M Matrizen

Operationen mit Matrizen

Im Vorkapitel hatten wir die linearen Räume $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ der Spaltenvektoren betrachtet und dazu Matrizen eingeführt, die lineare Abbildungen in diesen Räumen beschreiben. Wir wollen dies nun verallgemeinern.
Für das Weitere sei $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$, also der Körper der reellen Zahlen oder der Körper der komplexen Zahlen, n, m, ℓ seien natürliche Zahlen und $K^n, K^m, ...$ seien die K-Vektorräume aus den als Spalten geschriebenen n-, bzw. m-tupeln von Elementen aus K. Daneben betrachten wir sogenannte $n \times m$-Matrizen A über K:

$$A := (\alpha_{ij})_{n,m} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_{ij} \in K$ $(i = 1, ..., n, j = 1, ..., m)$. Deren Gesamtheit bezeichnen wir mit $K^{n \times m}$.

Definition und Satz M.1 *Für Matrizen $A = (a_{ij})_{n,m}$, $B = (\beta_{ij})_{n,m}$ und Skalare $\gamma \in K$ erklären wir komponentenweise durch*

$$\begin{aligned} A + B &:= (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{n,m}, \\ \gamma \cdot A &:= (\gamma \cdot \alpha_{ij})_{n,m} \end{aligned}$$

eine Addition von Matrizen und eine Multiplikation von Matrizen mit Skalaren. Mit diesen Operationen und der Nullmatrix 0 (alle $\alpha_{ij} = 0$) als neutralem Element ist $K^{n \times m}$ ein K-Vektorraum.

Wie in den schon betrachteten Fällen können wir eine Operation Matrix $\times$ Spaltenvektor einführen.

Definition M.2 *Ist $A \in K^{n \times m}, x \in K^m$, so ist*

$$Ax := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \alpha_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \alpha_{nj}\xi_j \end{pmatrix} \in K^n$$

Beachten Sie: Das Produkt Matrix $\times$ Spaltenvektor ist nur erklärt, wenn die Zahl der Spalten von A = Zahl der Komponenten von x. Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor mit soviel Komponenten, wie A Zeilen hat.

Satz und Definition M.3 *Jede $n \times m$ - Matrix A vermittelt eine Abbildung*

$$f_A : K^m \to K^n : \quad x \mapsto f_A(x) := Ax.$$

Für sie gilt

$$f_A(\gamma x + \gamma' x') = \gamma f_A(x) + \gamma' f_A(x').$$

Man sagt: f_A ist " linear" oder ein "Homomorphismus".

Der **Beweis** ist ein simples Nachrechnen mittels der Matrixmultiplikation und sei als Übung gelassen.
Wir werden später sehen, daß in einem noch zu präzisierenden Sinn, so jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen dargestellt werden kann.

Bezeichnen wir die als Spalten von A auftretenden Spaltenvektoren $\in K^n$ der Reihe nach mit $a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot m}$, so erhält man aus der Definition sofort für die kanonischen Einheitsvektoren $e_j \in K^m$:

$$a_{\cdot j} = Ae_j = f_A(e_j) \quad (i = 1, ..., m)$$

d.h.

die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren,

und hieraus für

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j :$$

$$f_A(x) = Ax = A(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j Ae_j = \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_{\cdot j}.$$

Für Matrizen A, B, wobei die *Spaltenzahl von* $A =$ *Zeilenzahl von* B ist, können wir ein Produkt erklären.

Definition M.4 *Zu* $A = (a_{ij})_{n,m} \in K^{n\times m}, B = (\beta_{jk})_{m,\ell} \in K^{m\times \ell}$ *sei* $AB \in K^{n\times \ell}$ *erklärt durch*

$$AB = (\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{jk})_{n,\ell}$$

Beachten Sie: Für $A \in K^{n\times m}, B \in K^{r\times \ell}$ *ist das Produkt* AB *genau dann definiert wenn* $m = r$ *und liefert dann eine* $n \times \ell$ *- Matrix. Deren Element in Zeile* i *und Spalte* k *ergibt sich aus Zeile* i *von* A *und Spalte* k *von* B.

Aus der Definition liest man auch unmittelbar die für Spezialfälle schon behauptete Formel

$$k\text{-te Spalte von } (A \cdot B) = A \cdot (k\text{-te Spalte von } B)$$

ab.
Identifiziert man Spaltenvektoren $\in K^m$ mit Matrizen, die nur eine Spalte besitzen, d.h. $\in K^{m\times 1}$, so geht in diesem Falle ($\ell = 1$) Definition M.4 in Definition M.2 über.

Bei der Multiplikation vom Matrizen gibt es sog. "Nullteiler", d.h. das Produkt von zwei Matrizen kann die Nullmatrix ergeben, obwohl keiner der Faktoren selbst schon die Nullmatrix ist. Ferner ist die Multiplikation nicht kommutativ, d.h. im allg. ist $AB \neq BA$.
Ein Beispiel ist etwa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Operation: Matrix $\times$ Vektor konnten wir als lineare Abbildung deuten. Was bedeutet das Produkt von Matrizen?

Satz M.5 *Seien* $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times \ell}$ *Matrizen,* $f_A : K^m \to K^n$, $f_B : K^\ell \to K^m$ *die zugehörigen linearen Abbildungen. Dann ist* $AB \in K^{n\times \ell}$, $f_{AB} : K^\ell \to K^n$ *und es gilt:*

$$f_{AB} = f_A \circ f_B$$

d.h. das Matrixprodukt beschreibt das Hintereinanderausführen der zu den Matrix-Faktoren gehörenden Abbildungen.

Beweis: Seien $b._1, ..., b._1$ die Spalten von B, $x = \sum_{k=1}^{\ell} \xi_k e_k \in K^\ell$ beliebig gewählt. Dann haben wir

$$\begin{aligned}(f_A \circ f_B)(x) &= f_A(f_B(x)) = f_A(Bx) = f_A(\sum \xi_k b._k) = \sum \xi_k A b._k \\ &= \sum \xi_k (AB) e_k = (AB)x = f_{AB}(x).\end{aligned}$$

Man beachte, daß $Ab._k$ die k-te Spalte von AB ist. □

Dieser Satz liefert uns auch, daß die Multiplikation von Matrizen associativ ist:

Satz M.6 *Sei $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times \ell}$, $C \in K^{\ell \times r}$. Dann sind die Produkte AB, $(AB)C$, BC, $A(BC)$ definiert und es gilt $(AB)C = A(BC)$.*

Beweis: Zur Vereinfachung der Schreibweise sei die k-te Spalte einer Matrix G mit $G._k$ bezeichnet. Dann haben wir:

$$((AB)C)._k = (AB)(C._k) \overset{M.5}{=} A(BC._k) = A(BC)._k = (A(BC))._k$$

□

Schon im Vorkapitel hatten wir durch Austauschen von Zeilen und Spalten die zu einer gegebenen Matrix A transponierte Matrix A^T erklärt.

Definition M.7 *Ist*

$$A = (\alpha_{ij})_{n,m} \in K^{n\times m},$$

so heißt

$$A^T = (\alpha_{ij}^T)_{m,n} \in K^{m\times n} \text{ mit } \alpha_{ij}^T := \alpha_{ji}, \text{ (für alle } i,j),$$

die "transponierte" Matrix.
Für komplexe Matrizen ist es sinnvoll noch zusätzlich bei jedem Element α zum konjugiert komplexen $\overline{\alpha}$ überzugehen. Dies liefert

$$A^* = (\alpha_{ij}^*)_{m,n} \in K^{m\times n} \text{ mit } \alpha_{ij}^* := \overline{\alpha}_{ji}, \text{ (für alle } i,j),$$

die "adjungierte" Matrix.

Die tiefere Bedeutung dieser Operationen werden wir erst später sehen. Hier seien noch einige Rechenregeln notiert.

Satz M.8 *Für zusammenpassende Matrizen ist*

$$(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T, \quad (A\cdot B)^* = B^* \cdot A^* \text{ Reihenfolge !!!}$$

Für Spaltenvektoren x, y läßt sich das Skalarprodukt darstellen als

$$\langle x,y\rangle = x^T \cdot y \text{ (reell), bzw. } \langle x,y\rangle = x^* \cdot y \text{ (komplex)},$$

Mit den kanonischen Einheitsvektoren e_i ist

$$A\cdot e_j = a._j = j\text{-te Spalte von } A, \quad e_i^T \cdot A = a_{i.} = i\text{-te Zeile von } A.$$

Beweis: Es ist

$$\left((AB)^T\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_k \alpha_{jk}\beta_{ki} = \sum_k \beta_{ik}^T \alpha_{kj}^T = \left(B^T A^T\right)_{ij}.$$

Die restlichen Aussagen beweist man analog, sie seien als Übung gelassen. □

Gleichungssysteme

Wir wollen nun untersuchen, wieweit man die Matrix-Multiplikation "umkehren" kann, d.h. wir untersuchen folgendes

Problem: *Gegeben Matrizen $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{n\times k}$. Gibt es dazu eine Matrix $X \in K^{m\times k}$ so daß $AX = B$ und wenn ja, wie findet man sie?*

Ist speziell $k = 1$, d.h. hat B genau eine Spalte b, so suchen wir also einen Spaltenvektor x, so daß $Ax = b$, d.h. wir wollen das lineare Gleichungssystem aus n Gleichungen in m Unbekannten $\xi_1, ..., \xi_m$ lösen:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}\xi_1 & + & ... & + & \alpha_{1m}\xi_m & = & \beta_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}\xi_1 & + & ... & + & \alpha_{nm}\xi_m & = & \beta_n \end{array}$$

Um dies zu studieren, betrachten wir zunächst "invertierbare" Matrizen.

Definition M.9 *Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ gibt, so daß*

$$AB = BA = I_n$$

Dabei ist I_n die sog. Einheitsmatrix: $I_n = (\delta_{ij})_{n,n}$ mit dem "Kroneckersymbol"

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Wir schreiben dann $B = A^{-1}$ und nennen die Matrix A^{-1} zu A invers.
Eine invertierbare Matrix heißt auch "regulär", eine nichtinvertierbare auch "singulär".

Die Einheitsmatrix wirkt bei der Matrixmultiplikation als neutrales Element, d.h. sofern die Multiplikationen formal definiert sind, gilt für beliebige Matrizen: $I_nA = A$, $BI_m = B$. Insbesondere ist damit auch $I_nI_n = I_n$, d.h. I_n ist invertierbar und $I_n^{-1} = I_n$, ferner ist natürlich $I_n^T = I_n$.
Es gibt also für jedes n invertierbare Matrizen. Andererseits ist für die Nullmatrix 0 stets $0A = 0$, $B0 = 0$, so daß diese Matrix nicht invertierbar ist. Sie ist aber keineswegs die einzige nichtinvertierbare quadratische Matrix.
Zunächst stellen wir einige Aussagen über invertierbare Matrizen zusammen.

Satz M.10 *A, B seien $n \times n$ Matrizen. Dann gilt:*

1. *Ist A invertierbar, so ist die inverse Matrix eindeutig bestimmt.*
2. *Ist A invertierbar, so ist A^{-1} invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$, ferner ist dann auch A^T invertierbar und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Entsprechendes gilt für A^*.*
3. *Ist A invertierbar und $AB = I$, so ist $B = A^{-1}$.*
4. *Sind A und B beide invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (umgekehrte Reihenfolge!).*

Beweis: Zu 1.: Sei $AB = BA = I$ und $AC = CA = I$. Dann ist

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Zu 2.: Es ist $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$. Somit erfüllt A die Forderungen an eine Inverse zu A^{-1}. Damit ist A^{-1} invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$.

Ferner ist $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$, etc.
Zu 3.: $B = IB = A^{-1}AB = A^{-1}$, da $AB = I$.
Zu 4.: $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}AB) = B^{-1}B = I$, $ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. (Rest mit 1.) □

Einige Beispiele für invertierbare Matrizen sollten Sie explizit kennen:
Eliminationsmatrizen:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \gamma_{1j} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \gamma_{j-1,j} & & & \\ & & & \gamma_{jj} & & & \\ & & & \gamma_{j+1,j} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \gamma_{nj} & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (\gamma_{ij} \in K, \gamma_{jj} \neq 0).$$

Rechnen Sie selbst nach, daß ihre Inverse von der selben Form ist. Setzt man hier alle $\gamma_{ij} := 0$ für $i \neq j$, d.h. bis auf das Diagonalelement $\gamma_{jj} \neq 0$, so bewirkt der Übergang von A zu LA gerade die Multiplikation der j-ten Zeile von A mit dem Faktor γ_{jj}.
Setzt man $\gamma_{jj} := 1$ und alle anderen $\gamma_{ij} := 0$, ausgenommen für $i = k$ mit einem $k \neq j$, so bewirkt der Übergang von A zu LA gerade, daß man genau die k-te Zeile durch die Summe aus der k-ten Zeile und der mit γ_{kj} multiplizierten j-ten Zeile ersetzt:

$$a_{k.} \mapsto a_{k.} + \gamma_{kj} \cdot a_{j.},$$

und sonst alles unverändert läßt.
Obige Eliminationsmatrix L erhält man nun aus dem Produkt von lauter solchen speziellen Matrizen zum selben Spaltenindex j, und die Multiplikation mit ihr bewirkt das Hintereinanderausführen der beschriebenen "elementaren Zeilenoperationen".
Genauer gilt

Satz M.11 *Sei $A \in K^{n\times m}$ mit den Zeilen $a_{i\cdot}$, L die oben notierte Eliminationsmatrix. $a'_{i\cdot}$ bezeichne für $(i = 1, ..., n)$ die i-te Zeile von LA. Dann ist:*

$$a'_{i\cdot} = \begin{cases} \gamma_{jj} a_{j\cdot} & \text{wenn } i = j \\ a_{i\cdot} + \gamma_{ij} a_{j\cdot} & \text{wenn } i \neq j. \end{cases}$$

Der **Beweis** ist ein einfaches Nachrechnen und sei deshalb übergangen.
Wählen wir nun unsere Werte γ_{ij} der Eliminationsmatrix speziell mit den Elementen α_{ik} der k-ten Spalte von A, wobei wir $\alpha_{jk} \neq 0$ annehmen, als

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{jk}} & \text{wenn } i = j \\ -\frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{jk}} & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

und betrachten speziell die Elemente α'_{ik} der k-ten Spalte von LA, so folgt

$$\alpha'_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{jk}} \cdot \alpha_{jk} = 1, & \text{wenn } i = j \\ \alpha_{ik} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{jk}} \cdot \alpha_{jk} = 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

d.h. in der k-ten Spalte von LA steht genau in Zeile j eine 1, in den übrigen eine 0.

Wir haben damit aus einer Spalte fast alles "eliminiert", was die Bezeichnung Eliminationsmatrix erklärt.

Überlegen Sie selbst, daß die Multiplikation mit einer transponierten Eliminationsmatrix von rechts die analogen Operationen mit den Spalten statt mit den Zeilen von A ausführt.

Permutationsmatrizen:

Ein weiteres Beispiel von invertierbaren Matrizen sind die speziellen Permutationsmatrizen $P_{\nu,\mu}$ – auch Transpositionsmatrizen genannt –, die aus I_m durch Vertauschen der μ-ten und der ν-ten Spalte hervorgehen.

$$P_{\nu,\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ & & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \vdots & & & & \vdots & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind jeweils die μ-te und die ν-te Zeile und Spalte hervorgehoben.
Für eine solche Matrix ist, wie man leicht nachrechnet $PP = I$.

Für sie gilt analog zu dem letzten Satz:

Satz M.12 *Multipliziert man eine Matrix von links mit der speziellen Permutationsmatrix $P_{\nu,\mu}$, so vertauscht man genau die Zeilen mit den Nummern μ und ν, bei Multiplikation von rechts werden die entsprechenden Spalten vertauscht.*

Mittels dieser Matrizen können wir uns nun ein Verfahren konstruieren, die sog. Gauss-Jordan-Elimination, mit dem wir gegebene Gleichungssysteme $AX = B$ auf Lösbarkeit untersuchen, und falls sie lösbar sind, die Lösung angeben können. Speziell für den Fall $B = I$ können wir damit auch die inverse Matrix berechnen, sofern sie existiert.
Die Grundidee liegt in dem durch den nächsten Satz beschriebenen Sachverhalt:

Satz M.13 *Es seien $A \in K^{n\times m}$, $X \in K^{m\times k}$, $B \in K^{n\times k}$, $C \in K^{n\times n}$ und C invertierbar. Dann gilt:*
X ist Lösung von $AX = B$ genau, wenn X Lösung von $CAX = CB$ ist.

Beweis: Gilt $AX = B$, so auch $CAX = CB$. Gilt umgekehrt $CAX = CB$, so auch $C^{-1}CAX = C^{-1}CB$, d.h. wegen $C^{-1}C = I$ also $AX = B$. □

Dieser Satz besagt, daß wir zum Lösen von $AX = B$ zunächst unser System mittels einer invertierbaren Matrix C auf eine "einfachere" Form transformieren können und dann dieses System lösen. Diese Transformation werden wir in mehreren Schritten ausführen, wobei wir die schon als invertierbar bekannten Eliminations- bzw. Permutationsmatrizen benutzen. Damit können wir nun durch sukzessive Multiplikation von links mit geeigneten Permutations- und Eliminationsmatrizen jede Matrix auf die sogenannte GAUSS-JORDAN-Form bringen.

Definition M.14 *Eine Matrix $C \in K^{n \times m}, C = (\gamma_{ij})$ hat "GAUSS-JORDAN-Form", wenn gilt: Es gibt Indizes $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_r \leq m$, so daß für die Spalten $c_{\cdot j}$ von C gilt:*

$$c_{\cdot j} \quad \begin{cases} = e_\rho & \text{falls für ein } \rho \ \leq r, j = k_\rho \\ \in \operatorname{span}(e_1, ..., e_\rho) & \text{falls } j < k_{\rho+1} \ (0 \leq \rho < r) \\ \in \operatorname{span}(e_1, ..., e_r) & \text{falls } k_r < j \end{cases}$$

Die k_ρ heißen Pivot-Indizes.

Ein typisches Beispiel für eine Matrix in Gauß-Jordan-Form ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pivot-Indizes sind

$$k_1 = 2,\ k_2 = 4,\ k_3 = 7,\ k_4 = 8,$$

mit $\times$ sind nicht weiter bekannte Eintragungen bezeichnet.
Auch die Einheitsmatrix I_n und die Nullmatrix 0 sind in Gauß-Jordan-Form.
Wir werden nun ein Verfahren kennen lernen, mit dem wir jedes Gleichungssystem $AX = B$ mittels der oben beschriebenen äquivalenten Umformung durch Multiplikation (von links) mit Eliminations- bzw. Permutationsmatrizen auf ein System $\hat{A}X = \hat{B}$ bringen können, in dem $\hat{A}$ Gauß-Jordan-Form hat.
Für dessen konkrete Durchführung brauchen wir aber gar nicht diese Eliminationsmatrizen etc. selbst zu bestimmen, sondern lediglich in geeigneter Folge mit geeigneten Parametern die durch sie bewirkten *Zeilenoperationen* durchzuführen:

- Vertausche zwei Zeilen.
- Multipliziere eine Zeile mit einem Faktor $\neq 0$.
- Addiere zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen.

Das dafür im folgenden beschriebene Verfahren heißt GAUSS-JORDAN-Elimination. Ein vollständiger Algorithmus dafür ist als nächstes beschrieben, danach ist er nochmal etwas unpräziser, aber dafür handlungsorientierter notiert.

Gauss-Jordan-Elimination: *Setze $A^{(0)} := A$, $B^{(0)} := B$. Setze $k_0 := 0$ und $r := 0$. Es seien $\alpha_{ij}^{(r)}$ die Elemente in $A^{(r)} \in K^{n \times m}$.*

1. *Suche ein Element $\alpha_{ij}^{(r)} \neq 0$ mit $i > r$, $j > k_r$:*
   Gibt es kein solches, so ist der Algorithmus mit $\hat{A} := A^{(r)}$, $\hat{B} := B^{(r)}$ beendet.
   Gibt es ein solches, so setze

$$k_{r+1} := \min\{j | j > k_r \ ; \ \exists_{i>r} \alpha_{ij}^{(r)} \neq 0\},$$
$$\mu := \min\{i | i > r \ ; \ \alpha_{i,k_{r+1}}^{(r)} \neq 0\}.$$

   Weiter bei 2.

2. *Vertausche in $A^{(r)}$ und in $B^{(r)}$ Zeile $r+1$ mit Zeile μ. Die neuen Matrizen seien $\hat{A}^{(r)}$ und $\hat{B}^{(r)}$.*
   Man beachte, daß in Zeile $r+1$ von $\hat{A}^{(r)}$ das Element in der Spalte k_{r+1} nun $\neq 0$ ist, d.h. $\hat{\alpha}^{(r)}_{r+1,k_{r+1}} \neq 0$ und alle Elemente davor $= 0$ sind, d.h. $\hat{\alpha}^{(r)}_{r+1,j} = 0$ für $1 \leq j < k_{r+1}$.
   Weiter bei 3.
3. *Wähle die Eliminationsmatrix L so, daß in $L\hat{A}^{(r)}$ die Spalte mit der Nummer k_{r+1} zum Einheitsvektor e_{r+1} wird. Setze $A^{(r+1)} := L\hat{A}^{(r)}$, $B^{r+1} := L\hat{B}^{(r)}$, $r := r+1$ und weiter bei 1.*

Die Matrix L braucht man dabei gar nicht explizit zu kennen. Man hat lediglich in $A^{(r)}$ *und* $B^{(r)}$ *simultan* folgendes zu tun:

1. Wähle $\gamma := \frac{1}{\hat{\alpha}^{(r)}_{r+1,k_{r+1}}}$ und multipliziere jedes Element der $(r+1)$-ten Zeile mit dem Faktor γ.
2. Für $i = 1, ..., n$, $i \neq r+1$ wähle $\gamma_i := \hat{\alpha}^{(r)}_{i,k_r+1}$ und ersetze die i-te Zeile durch (i-te Zeile) - $\gamma_i \cdot ((r+1))$ -te Zeile).

Dann wird die k_{r+1} -te Spalte zum Einheitsvektor und, da alle Elemente der $(r+1)$ -ten Zeile vor der Spalte k_{r+1} in $\hat{A}^{(r+1)}$ schon $= 0$ sind, wird an diesen Spalten nichts geändert.
Da bei den einzelnen Schritten jedesmal mit einer invertierbaren Matrix multipliziert wurde und das Produkt invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist, haben wir also

Satz M.15 *Zu jedem Gleichungssystem $AX = B$ gibt es eine invertierbare Matrix C, so daß mit $\hat{A} := CA$, $\hat{B} := CB$ in dem äquivalenten System $\hat{A}X = \hat{B}$ die Matrix $\hat{A}$ in Gauß-Jordan-Form ist.*

Zur praktischen Durchführung schreibe man die beiden Matrizen A und B zweckmäßigerweise durch einen senkrechten Strich getrennt nebeneinander und wende die oben beschriebenen Zeilenoperationen jeweils auf die volle Zeile dieser Matrix $(A|B)$ an.
Dann ist also rekursiv beim r-ten Großschritt folgendes zu tun:

- Suche die erste Spalte links vom senkrechten Strich, die in einer Zeile mit Nummer $\geq r$ ein Element $\neq 0$ besitzt. Die Nummer dieser Spalte wird der nächste Pivot-Index k_r. Gibt es keine solche Spalte mehr, so sind wir fertig.
- Schaffe das gerade gefundene Element durch Zeilentausch in die Zeile mit Nummer r. Zu tauschen sind die vollständigen Zeilen, also auch die Teile rechts vom senkrechten Strich. Das Element in Zeile r und Spalte k_r – das sogenannte Pivotelement – ist jetzt $\neq 0$.
- Multipliziere die (Lang-)Zeile r mit dem Reziprok-Wert des Pivotelements. Danach hat des Pivotelement den Wert 1.
- Addiere zu den restlichen (Lang-)Zeilen solche Vielfache der Zeile r, daß in der Pivot-Spalte eben gerade überall Nullen entstehen.
- Beginne den nächsten Großschritt.

Achtung: *Die als Pivotspalten auszuwählenden Spalten und entsprechend die Pivotelemente dürfen nur in der A-Matrix, also nur links vom Strich gesucht werden. Alle anderen Operationen beziehen sich immer auf die langen Zeilen, also auf beide Teile links und rechts vom Strich.*

Betrachten wir Spezialfälle:

Sei $A \in K^{n\times n}$. Ist A invertierbar?
Wir untersuchen das System $AX = I$ mit $I = I_n$.
GAUSS-JORDAN-Elimination liefert ein invertierbares C, so daß dies äquivalent ist zu $CAX = C$ wobei $\hat{A} := CA$ in GAUSS-JORDAN-Form.

Diese Matrix C steht in dem Schema der GAUSS-JORDAN-*Elimination am Ende der Rechnung rechts vom senkrechten Strich!*

1. Fall: $\hat{A} = I_n$: Dann haben wir $I_nX = C$, d.h. $X = C$.
Somit ist $AX = I$ lösbar und die invertierbare Matrix $X(= C)$ ist Lösung von $AX = I$, d.h. $AC = I$. Nach Satz M.10 ist dann auch A invertierbar und $A^{-1} = C$.

Geht also bei GAUSS-JORDAN-*Elimination $AX = I$ über in $IX = C$, so ist C die Inverse, d.h. $A^{-1} = C$.*

2. Fall: $\hat{A} \neq I_n$: Ohne Beweis sei vermerkt, daß dann A *nicht* invertierbar ist. Wir werden dies später noch genauer untersuchen.

Sei $A \in K^{n\times m}, b \in K^{n\times 1}$, gesucht $x \in K^{m\times 1}$, so daß $Ax = b$.
Wir haben also ein Gleichungssystem mit n Gleichungen in m Unbekannten.
Wir führen GAUSS-JORDAN-Elimination aus und erhalten $\hat{A}x = \hat{b}$.
Es seien

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

und $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_r \leq m$ die Pivot-Indizes von $\hat{A} = (\hat{\alpha}_{ij})$. Dann erhält man aus der speziellen Form von $\hat{A}$:
Die Zeilen von $\hat{A}$ mit Nummern $> r$ sind alle $= 0$. Somit folgt:

1. Ist für ein $i > r$ ein $\beta_i \neq 0$, so ist das System $\hat{A}x = \hat{b}$ und damit auch das System $Ax = b$ nicht lösbar.

2. Sei also für alle $i > r : \beta_i = 0$. Dann ist das System $\hat{A}x = \hat{b}$ lösbar.

   Eine Lösung ist

$$\xi_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } j \notin \{k_1, ..., k_r\} \\ \beta_\rho & \text{wenn } j = k_\rho,\ (\rho = 1, ..., r). \end{cases}$$

   Sofern $r < m$, d.h. nicht alle Spalten Pivotspalten sind, erhält man alle Lösungen auf folgende Weise:

   Wähle für $j \notin \{k_1, ..., k_r\}$ irgendwelche Werte ξ_j^0. Dann ist

$$\xi_j := \begin{cases} \xi_j^0 & \text{wenn } j \notin \{k_1, ..., k_r\} \\ \beta_\rho - \sum_{\mu \notin \{k_1,...,k_r\}} \xi_\mu^0 \cdot \hat{\alpha}_{\rho\mu} & \text{wenn } j = k_\rho \end{cases}$$

   eine Lösung.

   Auch dies werden wir noch genauer untersuchen.

Wir notieren hier noch ein konkretes Zahlenbeispiel, in dem A eine 4×5 - Matrix und B eine einzigen Spalte ist.

Die Ausgangsmatrix $(A|B)$ lautet:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{2} & 4 & 4 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 8 & -4 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 12 & 12 & -6 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

Die erste Spalte wird die Pivotspalte, darin des erste Element das Pivotelement. Wir brauchen nicht zu tauschen.
Jetzt ist die erste Zeile mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren und dann sind solche Vielfache der ersten Zeile von den weiteren abzuziehen, daß in der ersten Spalte unten Nullen entstehen. Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 2 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

Jetzt ist die dritte Spalte die Pivotspalte, darin das erste Element $\neq 0$ in Zeile 3. Damit sind die Zeilen mit den Nummern 2 und 3 zu tauschen. Danach steht das Pivotelement richtig an Position $(2, 3)$ und hat hier schon den Wert 1, sodaß wir nicht zu normieren brauchen. Indem wir von den übrigen Zeilen Vielfache der zweiten subtrahieren, erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 2 & 0 & -9 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{4} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

Jetzt ist die fünfte Spalte die Pivotspalte, darin das dritte Element $\neq 0$, sodaß wir keine Zeilen zu tauschen haben. Es ist also die dritte Zeile mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ zu multiplizieren und dann mit der dritten Zeile zu eliminieren. Es entsteht

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \underline{1} & 2 & 0 & -9 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist die GAUSS-JORDAN-Form erreicht.