0| < r\}$ die "offene Kugel" vom Radius r um x_0 (Vergleiche Bezeichnungen Z.13).
Eine Menge $M \subset V$ heißt "beschränkt", wenn es ein $r > 0$ gibt, sodaß $|x| \leq r$ für alle $x \in M$ gilt.

Auf dem K^n gibt es viele Normen. Beispiele sind etwa

$$|x|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|,$$

$$|x|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2},$$

$$|x|_\infty := \max_{i=1}^{n} \{|\xi_i|\}.$$

Hierfür bekommt man (u. a. über die Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ) die Abschätzung

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x|_2 \leq |x|_\infty \leq |x|_1 \leq \sqrt{n}|x|_2.$$

Dies ist ein Beispiel für

Satz K.2 *Je zwei Normen auf K^n sind äquivalent, d.h. es gibt dazu Konstanten C_i, sodaß stets*

$$|x| \leq C_1 |x|' \quad \text{und } |x|' \leq C_2 |x|.$$

Man beachte, daß dies **nur für endlichdimensionale Räume** richtig ist.

Über Normen können wir Konvergenz erklären:

Definition K.3 *Es sei $(V, |\ |)$ ein normierter Raum, darin $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Wir sagen:*
Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen x, wenn $|x_k - x| \to 0$ für $k \to \infty$, d.h. also wenn die reelle Zahlenfolge $(|x_k - x|)_{k \in \mathbb{N}}$ aus den Normen der Differenzen eine Nullfolge ist. Wir schreiben dann wieder

$$x = \lim_{k \to \infty} x_k \quad \text{oder} \quad x_k \to x \quad (k \to \infty).$$

Dies ist äquivalent zu der Formulierung

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k \Leftrightarrow \forall_{\epsilon>0}\exists_{k_0}\forall_{k>k_0}\ |x_k - x| < \epsilon$$

und dies lautet nun formal völlig gleich, wie bei reellen oder komplexen Zahlenfolgen, lediglich ist hier $|\ |$ nicht als der Betrag sondern als Norm zu lesen. In jedem Fall kann man $|x_k - x|$ als Abstand der "Punkte" x_k und x lesen, und der muß eben beliebig klein werden, wenn die Folge voranschreitet. Da man aber mit Normen (fast) genauso rechnen kann wie mit dem Betrag in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$, erhalten wir, indem wir einfach in alten Beweisen den Betrag durch die Norm ersetzen, die folgenden Aussagen:

Satz K.4 *In einem normierten Raum $(V, |\ |)$ gelten*

1. *Eine konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.*
2. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*
3. *Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ und $\alpha, \beta \in K$ folgt*

   $$\alpha a_n + \beta a_n \to \alpha a + \beta b,$$

   d.h. die konvergenten Folgen in $(V, |\ |)$ bilden selbst einen Vektorraum und die Zuordnung des Grenzwertes zu der konvergenten Folge ist ein Vektorraum-Homomorphismus.
4. *Aus $x_n \to x$ folgt für die Normen auch $|x_n| \to |x|$.*
5. *Konvergiert (x_n), so auch jede Teilfolge und zwar gegen denselben Grenzwert.*

Auch der Begriff der "Reihe" läßt sich übertragen.

Definition K.5 (Reihen) *Zu einer Folge (a_n) in einem normierten Raum $(V, |\ |)$ nennen wir $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine Reihe, dazu die wohldefinierten Größen*

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} a_j$$

die "n-ten Partialsummen".
Ein Reihe heißt wieder "konvergent", wenn die Folge der Partialsummen konvergiert. Der zugehörige Grenzwert ist dann der (Grenz-)Wert der Reihe.

Der Konvergenzbegriff hängt an der Norm, auf demselben Raum kann es mehrere Normen geben – also auch mehrere Konvergenzbegriffe?

Satz K.6 *Konvergiert eine Folge (x_n) bezüglich einer Norm $|\ |$, so bezüglich jeder dazu äquivalenten Norm $|\ |'$.*
Auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist somit der Konvergenzbegriff unabhängig von der gewählten Norm.

Warnung *In nicht-endlichdimensionalen Räumen kann es sein, daß eine Folge oder Reihe bezügliche einer Norm konvergiert, bezüglich einer anderen Norm nicht.*

Beweis: (von Satz K.6) Sind $|\ |$ und $|\ |'$ äquivalent, so existiert eine Konstante C, mit der stets $|v|' \le C|v|$ ist. Gilt dann $x_n \to x$ bezüglich der Norm $|\ |$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0, sodaß für $n > n_0$ dann $|x_n - x| < \frac{1}{C}\epsilon$ ist. Dafür ist dann

$$|x_n - x|' \le C|x_n - x| < C\frac{1}{C}\epsilon = \epsilon.$$

$\square$

Auch die Definition von offenen oder abgeschlossenen Mengen können wir auf allgemeine normierte Räume übertragen (Vergl. Bezeichnungen Z.13).

Definition K.7 *Eine Menge Ω in einem normierten Raum V heißt "offen", wenn Ω mit jedem Punkt x_0 auch eine ganze Kugel $K(x_0, \epsilon)$ ("ϵ-Umgebung") für ein geeignetes $\epsilon > 0$ enthält.*
Eine offene Menge, die den Punkt x_0 enthält, bezeichnet man auch als "Umgebung" von x_0.
Eine Menge A heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement $V \setminus A$ offen ist.

Beispiel K.8 *Eine offene Kugel $K(x_0, r)$ ist eine offene Menge im Sinne der letzten Definition.*

Denn für $x \in K(x_0, r) := \{x \,\big|\, |x - x_0| < r\}$ wähle $\epsilon := r - |x - x_0| > 0$. Dann ist für jedes $y \in K(x, \epsilon)$:

$$|y - x_0| \leq |y - x| + |x - x_0| < \epsilon + |x - x_0| = r,$$

somit $y \in K(x_0, r)$. □

Satz K.9 *Folgende Aussagen gelten in einem normierten Raum $(V, |\ |)$:*

1. *$\emptyset$ und V sind offen.*
2. *Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.*
3. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*
4. *$\emptyset$ und V sind abgeschlossen.*
5. *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
6. *Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*
7. *Die Aussagen 3. und 6. gelten* ***nicht*** *mehr, wenn man Systeme aus unendlich vielen Mengen betrachtet.*

Beweis: 1.: Der ganze Raum ist trivialerweise offen. $\emptyset$ als offen zu bezeichnen erweist sich als zweckmäßig.
2.: Sind $(\Omega_i)_{i \in I}$ offen und ist $x \in \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, so gibt es ein i_0 mit $x \in \Omega_{i_0}$. Da liegt dann eine ganze ϵ-Umgebung von x in Ω_{i_0} und die liegt dann auch in $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$.
3.: Ist $x \in \bigcap_{i=1}^{m} \Omega_i$, so in jedem. Jedes enthält eine ganze Kugel um x und die mit dem kleinsten Radius liegt dann in allen, also auch im Durchschnitt.
4.: Es ist $\emptyset = V \setminus V, \quad V = V \setminus \emptyset$ und damit folgt 4. aus 1..
5.: Zu den abgeschlossenen Mengen $(A_i)_{i \in I}$ ist $\Omega_i := V \setminus A_i$ jeweils offen. Ferner ist $V \setminus \bigcap_i A_i = \bigcup_i (V \setminus A_i)$, denn

$$\begin{aligned} x \in V \setminus \bigcap_i A_i \Leftrightarrow x \notin \bigcap_i A_i \Leftrightarrow \exists_i\, x \notin A_i \\ \Leftrightarrow \exists_i\, x \in V \setminus A_i \Leftrightarrow x \in \bigcup_i (V \setminus A_i). \end{aligned}$$

Also folgt 5. aus 2..
6.: Analog beweist man $V \setminus \bigcup A_i = \bigcap (V \setminus A_i)$, womit 6. aus 3. folgt.
7.: Beispiele hierfür findet man schon bei reellen Intervallen:

$$\bigcap(-\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \{0\},$$
$$\bigcup[-1 + \tfrac{1}{n}, +1 - \tfrac{1}{n}] = (-1, +1).$$

□

Abgeschlossene Mengen kann man auch über Konvergenz charakterisieren:

Satz K.10 *Eine Menge $A \subset V$ ist genau dann abgeschlossen, wenn sie zu jeder konvergenten Folge $(x_k) \subset A$ auch deren Grenzwert enthält.*

Beweis: Es sei A abgeschlossen, (x_n) eine Folge in A mit Grenzwert $x \notin A$. Dann liegt also $x \in V \setminus A$ und dies ist offen. Also gibt es eine Kugel $K(x, r)$ um x, die ganz in $V \setminus A$ liegt, somit kein Folgenglied enthält. Andrerseits müßte aber jede Kugel um x fast alle Folgenglieder enthalten, was nicht zusammen passt. Also muß der Grenzwert x schon in A liegen.
Sei nun A nicht abgeschlossen. Dann ist $\Omega := V \setminus A$ nicht offen und somit existiert ein $w \in \Omega$, sodaß in jeder Kugel $K(w, \frac{1}{k}) \quad (k = 1, 2, ...)$ ein Element $x_k \notin \Omega$ liegt. Diese Folge (x_k) liegt also ganz in A, konvergiert aber gegen den Grenzwert $w \notin A$.
□

Definition K.11 *Für eine Menge M in einem normierten Raum V heißt $x \in V$*

- *"innerer Punkt", wenn M eine Kugel um x enthält,*
- *"Randpunkt", wenn jede Kugel um x sowohl Punkte von M wie auch Punkte $\notin M$ enthält.*
- *"Häufungspunkt", wenn jede Kugel um x noch von x verschiedene Punkte aus M enthält. Der Punkt x selbst kann, muß aber nicht zu M gehören.*
- *"isolierter Punkt", wenn $x \in M$, aber eine Kugel um x existiert, die keine weiteren Punkte von Menthält.*

Man nennt

- *die Menge $\overset{\circ}{M}$ aller inneren Punkte kurz das "Innere" von M,*
- *die Menge ∂M aus allen Randpunkten den "Rand" von M,*
- *die Menge $\overline{M} := M \cup \partial M$ den "Abschluß" von M.*

Für eine Kugel haben wir

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{K}(x_0, r) &= \{x \mid |x - x_0| < r\}, \\ \partial K(x_0, r) &= \{x \mid |x - x_0| = r\}, \\ \overline{K(x_0, r)} &= \{x \mid |x - x_0| \leq r\}. \end{aligned}$$

Fakt K.12 1. *Ein Punkt $x \in V$ ist genau dann ein Häufunspunkt von M, wenn es in M eine Folge (x_n) gibt, die gegen x konvergiert und deren Folgenglieder alle $\neq x$ sind.*

2. *Man erhält den Abschluß $\overline{M}$ von M, indem man zu M noch alle Häufungspunkte hinzunimmt. $\overline{M}$ ist eine abgeschlossene Menge.*

Beweis: Zu 1.: Es sei x ein Häufungspunkt von M. Dann gibt es für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ in der Kugel $K(x, \frac{1}{n})$ einen Punkt $x_n \in M, \neq x$. Die daraus gebildete Folge erfüllt unsere Bedingung.
Gibt es andrerseits zu x eine solche gegen x konvergente Folge (x_n), für die stets $x_n \in M$, aber $x_n \neq x$ ist, so liegt ja in jeder Umgebung $K(x, \epsilon)$ (mindestens) ein Folgenglied, und damit realisiert man die Bedingung für den Häufungspunkt.
Zu 2.: Nach unserer Definition ist $\overline{M} := M \cup \partial M$. Somit gilt also $\overline{M} = M \cup \{\text{Häufungspunkte von } M\}$, wenn wir zeigen, daß ein Punkt $x_0 \notin M$ genau dann ein Häufungspunkt von M ist, wenn er ein Randpunkt ist.
Ist $x_0 \notin M$ ein Randpunkt, d.h. $x_0 \in \partial M$, so liegt in jeder Umgebung von x_0 ein Punkt x von M und, da x_0 selbst nicht zu M gehört, muß $x \neq x_0$ sein. Folglich ist x_0 ein Häufungspunkt.
Analog schließt man in die andere Richtung.

Die Abgeschlossenheit folgt so: Ist $x_0 \notin \overline{M} := M \cup \partial M$, so gibt es eine Kugel $K(x_0, \delta)$, die keinen Punkt von M enthält. Dann kann es aber keine Folge in M geben, die gegen einen Punkt $y \in K(x_0, \delta)$ konvergiert, sodaß dann $K(x_0, \delta)$ auch keinen Häufungspunkt von M enthält, also

$$K(x_0, \delta) \cap \big(M \cup \{\text{Häufungspunkte von } M\}\big) = K(x_0, \delta) \cap \overline{M} = \emptyset$$

ist. Also ist das Komplement von $\overline{M}$ offen, damit $\overline{M}$ selbst abgeschlossen. □

Wir notieren noch eine Reihe von Eigenschaften, die geometrisch leicht zu verstehen sind, ohne die einfachen Beweise auszuführen.

Satz K.13 *Es gelten*

1. $\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$.
2. $M \subset \overline{M}$ *und* $M = \overline{M}$, *genau wenn* M *abgeschlossen ist.*
3. $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.
4. $\overset{\circ}{M}$ *ist offen,* $\overset{\circ}{M} = M$, *genau wenn* M *offen ist.*
5. ∂M *ist abgeschlossen,* $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$.
6. $(V \overset{\circ}{\setminus} M) = V \setminus \overline{M}, \quad \overline{(V \setminus M)} = V \setminus \overset{\circ}{M}$.

Auch der Begriff der CAUCHY-Folge überträgt sich unmittelbar:

Definition K.14 *Eine Folge* (x_n) *in einem normierten Raum* $(V, |\ |)$ *ist* CAUCHY-*Folge, wenn gilt*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,n'>n_0}\ |x_n - x_{n'}| < \epsilon.$$

Wieder gilt – mit völlig analogem Beweis –

Satz K.15

1. *Jede konvergente Folge ist eine* CAUCHY-*Folge,*
2. *jede* CAUCHY-*Folge ist beschränkt.*

Dagegen hat im allgemeinen eine CAUCHY-Folge **keinen** Grenzwert.

Satz K.16 *Ein normierter Raum* $(V, |\ |)$ *heißt "vollständig" oder auch* BANACH-*Raum, wenn in ihm jede* CAUCHY-*Folge einen Grenzwert hat.*

Nach unseren früheren Überlegungen sind also $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ (mit dem Betrag als Norm) BANACH-Räume. Es gilt aber mehr:

Satz K.17 *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *sind* $\mathbb{R}^n$ *und* $\mathbb{C}^n$ *mit jeder Norm* BANACH-*Räume.*

Beweis: Da in $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ die Normen sämtlich äquivalent sind, können wir mit der Maximumnorm $|x|_\infty := \max_{i=1}^n |\xi_i|$ operieren. Dann bedeutet, daß (x_k) eine CAUCHY-Folge ist, daß jede einzelne Zahlenfolge, gebildet aus den ersten, den zweiten, etc. Komponenten der Folgenglieder ebenfalls CAUCHY-Folge ist und zwar in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, wo wir die Vollständigkeit haben. Diese Komponentenfolgen haben also Grenzwerte und der aus diesen Grenzwerten gebildete Vektor ist dann ein Grenzwert der ursprünglichen Folge. □

Für unendlichdimensionale Räume hängt die Vollständigkeit an der Norm!
Der Raum $C[a, b]$ der auf dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen ist nach Definition I.51 und Satz I.53 unter der Norm der "gleichmäßigen Konvergenz"

$$|f|_\infty := \max\{|f(x)| \bigm| x \in [a, b]\}$$

vollständig.
Nehmen wir dagegen etwa in $C[-1, +1]$ die "Integral"-Norm

$$|f|_1 := \int_{-1}^{+1} |f(x)| dx$$

und betrachten die Funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & -1 \leq x < -\frac{1}{n} \\ nx & -\frac{1}{n} \leq x \leq +\frac{1}{n} \\ +1 & +\frac{1}{n} < x \leq +1, \end{cases}$$

so ist für $m > n$ stets

$$|f_n - f_m| \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1 dx = \frac{2}{n} \to 0.$$

Es liegt also eine CAUCHY-Folge vor. Die einzige als Grenzfunktion dieser Folge infrage kommende Funktion ist aber die Treppenfunktion

$$f(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0, \end{cases}$$

die nicht stetig ist. Im Raum der stetigen Funktionen mit der Integralnorm haben wir also hier eine CAUCHY-Folge, die keine Grenzfunktion besitzt.

Wir hatten den Satz Z.32 von BOLZANO-WEIERSTRASS kennengelernt, nach dem jede Folge in einem kompakten Intervall eine konvergente Teilfolge besitzt. Dabei war ein Intervall kompakt, wenn es beschränkt und abgeschlossen ist. Diesen Begriff brauchen wir für eine allgemeinere Situation.

Definition K.18 *Eine Teilmenge M in einem normierten Raum V heißt "kompakt", wenn jede Folge in M eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M enthält.*

Satz K.19 *Jede kompakte Menge ist beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis: Wäre sie nicht beschränkt, so gäbe es eine Folge (x_n) in M, sodaß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|x_n| > n$ gelten würde. Diese Folge könnte aber keine konvergente Teilfolge besitzen.
Die Abgeschlossenheit folgt direkt aus Satz K.10. □

Die Umkehrung von Satz K.19 - und so hatten wir ja in Kapitel Z den Begriff kompakt eingeführt - gilt **nur in endlichdimensionalen Räumen**.

Satz K.20 *In $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ ist jede beschränkte und abgeschlossene Menge M kompakt.*

Beweis: Für den $\mathbb{R}^1$ ist das der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS. Die Beweisidee für den allgemeine Fall sieht man schon im $\mathbb{R}^2$: Alle Normen sind hier äquivalent, somit können wir mit der $|\ |_\infty$ - Norm arbeiten: Ist die Folge $x_n = \begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix}$ beschränkt, so sind dies auch die Komponentenfolgen (ξ_n) und (η_n). (ξ_n) hat nach BOLZANO-WEIERSTRASS eine konvergente Teilfolge (ξ_{n_k}), die dazugehörige Folge (η_{n_k}) der zweiten Komponenten ebenfalls ein konvergente Teilfolge $(\eta_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$. Dann ist aber die Folge $(x_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ selbst konvergent und deren Grenzwert liegt wegen der Abgeschlossenheit von M in M selbst.
Dieser Schluß kann für den $\mathbb{R}^n$ iteriert werden. Für den $\mathbb{C}^n$ geht alles analog. □

Warnung K.21 *In **unendlichdimensionalen** Räumen ist etwa die abgeschlossene Einheitskugel*

$$\overline{K(0,1)} := \{v \mid |v| \leq 1\}$$

***nicht** kompakt.*

Wir notieren noch ein wichtige Eigenschaft kompakter Mengen

Satz K.22 (Überdeckungssatz von HEINE-BOREL) *Für jede Menge M ist die Kompaktheit äquivalent zu der folgenden Überdeckungseigenschaft:*
*Ist $\big(\Omega_i \mid i \in I\big)$ irgendein System von **offenen** Mengen, das M überdeckt, so genügen davon schon endlich viele, um M zu überdecken, d.h.*

$$M \subset \bigcup_{i\in I} \Omega_i \quad (\Omega_i \text{ offen }) \quad \Rightarrow \quad \exists_{i_1,\ldots,i_m\in I}\ M \subset \Omega_{i_1} \cup \ldots \cup \Omega_{i_m}.$$

Man beachte, daß für die Überdeckungseigenschaft **nicht** nur verlangt wird, daß irgendeine Überdeckung mit endlich vielen offenen Mengen existiert, sondern daß bei **jeder** Überdeckung mit offenen Mengen schon geeignet gewählte endlich viele überdecken.

Stetige Funktionen

Es seien $(V_1, |\,|_1)$ und $(V_2, |\,|_2)$ normierte Räume, $f : V_1 \supset D \to V_2$ eine Funktion.

Definition K.23 (Stetigkeit) *Eine Funktion f heißt "stetig" an der Stelle $x_0 \in D$, wenn x_0 Häufungspunkt von D und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ für jede Folge $x_n \to x_0$ in D ist.*
f heißt "stetig auf D", wenn es an jeder Stelle $x_0 \in D$ stetig ist.

Eine äquivalente Formulierung enthält

Satz K.24 *Die Funktion f ist genau dann an der Stelle $x_0 \in D$ stetig, wenn x_0 Häufungspunkt von D ist und dort das ϵ-δ-Kriterium gilt:*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in D,|x-x_0|<\delta}\ \big|f(x) - f(x_0)\big| < \epsilon.$$

Dies besagt, daß es für jede ϵ-Kugel $K(f(x_0),\epsilon)$ um den Bildpunkt $f(x_0)$ eine Kugel $K(x_0,\delta)$ um das Urbild x_0 gibt, deren Durchschnitt mit D, also $K(x_0,\delta)\cap D$, unter f ganz in die Kugel $K(f(x_0),\epsilon)$ abgebildet wird.

Der **Beweis** geht wie ein einer Dimension.

Beispiele

1. *Konstante Funktionen und die Identität: $x \mapsto x$ sind stetig.*

2. *Die Normfunktion:* $\mathbb{C}^n \to R : x \mapsto |x|$ *ist stetig; denn es ist nach der (umgekehrten) Dreiecksungleichung*

$$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x - y|.$$

3. *Lineare Abbildungen* $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n,\ x \mapsto Ax$ *sind stetig; denn nach* CAUCHY-SCHWARZ *ist mit der* EUKLID*-Norm*

$$|Ax|_2^2 = \sum_i \Big|\sum_j a_{ij}x_j\Big|^2 \leq \sum_i \Big(\sum_j |a_{ij}|^2 \sum_j |x_j|^2\Big) = |A|_2^2\,|x|_2^2.$$

Dies zeigt die Stetigkeit im Nullpunkt, an beliebigen Punkten folgt sie damit aus der Linearität.

Wie im eindimensionalen Fall zeigt man

Satz K.25

1. *Sind* $f : V_1 \supset D_1 \to V_2$, $g : V_2 \supset D_2 \to V_3$ *stetig mit* $f(D_1) \subset D_2$, *so ist auch* $g \circ f :\ D_1 \to V_3$ *stetig.*
2. *Sind* $f, g : V_1 \supset D \to V_2$ *stetig und* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, *so ist auch* $\alpha f + \beta g : D \to V_2$ *stetig.*
3. *Sind* $f, g : V_1 \supset D \to \mathbb{C}$ *stetig, so auch* $f \cdot g : D \to \mathbb{C}$.

Damit bekommen wir weitere

Beispiele

4. *Das Skalarprodukt ist stetig, d.h. die Funktion*

$$f_y : x \mapsto \langle y, x\rangle$$

ist für jedes y *eine stetige Funktion. (Benutze Beispiel 3.)*

5. *Der Abstand bezüglich der* EUKLID*-Norm eines Punktes* x *von einem Unterraum* $U \subset \mathbb{C}^n$ *ist stetig; denn mit dem orthogonalen Projektor* P *auf* U *ist*

$$\mathrm{dist}(x, U) := |x - Px|_2$$

stetig nach Beispiel 2. und 3.

6. *Die letzte Aussage bleibt richtig, wenn wir* U *durch irgend eine nichtleere Menge* M *ersetzen und erklären*

$$\mathrm{dist}(x, M) := \inf\{\,|x - v|\,\big|\, v \in M\}.$$

Definition K.26 *Zu einer Funktion* $f : V_1 \supset D \to V_2$ *und einer Menge* $B \subset V_2$ *sei*

$$f^{-1}(B) := \{x \in D \,|\, f(x) \in B\}$$

das Urbild von B *unter* f.

Satz K.27 1. *Es sei* $f : V_1 \supset D \to V_2$ *stetig. Dann ist für jede abgeschlossene Menge* $A \subset V_2$ *das Urbild* $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen in* D, *d.h. ist* (x_n) *eine Folge in* $f^{-1}(A)$ *mit Grenzwert* $x \in D$, *so ist auch* $x \in f^{-1}(A)$.
Ebenso ist für jede offene Menge $O \subset V_2$ *das Urbild* $f^{-1}(O)$ *offen in* D, *d.h. zu jedem Punkt* $x_0 \subset f^{-1}(O)$ *gibt es ein* $\delta > 0$, *sodaß* $K(x_0, \delta) \cap D \subset f^{-1}(O)$ *ist.*

2. *Jede dieser Aussagen ist auch hinreichend für Stetigkeit.*

Beweis: Zu 1.: Es sei $A \subset V_2$ abgeschlossen, (x_n) eine Folge in $f^{-1}(A)$ mit Grenzwert $x \in D$. Dann ist $f(x_n) \in A$ und wegen der Stetigkeit gilt $f(x_n) \to f(x)$. Da A abgeschlossen ist, ist dann auch $f(x) \in A$, somit $x \in f^{-1}(A)$.
Sei $O \subset V_2$ offen. Zu $x_0 \in f^{-1}(O)$ ist $f(x_0) \in O$, somit existiert, da O offen, ein $\epsilon > 0$, sodaß $K(f(x_0), \epsilon) \subset O$. Nach Satz K.24 gibt es wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, sodaß $K(x_0, \delta) \cap D \subset f^{-1}(K(f(x_0), \epsilon) \subset f^{-1}(O)$.
Der Nachweis von 2. sie dem Leser überlassen. □

In der anderen Richtung sind die entsprechenden Ausssagen **falsch**, wie folgendes Beispiel zeigt:
Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ liefert $f(\mathbb{R}) = (0, 1]$, bildet also die gleichzeitig abgeschlossene und offene Menge $\mathbb{R}$ auf das halboffene Intervall $(0, 1]$ ab, was weder abgeschlossen noch offen ist.
Es gilt jedoch

Satz K.28 *Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.*

Beweis: Sei D kompakt, (y_n) eine Folge in $f(D)$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in D$ mit $y_n = f(x_n.)$ Die hat wegen der Kompaktheit von D eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in D$. Dann gilt mit der Stetigkeit von f auch

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(D),$$

d.h. $f(D)$ ist kompakt. □

Damit bekommen wir wie im Eindimensionalen den

Satz K.29 (Satz vom Maximum und Minimum) *Jede auf einer kompakten Menge D stetige reellwertige Funktion nimmt dort Maximum und Minimum an.*

Beweis: Nach dem vorigen Satz ist mit D auch $f(D) \subset \mathbb{R}$ kompakt, somit beschränkt und abgeschlossen. Da beschränkt hat diese Menge Supremum und Infimum, da abgeschlossen gehören beide Werte zur Menge und dies sind offenbar die beiden gesuchten Extrema. □

Für viele Zwecke brauchen wir eine Verschärfung des Begriffs der Stetigkeit:

Definition K.30 (gleichmäßige Stetigkeit) *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt "gleichmäßig stetig" auf D, wenn gilt*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,x_0 \in D, |x-x_0|<\delta} \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Die Größe δ darf also nur von ϵ abhängen, aber nicht mehr von der Stelle x_0, an der wir die Funktion betrachten.

Dieser Begriff ist nun nicht völlig neu, denn es gilt

Satz K.31 *Jede auf einer* **kompakten** *Menge D stetige Funktion f ist dort gleichmäßig stetig.*

Beweis: Wäre f nicht gleichmäßig stetig, so gäbe es ein $\epsilon > 0$ und zu jedem n Punkte $x_n, x'_n \in D$, für die $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ aber $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \epsilon$. Da D kompakt ist, hätte die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge, sodaß wir also gleich annehmen könnten, daß die Folge selbst konvergiert: $x_n \to x_0 \in D \, (n \to \infty)$. Wegen

$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ müßte dann auch $x'_n \to x_0$ konvergieren und wegen der Stetigkeit von f bekämen wir dann

$$\epsilon \leq |f(x_n) - f(x'_n)| \to |f(x_0) - f(x_0)| = 0,$$

was offenbar Unsinn ist. □

Bisher hatten wir als Definitionsbereiche meist nur Intervalle in $\mathbb{R}$ oder Kreisscheiben in $\mathbb{C}$, evtl. mit Ausnahme einzelner Punkte betrachtet. Dies reicht nicht mehr ganz aus.

Definition K.32 *Eine stetige Abbildung*

$$\varphi : [a, b] \to V, \quad t \mapsto \varphi(t)$$

definiert einen "Weg" in V von $\varphi(a)$ nach $\varphi(b)$.

So beschreibt etwa für $u, v, w \in V$

$$\varphi(t) := \begin{cases} u + t(v - u) & 0 \leq t \leq 1 \\ v + (t-1)(w - v) & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

den aus zwei Geradenstücken zusammengesetzten Weg von u über v nach w. Dies auf n viele Ecken verallgemeinert liefert den Begriff "Polygonzug".
Nach dem selben Prinzip kann man natürlich statt Strecken auch ganze (krumme) Wege aneinanderhängen.

Definition K.33 *Eine Menge $M \subset V$ heißt "Weg-zusammenhängend", wenn es zwischen je zwei ihrer Punkte einen ganz in M verlaufenden Weg gibt.*

Definition K.34 *Eine nichtleere, offene, Weg-zusammenhängende Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ oder $\subset \mathbb{C}^n$ heißt ein "Gebiet".*

Satz K.35 *In einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$ oder $\subset \mathbb{C}^n$ kann man je zwei Punkte sogar schon durch einen Polygonzug (mit endlich vielen Ecken!) verbinden.*

Vertiefen Sie sich noch etwas in diese Thematik etwa mit folgender

Aufgabe K.36 *Das stetige Bild einer Weg-zusammenhängenden Menge ist selbst Weg-zusammenhängend.*

Wir notieren noch einige typische Beispiele für Gebiete:

Beispiele K.37 *Folgende Mengen sind Gebiete:*

1. *Eine offene Kugel ist ein Gebiet. Sie bleibt es, wenn man aus ihr noch endlich viele Punkte wegnimmt.*
2. *Zwei offene Kugeln mit nichtleerem Durchschnitt sind ein Gebiet.*
3. *Eine "Brezel" ist ein Gebiet im $\mathbb{R}^3$.*
4. *Die beiden Quader:*

$$\begin{aligned} Q_1 :=& \{x \mid |x|_\infty < 1\}, \\ Q_2 :=& \{x \mid |x - (2, 2, 2)^T|_\infty < 1\} \end{aligned}$$

sind einzeln je ein Gebiet, ihre Vereinigung ist keins.