V Vektorräume

Im Vorkapitel hatten wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kennen gelernt und gesehen, daß sie beide den Regeln R1 bis R10 von Fakt O.1 gehorchen. Es gibt noch eine ganze Reihe anderer mathematischer Bereiche, in denen diese Regeln gelten. Der gemeinsame Oberbegriff ist der des "(Zahlen-)Körpers". Der Vollständigkeit halber geben wir eine abstrakte Definition, wenngleich wir uns nur mit dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen beschäftigen werden.

Definition V.1 (Körper) *Ein Körper besteht aus einer Menge K, zwei ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in K$ und zwei Operationen $+, \cdot : K \times K \to K$, sodaß die folgenden Gesetze K1 - K10 gelten:*

K1: $+$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in K}\ (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

K2: 0 *ist neutrales Element bezüglich* $+$, *d.h.* $\forall_{\alpha\in K}\ \alpha+0 = 0+\alpha = \alpha$.

K3: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen $(+)$*: Jede Gleichung* $\alpha+\xi = \beta$ *mit* $\alpha, \beta \in K$ *besitzt genau eine Lösung* $\xi \in K$. *Wir bezeichnen sie mit* $\xi = \beta - \alpha$.

K4: $+$ *ist kommutativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta\in K}\ \alpha+\beta = \beta+\alpha$.

K5: $\cdot$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in K}\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

K6: 1 *ist neutrales Element bezüglich* $\cdot$, *d.h.* $\forall_{\alpha\in K}\ \alpha\cdot 1 = 1\cdot\alpha = \alpha$.

K7: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen $(\cdot)$*: Jede Gleichung* $\alpha\cdot\xi = \beta$ *mit* $\alpha, \beta \in K, \alpha \neq 0$ *besitzt genau eine Lösung* $\xi \in K$. *Wir bezeichnen sie mit* $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$.

K8: $\cdot$ *ist kommutativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta\in K}\ \alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$.

K9: Für beide Operationen zusammen gelten die beiden Distributivgesetze, d.h $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in K}$ *ist*

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$$
$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

K10: Die beiden neutralen Elemente sind verschieden: $1 \neq 0$.

Vereinbarung V.2 *Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, verstehen wir unter einem Körper K stets die rellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$.*

Im Vorkapitel hatten wir einige Beispiele von Vektorräumen kennengelernt, etwa die Ortsvektoren in der Ebene oder den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$. Das Gemeinsame war, daß in allen Fällen die Regeln V1 bis V8 aus Satz O.3 galten, wobei zwei Operationen vorkommen:

– Eine Addition $(+)$ von Vektoren, die wieder einen Vektor ergibt, und

– eine Multiplikation $(\cdot)$ von Vektoren mit Zahlen, was wieder einen Vektor ergibt. Von diesen Zahlen haben wir nur die in den Regeln R1 bis R10 von Fakt O.1 niedergelegten Eigenschaften benutzt, also die Körpereigenschaften.

Nun können wir diesen Begriff des Vektorraumes allgemeiner fassen.

Definition V.3 (Vektorraum) *Ein Vektorraum besteht aus einer Menge V, deren Elemente wir "Vektoren" nennen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$, einem Körper K, (also für uns $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und zwei Operationen*

$$+ \ : \ V \times V \to V \quad \text{und} \quad \cdot \ : \ K \times V \to V,$$

sodaß die folgenden Gesetze V1 bis V8 gelten:

V1: $+$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{x,y,z\in V}\ (x+y)+z = x+(y+z)$.

V2: 0 *ist neutrales Element bezgl.* $+$, *d.h.* $\forall_{x\in V}\ x+0 = 0+x = x$.

V3: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen, d.h. $\forall_{x,y\in V}$ *besitzt jede Gleichung der Art* $x+u=y$ *genau eine Lösung* u. *Wir bezeichnen sie mit* $u := y-x$ *und nennen dies die Differenz der Vektoren* y *und* x.

V4: $+$ *ist kommutativ, d.h.* $\forall_{x,y\in V}\ x+y = y+x$.

V5: $\cdot$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{\lambda,\mu\in K}\ \forall_{x\in V}\ (\lambda\cdot\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

V6: 1 *ist neutrales Element bezgl.* $\cdot$, *d.h.* $\forall_{x\in V}\ 1\cdot x = x$.

Es gelten die Distributivgesetze, d.h. $\forall_{\lambda,\mu\in K}\ \forall_{x,y\in V}$ *gelten*

V7: $\lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x+\lambda\cdot y$,

V8: $(\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x+\mu\cdot x$.

Bemerkung V.4 *Eine Struktur, die den Regeln V1 bis V4 genügt, nennt man eine "abelsche Gruppe". Finden Sie sowas auch schon in einem Körper?*

Gebräuchliche Redeweisen sind *"V ist ein K-Vektorraum"* oder je nach Fall ein *reller* oder ein *komplexer Vektorraum.* Wenn es uns gleichgültig ist, welcher Körper K denn genau beteiligt ist, sprechen wir auch kurz von einem Vektorraum.

Warnung: *Vektorräume über den komplexen Zahlen spielen leider auch in der Physik eine Rolle. Da kommen wir nicht herum!*

Den Punkt $\cdot$ bei $\alpha\cdot x$ lassen wir meist weg. Statt $0-x$ schreiben wir $-x$.
Schauen wir uns zunächst eine Reihe von Beispielen an:

Beispiel V.5 *Es sei*

$$\mathbb{R}^n := \{(\xi_1,...,\xi_n) \mid \xi_i\in\mathbb{R}, i=1,...,n\}$$

die Menge aller n*-tupel von reellen Zahlen. Wir definieren eine Addition* $(+)$: $(\xi_1,...,\xi_n)+(\eta_1,...,\eta_n) := (\xi_1+\eta_1,...,\xi_n+\eta_n)$ *und eine Multiplikation mit Zahlen* $\alpha\in\mathbb{R}:\ \alpha\cdot(\xi_1,...,\xi_n) := (\alpha\xi_1,...,\alpha\xi_n)$.

Künftig schreiben wir diese n*-tupel meist als Spalten und nennen sie "reelle Spaltenvektoren:"*

$$x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

Speziell nennen wir die Spaltenvektoren, die genau an der i*-ten Komponente eine 1 und sonst überall die Komponente 0 haben, die "kanonischen Einheitsvektoren"*

$$e_i = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Für $n=2$ *und* $n=3$ *haben wir das schon im Vorkapitel angeschaut.*

Beispiel V.6 *Es sei $\mathbb{C}^n$ die Menge aller n-tupel von komplexen Zahlen. Wir erklären Addition $(+)$ und Multiplikation mit Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$ formal gleich wie in Beispiel V.5, nur daß jetzt eben alle vorkommenden Zahlen komplex sind.*

Beispiel V.7 *Es sei F die Menge aller auf $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktionen*

$$F := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

Wir erklären in F eine Addition $(+)$: Für $f, g \in F$ bezeichne $f+g$ die für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $(f+g)(t) := f(t) + g(t)$ erklärte Funktion.
Wir erklären in F eine Multiplikation mit reellen Zahlen α : Für $f \in F$ bezeichne αf die für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $(\alpha f)(t) := \alpha \cdot f(t)$ erklärte Funktion.

Im Zusammenhang mit Differentialgleichungen werden solche Funktionen-Vektorräume wichtig werden, insbesondere etwa Räume von der folgenden Art:

Beispiel V.8 *Es sei $C^k[0,1]$ die Menge aller auf dem Intervall $[0,1]$ definierten und dort k- mal stetig differenzierbaren reellwertigen Funktionen. Die Operationen der Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen seien erklärt wie eben.*

Beispiel V.9 *$\mathbb{R}[T]$ bezeichne die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten in einer Variablen T. $+$ bzw. $\alpha\cdot$ seien als die übliche Addition bzw. Multiplikation bei Polynomen erklärt.*

Das waren alles Beispiele für Vektorräume. Prüfen Sie selbst nach, daß alle Erfordernisse aus unserer Definition erfüllt sind.

(Gegen-)Beispiel V.10 *$\mathbb{Z}[T]$ bezeichne die Menge aller Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten in einer Variablen T. $+$ bzw. $\alpha\cdot$ seien als die übliche Addition bzw. Multiplikation bei Polynomen erklärt.*
Dies ist kein *Vektorraum. Denn multiplizieren wir mit reellen oder mit komplexen Zahlen, so treten immer Polynome auf, deren Koeffizienten nicht mehr ganze Zahlen sind, d.h. gar nicht mehr in unserem Bereich liegen.*

An den Beispielen kann man sich leicht von den folgenden Rechenregeln überzeugen.

Satz V.11 *Es gelten*

1. $\forall_{x \in V}\ 0 \cdot x = 0$,
2. $\forall_{\alpha \in K}\ \alpha \cdot 0 = 0$,
3. $\forall_{x \in V}\ (-1) \cdot x = -x$,
4. $\forall_{x,y \in V}\ x - (-y) = x + y$.

Wenn das auch aus den Beispielen klar ist – und davon sollten Sie sich unbedingt überzeugen – so wollen wir diese Regeln doch allgemein nutzen, d.h. auch in solchen Vektorräumen, die wir heute noch gar nicht kennen, die aber beispielsweise im Zusammenhang der Quantenmechanik auftauchen. Und dann sollten wir nicht erst anfangen müssen, wieder all dies nochmal nachzuprüfen. Dafür macht man eben einen

Beweis: Wir stützen uns hier ausschließlich auf die in der Definition für einem Vektorraum notierten Regeln V1 bis V8.

1. $x = 1x = (1+0)x = 1x + 0x = x + 0x$. Damit ist $z := 0x$ Lösung der Gleichung $x + z = x$, die offenbar auch die Lösung $z = 0$ besitzt. Da es nur eine Lösung gibt, muß $z = 0$ sein, was wir zeigen wollten.

2. $\alpha x = \alpha(x+0) = \alpha x + \alpha 0$. Somit ist $z := \alpha 0$ Lösung von $\alpha x + z = \alpha x$ und mit demselben Schluß wie eben also $\alpha x = 0$.

3. Es ist $0 = 0x = (1-1)x = 1x + (-1)x = x + (-1)x$. Also ist $z := (-1)x$ Lösung von $x + z = 0$ und damit $(-1)x = -x$.

4. Betrachten wir die Gleichung $(-y) + z = x$. Eine Lösung ist definitionsgemäß $z = x - (-y)$. Daneben ist aber auch $x + y$ Lösung, denn

$$(-y) + (x+y) = (x+y) + (-y) = x + (y + (-y)) = x + 0 = x.$$

□

In dem Vektorraum V ist zunächst nur eine Addition von zwei Elementen erklärt, während für $x, y, z, u, ... \in V$ Ausdrücke wie $x + y + z + u$ zunächst keinen Sinn geben. Dagegen sind hinreichend geklammerte Ausdrücke wie

$$(x+y) + (z+u), \quad ((x+y)+z)+u, \quad ((x+z)+u)+y$$

sinnvoll. Mit Hilfe der Regeln V1 und V4 ergibt sich aber, daß alle diese Ausdrücke dasselbe Element von V liefern. Es gilt

Satz V.12 *Für die Addition in einem Vektorraum gelten das allgemeine Associativgesetz und das allgemeine Kommutativgesetz.*

Dies bedeutet:
Sind $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ gegeben, ordnen wir sie in irgendeiner Reihenfolge an, schreiben + Zeichen zwischen je zwei und fügen soviele Klammern ein, daß eine auswertbare Formel entsteht, so erhalten wir stets dasselbe Element von V unabhängig von der gewählten Reihenfolge und Klammerung. Für das so definierte Element schreiben wir

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \text{ oder } \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ oder } \sum_{i \in I} x_i, \text{ wobei } I = \{1, 2, ..., n\}.$$

Erwähnt seien noch die Spezialfälle

$$\sum_{i=1}^{1} x_i \quad = x_1, \quad \sum_{i=1}^{0} x_i \quad = 0.$$

Sind $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ und $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ gegeben, so sind auch die $\alpha_i x_i \in V$ und somit auch $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in V$.

Bezeichnung V.13 (Linearkombination, Span, endlich erzeugt) *Für Vektoren $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ und Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in K$ heißt*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in V$$

eine "Linearkombination der x_i mit Koeffizienten α_i."
Die Menge aller aus $x_1, x_2, ..., x_n$ bildbaren Linearkombinationen nennen wir ihren "Span" oder den von $x_1, x_2, ..., x_n$ "erzeugten" oder "aufgespannten Unterraum" und bezeichnen ihn als

$$\begin{aligned} \operatorname{span}(x_1, x_2, ..., x_n) &:= \operatorname{span}(x_i \mid i \in \{1, 2, ..., n\}) \\ &:= \sum_{i=1}^{n} K \cdot x_i := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in K, \ i = 1, ..., n \Big\} \end{aligned}$$

Den von dem leeren System erzeugten Raum setzen wir fest als

$$\mathrm{span}(\emptyset) := \{0\},$$

d.h. den Vektorraum, der nur eine einziges Element, eben 0 *enthält.*
Wir nennen $x_1, x_2, ..., x_n$ *ein "Erzeugendensystem" von* $\mathrm{span}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *und nennen einen Vektorraum "endlich erzeugt", wenn er ein Erzeugendensystem aus endlich vielen Elementen besitzt.*

Hier ist noch ein Begriff nachzutragen:

Definition V.14 (Unterraum) *Ist* V *ein Vektorraum,* U *eine Teilmenge von* V*, sodaß* $0 \in U$ *und mit den auf* U *eingeschränkten Operationen in* V *die Menge* U *selbst ein* K*-Vektorraum ist, so heißt* U *ein "Unter-(*K*-Vektor)-Raum" von* V*.*

Ein Unterraum ist also insbesondere selbst ein Vektorraum.
Um von einer Menge $U \subset V$ zu prüfen, ob sie ein Unterraum ist, sind also mit den von V übernommenen Operationen die Axiome V1 bis V8 nachzuprüfen. Der folgende Satz hilft da, künftig Arbeit zu sparen.

Satz V.15 *Ist* V *ein* K*-Vektorraum und* $U \subset V$ *mit*

1. $0 \in U$,
2. $\forall_{x,y \in U}\ x + y \in U$, *d.h. ist* U *abgeschlossen unter* $+$, *und*
3. $\forall_{\alpha \in K}\ \forall_{x \in U}\ \alpha x \in U$, *d.h. ist* U *abgeschlossen unter* $\alpha \cdot$,

so ist U *ein Unterraum.*

Beweis: Wegen 1. ist $0 \in U$, und wegen 2. ist die Einschränkung von $+\ : V \times V \to V$ auf $U \times U \to V$ sogar eine Abbildung $U \times U \to U$. Analog ergibt die Einschränkung von $\alpha\cdot$ eine Abbildung $\cdot\ : K \times U \to U$.
Somit haben wir noch für diese durch Einschränkung gewonnenen Operationen die Axiome V1 bis V8 nachzuweisen. Wir tun dies exemplarisch für V3:
Es ist zu zeigen: ***Zu jedem*** $x, y \in U$ ***gibt es genau ein*** $z \in U$***, sodaß*** $x + z = y$.
Da $U \subset V$ und V ein Vektorraum ist, wissen wir, daß es in V genau eine solche Lösung z unserer Gleichung gibt, nämlich $z = y - x = y + (-1)x$. Die liegt aber wegen 2. und 3. schon in U. Also gilt V3.
Versuchen Sie selbst, die anderen Eigenschaften nach diesem Muster zu beweisen! □

Satz V.16 *Für Vektoren* $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ *ist* $U := \mathrm{span}(x_1, x_2, ..., x_n)$ *ein Unterraum von* V*.*

Beweis: Das ist eine schöne Übung. Wenden sie Satz V.15 an! □

Beispiel V.17 *Für Vektoren* $x_1, x_2, ... \in \mathbb{R}^3$ *ist*

- $G := \mathrm{span}(x_1)$ *eine Gerade durch den Nullpunkt?*
- $E := \mathrm{span}(x_1, x_2)$ *eine Ebene durch den Nullpunkt?*
- $R := \mathrm{span}(x_1, x_2, x_3)$ *der ganze Raum?*

Die Fragezeichen sagen, daß hier etwas nicht ganz korrekt ist. Wann stimmt hier was nicht?

Mit solchen von endlich vielen Elementen erzeugten (Unter-)Räumen werden wir es immer wieder zu tun haben. Dazu einige nützliche Eigenschaften:

Satz V.18 *Ist* V *ein Vektorraum, darin* $x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n, y \in V$*, und ist damit* $U := \mathrm{span}(x_1, ..., x_m)$*, so gelten*

1. *Es ist $x_i \in U$ für $i = 1, ..., m$, d.h. die U erzeugenden Elemente gehören selbst zu U.*
2. *$U = \text{span}(x_1, ..., x_m) \subset \text{span}(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$.*
3. *Ist $y \in U$, so ist $U = \text{span}(x_1, ..., x_m) = \text{span}(x_1, ..., x_m, y)$.*
4. *Für $x_{m+1}, ..., x_n \in U$ ist $U = \text{span}(x_1, ..., x_m) = \text{span}(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$.*

Die letzten Aussagen besagen, daß der aufgespannte Raum im allgemeinen wächst, wenn man zu dem Erzeugendensystem weitere Vektoren hinzufügt, jedoch unverändert bleibt, wenn man diese schon aus dem Raum U selbst wählt.

Beweis:

1. Für $1 \leq i \leq m$ ist
$$x_i = 1x_i = 0x_1 + ... + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + ... + 0x_m.$$
2. Ist $x \in \text{span}(x_1, ..., x_m)$, so haben wir
$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} 0x_i \in \text{span}(x_1, ..., x_n).$$
3. Wegen $y \in U$ kann man y schreiben als $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i$. Dann ist $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \alpha y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \alpha\beta_i) x_i \in \text{span}(x_1, ..., x_m) = U$. Somit ist $\text{span}(x_1, ..., x_m, y) \subset \text{span}(x_1, ..., x_m)$ und die andere Inclusion gilt nach 2.
4. Man wende 3. sukzessive für $y := x_{m+1}, x_{m+2}, ...$ an. □

Die schon im Vorkapitel eingeführten Begriffe linear abhängig bzw. unabhängig spielen auch im allgemeinen Rahmen eine wichtige Rolle.

Definition V.19 (Linear abhängig, unabhängig, frei, Basis)
Es sei V ein K-Vektorraum, darin $(x_1, ..., x_n)$ eine Familie von Vektoren.

1. *Die Familie $(x_1, ..., x_n)$ heißt "linear abhängig", abgekürzt "l.a.", wenn es Koeffizienten $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ gibt, von denen mindestens einer $\neq 0$ ist, sodaß*
$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$
2. *Die Familie $(x_1, ..., x_n)$ heißt "linear unabhängig", abgekürzt "l.u." oder "frei", wenn sie nicht linear abhängig ist, d.h. wenn $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$ nur für $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ möglich ist.*
3. *Die Familie $(x_1, ..., x_n)$ heißt eine Basis von V, wenn sie unabhängig ist und V erzeugt.*

Jede unabhängige Familie $(x_1, ..., x_n)$ ist natürlich Basis von $U := \text{span}(x_1, ..., x_n)$, ferner sollten Sie sich folgende Spezialfälle einprägen:

Fakt V.20

1. *Eine Familie, die aus genau einem Element und zwar dem Nullelement besteht, ist linear abhängig,*
2. *die leere Familie ist unabhängig und Basis des nur aus der Null bestehenden Raumes $\{0\}$.*

Dies klingt wieder recht spitzfindig, wozu braucht man das? Für sich genommen braucht man das nicht, aber wir werden, etwa bei der Behandlung linearer Gleichungssysteme immer wieder auf Situationen stoßen, wo es gerade interessant ist, zu wissen, daß der "Lösungsraum" aus genau einem einzigen Element besteht, und das läßt sich dann in dieser Sprache zwanglos mit allgemeineren Aussagen kombinieren.

Wir werden sehen, daß sich über Basen trefflich rechnen läßt. Dazu zunächst

Satz V.21 *Eine Familie $(x_1, ..., x_n)$ ist Basis von V genau dann, wenn sich jedes $x \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombination der $x_i,\ i = 1, 2, ..., n$ darstellen läßt.*

Beweis: *Die Familie $(x_1, ..., x_n)$ sei Basis von V* : Sei $x \in V$ beliebig. Als Basis erzeugt die Familie ganz V, man kann also x darstellen als

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

Ist nun

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

noch eine Darstellung für dasselbe x, so ist

$$0 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) x_i$$

und, da $(x_1, ..., x_n)$ als Basis auch unabhängig sind, müssen alle Koeffizienten verschwinden, d.h. stets $\alpha_i = \beta_i$ sein, sodaß es also nur eine einzige Darstellung für x gibt.
Jedes $x \in V$ besitze genau eine Darstellung: Dann gilt dies auch für das Nullelement, was die Unabhängigkeit zeigt, ferner läßt sich auch jedes Element darstellen, sodaß die Familie ganz V erzeugt. □

Lemma V.22 *Ist $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig und ist $y \notin \operatorname{span}(x_1, ..., x_m)$, so ist auch $(x_1, ..., x_m, y)$ unabhängig.*

Beweis: Betrachten wir eine Linearkombination, die 0 ergibt:

$$0 = \alpha y + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i.$$

Ist $\alpha \neq 0$, so ist

$$\alpha y = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \text{ d.h. } y = \sum_{i=1}^{m} \frac{-\alpha_i}{\alpha} x_i \in \operatorname{span}(x_1, ..., x_m).$$

Wir hatten aber gerade vorausgesetzt, daß dies nicht sein sollte. Damit ist notwendig $\alpha = 0$, und, da $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig ist, ist notwendig $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$. Folglich läßt sich die 0 aus $(x_1, ..., x_m, y)$ nur trivial kombinieren, d.h. diese Familie ist linear unabhängig. □

Dieser Beweis enthält eine Standard-Methode zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit: *Man setze mit unbekannten Koeffizienten eine Linearkombination an, die die Null ergibt, und schließe aus dem, was man über die beteiligten Vektoren weiß, darauf, daß alle Koeffizienten null sein müssen.*
Dies liefert uns den nützlichen

Basis-Ergänzungssatz V.23 *Ist $(y_1, ..., y_n)$ erzeugend für einen Vektorraum V und $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig in V, so gibt es eine Zahl p, sodaß bei passender Nummerierung der y_i die Familie $(x_1, ..., x_m, y_{p+1}, ..., y_n)$ Basis von V ist*

Beweis: Ist $(x_1, ..., x_m)$ schon erzeugend, so setze $p := n$. Andernfalls können nicht alle y_i in $\mathrm{span}(x_1, ..., x_m)$ liegen, sodaß wir mit wenigstens einem das vorige Lemma anwenden können, d.h. daß bei geeigneter Nummerierung $(x_1, ..., x_m, y_n)$ linear unabhängig ist. Nun fängt man mit diesem System von vorne an. Nach endlich vielen (höchstens n) Schritten hat man aber notwendig dann ein Erzeugendensystem gefunden, das dann auch unabhängig ist, also Basis. □

Damit haben wir insbesondere, indem wir mit irgend einem Element $x_1 \neq 0$ beginnen, den

Basis-Satz V.24 *Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis.*

Bemerkung *Dieser Satz gilt sogar ohne die Einschränkung "endlich erzeugt". Für den Beweis brauchen wir aber dann Hilfsmittel, die uns hier nicht zur Verfügung stehen.*

Eine andere Anwendung von Basis-Ergänzungssatz V.23 ist

Satz V.25 *Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis.*

Im $\mathbb{R}^n$ und im $\mathbb{C}^n$ bilden jeweils die kanonischen Einheitsvektoren die "Standard-Basis" $(e_1, ..., e_n)$. Sie ist aber keineswegs die einzige. Überlegen Sie selbst, daß etwa im $\mathbb{C}^4$ die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; x_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis bilden. Erfinden Sie selbst weitere Basen!

Zu einer Basis $(x_1, ..., x_n)$ von V heißt die Zahl n die "Länge" der Basis. In den Beispielen haben Sie gesehen, daß ein Vektorraum i. a. viele verschiedene Basen besitzt, wir werden aber sehen, daß sie alle dieselbe Länge haben. Dazu zeigen wir zunächst einen Satz, der beschreibt, wie man aus einer Basis eine neue gewinnen kann.

Satz V.26 *Es sei $(y_1, ..., y_n)$ eine Basis von V. Der Vektor x habe die Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$. Ist dann für einen Index k, $(1 \leq k \leq n)$ der Koeffizient $\alpha_k \neq 0$, so ist auch $(y_1, ..., y_{k-1}, x, y_{k+1}, ..., y_n)$ Basis von V.*

Zu jedem $x \neq 0$ gibt es stets so einen Index k. Damit kann man jedes $x \neq 0$ gegen ein geeignetes Basiselement austauschen und erhält jeweils wieder eine Basis von V.

Beweis: Die Basis sei so nummeriert, daß $\alpha_1 \neq 0$.

1. $(x, y_2, ..., y_n)$ *ist erzeugend:* Es ist

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \quad \text{d.h.} \quad \alpha_1 y_1 = x - \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i,$$

also

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} x - \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} y_i \in \mathrm{span}(x, y_2, ..., y_n).$$

Mit Satz V.18 ist dann

$$V \supset \mathrm{span}(x, y_2, ..., y_n) = \mathrm{span}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \supset \mathrm{span}(y_1, y_2, ..., y_n) = V,$$

sodaß also

$$V = \mathrm{span}(x, y_2, ..., y_n).$$

2. $(x, y_2, ..., y_n)$ ***ist unabhängig:*** Wegen $\alpha_1 \neq 0$ ist $x \notin \mathrm{span}(y_2, ..., y_n)$. Damit folgt die Behauptung aus Lemma V.22. □

Wir erweitern diesen Satz zum

Satz V.27 (Austauschsatz von Steinitz) *Ist $(y_1, y_2, ..., y_n)$ Basis von V und $(x_1, ..., x_k)$ unabhängig, so ist $k \leq n$ und bei geeigneter Nummerierung der y_i ist $(x_1, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_n)$ Basis von V.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über k.
Im Falle $k = 0$ sind keine Vektoren auszutauschen und der Satz ist richtig.
Sein nun $k > 0$ und der Satz für $k - 1$ schon bewiesen. Wir haben damit also:

1. $k - 1 \leq n$ und
2. $(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, ..., y_n)$ ist Basis von V.

Falls $k - 1 = n$ wäre, wäre schon $(x_1, ..., x_{k-1})$ Basis von V. Dann wäre aber speziell $x_k \in \mathrm{span}(x_1, ..., x_{k-1})$, d.h. $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ oder $0 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + (-1)x_k$, was wegen der Unabhängigkeit der $(x_1, ..., x_k)$ nicht sein kann.
Also ist notwendig $k - 1 < n$, d.h. $k \leq n$.
Da $(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, ..., y_n)$ eine Basis ist, gibt es eine Darstellung

$$x_k = \alpha_1 x_1 + ... \alpha_{k-1} x_{k-1} + \beta_k y_k + ... + \beta_n y_n.$$

Wären alle $\beta_i = 0$, so kämen wir auf den selben Widerspruch wie eben. Also ist wenigstens einer dieser β-Koeffizienten $\neq 0$ und bei geeigneter Nummerierung also $\beta_k \neq 0$.
Mit Satz V.26 folgt dann, daß auch $(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, y_{k+1}, ..., y_n)$ eine Basis ist. □

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen zu

Satz und Definition V.28 (Dimension)

1. *Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis endlicher Länge.*
2. *Besitzt ein Vektorraum eine endliche Basis $(y_1, ..., y_n)$, so haben alle Basen dieselbe Länge n. Wir nennen n die "Dimension" des Vektorraumes V und notieren $\dim V = n$.*
3. *Gibt es in V zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine unabhängige Familie mit n Elementen, so besitzt V keine endliche Basis. Wir nennen dann V "unendlichdimensional" und notieren $\dim V = \infty$.*
4. *Die Dimension von $V = \{0\}$ wird $= 0$ gesetzt.*

Beweis:

1. Siehe Basis-Satz.
2. Besitzt V eine endliche Basis $(y_1, ..., y_n)$, so ist V endlich erzeugt. Ist $(x_1, ..., x_k)$ eine weitere Basis, so ist sie ein unabhängiges System und nach dem Austauschsatz von Steinitz ist $k \leq n$. Vertauschen wir die Rollen der Basen, so folgt ebenso $n \leq k$, was die Invarianz der Basislänge beweist.

3. Wäre $(y_1, ..., y_n)$ eine endliche Basis, so könnte jedes unabhängige System höchsten n Elemente haben. □

Betrachten wir noch Basen für Unterräume.

Satz V.29 *Es sei U Unterraum eines n-dimensionalen Vektorraumes V.*

1. *U ist endlich erzeugt und hat eine Dimension* $\dim U \leq n$.
2. *Jede Basis $(y_1, ..., y_m)$ von U läßt sich zu einer Basis $(y_1, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n)$ von V ergänzen.*

Beweis: Zu 1.: Sei $(y_1, ..., y_m)$ Basis von U. Sie ist eine unabhängige Familie in V und nach dem Austauschsatz von STEINITZ ist dann $m \leq n$.
Das ist aber nur die Hälfte des Beweises. Hat denn U überhaupt eine Basis, ist denn U endlich erzeugt? – Dies folgt aber aus dem Basis-Ergänzugssatz. Denn beginnen wir den für U mit einem nichttrivialen Element von U, so erhalten wir entweder nach endlich vielen Schritten eine Basis von U oder wir erhielten in U und damit aber auch in V beliebig große unabhängige Familien und das geht in dem endlich dimensionalen V eben nicht.
Zu 2.: Beginne den Basis-Ergänzungsatz mit der gegebene Basis von U. □

Die Standard-Basis im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ hat die Länge n, somit ist also

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \mathbb{C}^n = n.$$

Die in Beispiel V.7 und Beispiel V.8 behandelten Funktionenräume sind nicht endlichdimensional. Im Zusammenhang mit Differentialgleichungen werden wir aber davon endlichdimensionale Unterräume kennenlernen und darauf dann auch die eingeführten Begriffe anwenden.

Sind U_1, U_2 Unterräume von V, so sind auch

- $U_1 \cap U_2$ und
- $U_1 + U_2 := \{x = u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \neq U_1 \cup U_2$.

Unterräume von V, genannt der "Durchschnitt" und die "Summe". Dafür gilt

Satz V.30 (Dimensionsformel) *Sind U_1, U_2 Unterräume eines endlich-dimensionalen Raumes V, so gilt*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis: Es sei $\dim U_1 = k$, $\dim U_2 = m$, $\dim(U_1 \cap U_2) = r$, $\dim(U_1 + U_2) = s$. Wir wählen eine Basis $(d_1, ..., d_r)$ von $U_1 \cap U_2$. Da $U_1 \cap U_2$ Unterraum von U_1 ist, können wir diese Basis zu einer Basis

$$(d_1, ..., d_r, x_{r+1}, ..., x_k) \text{ von } U_1$$

ergänzen. Analog erhalten wir eine Basis

$$(d_1, ..., d_r, y_{r+1}, ..., y_m) \text{ von } U_2.$$

Es wird dann $U_1 + U_2$ von $(d_1, ..., d_r, x_{r+1}, ..., x_k, y_{r+1}, ..., y_m)$ erzeugt, und, wenn dies System sogar unabhängig ist, also dann Basis von $U_1 + U_2$ ist, so erhält man die Dimensionsformel durch Abzählen.
Sei also

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i d_i + \sum_{i=r+1}^{k} \beta_i x_i + \sum_{i=r+1}^{m} \gamma_i y_i = 0.$$

Dann ist

$$u := \sum_{i=r+1}^{m} (-\gamma_i) y_i = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i d_i + \sum_{i=r+1}^{k} \beta_i x_i.$$

Die linke Summe enthält nur Vektoren aus U_2, somit ist $u \in U_2$. Die rechte Summe enthält nur Vektoren aus U_1, folglich ist $u \in U_1$. Insgesamt ist also $u \in U_1 \cap U_2$ und hat damit eine Darstellung als

$$u = \sum_{i=1}^{r} \delta_i d_i.$$

Da wir von Basen der Teilräume ausgegangen sind, folgen damit der Reihe nach

$$\delta_i = \alpha_i \ (i = 1, ..., r), \text{ und } \beta_i = 0 \ (i = r+1, ..., k),$$

dann aber auch

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i d_i + \sum_{i=r+1}^{m} \gamma_i y_i = 0,$$

und da hier wieder mit einer Basis gearbeitet wird, sind auch alle α_i und alle $\gamma_i = 0$. Also liegt eine Basis von $U_1 + U_2$ vor. □

Ist speziell $U_1 \cap U_2 = 0$ und $U_1 + U_2 = V$, so spricht man von "komplementären Unterräumen" von V.
Sie bilden ein Beispiel für den folgenden Begriff

Definition V.31 *Sind $U_1, ..., U_k$ Unterräume eines Vektorraumes V, für die gilt, daß jedes Element $v \in V$ genau eine Darstellung besitzt als*

$$v = u_1 + ... + u_k, \text{ wobei stets } u_i \in U_i \text{ ist,}$$

so nennt man V die "direkte Summe der U_i" und schreibt

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i.$$

Auf dem $\mathbb{R}^2$ bzw. dem $\mathbb{R}^3$ hatten wir ein Skalarprodukt eingeführt, das uns Begriffe wie Norm und Orthogonalität lieferte. Dies kann man auf allgemeinere reelle oder komplexe Räume ausdehnen.

Definition V.32 *Es sei U ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder über $K = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to K$ heißt ein positiv definites, hermitesches Skalarprodukt, wenn S1 bis S4 gelten:*

S1: $\forall_{x,y \in U} \ \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *(hermitesch),*

S2: $\forall_{x,y_1,y_2 \in U} \ \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$,

S3: $\forall_{x,y \in U} \forall_{\alpha \in K} \ \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

S4: $\forall_{x \in U} \ \langle x, x \rangle \geq 0, = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(positiv definit).*

Die Regel S1 liefert insbesondere, daß für jedes $x \in U$ der Wert $\langle x, x \rangle$ reell ist, sodaß S4 eine sinnvolle Forderung darstellt.
Sieht man von dem – nur im komplexen Fall relevanten – Übergang zum konjugiert-komplexen Wert bei S1 ab, so sind dies genau die Regeln, die wir schon im Vorkapitel besprochen hatten.

Definition V.33 *Ein reeller oder komplexer Raum mit Skalarprodukt heißt ein "euklidischer" bzw. "unitärer" Raum.*

Im $\mathbb{C}^n$ ist

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} \overline{\xi_i}\eta_i$$

ein solches Skalarprodukt, das "Standard-Skalarprodukt", bzw. analog im $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\eta_i.$$

Für $n = 2, 3$ hatten wir dies im Vorkapitel betrachtet.
Auch in diesen Räumen gibt es noch viele weitere Skalarprodukte und insbesondere werden später Funktionen-Räume mit Skalarprodukt wichtig werden.
Ein paar nützliche Rechenregeln, die für alle unitären bzw. euklidischen Räume gelten, enthält

Satz V.34

1. *Es ist* $\langle x, 0\rangle = \langle 0, y\rangle = 0$.
2. $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle$.
3. $\langle \alpha y + \beta z, x\rangle = \overline{\alpha}\langle y, x\rangle + \overline{\beta}\langle z, x\rangle$.

D.h. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *ist „konjugiert linear" im ersten Argument.*

Beweis: Zu 3.: Mit S1 und 2. ist $\langle \alpha y + \beta z, x\rangle = \overline{\langle x, \alpha y + \beta z\rangle} = \overline{\alpha\langle x, y\rangle + \beta\langle x, z\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle x, y\rangle} + \overline{\beta}\,\overline{\langle x, z\rangle} = \overline{\alpha}\langle y, x\rangle + \overline{\beta}\langle z, x\rangle$. □

Da $\langle x, x\rangle \geq 0$ für jedes x, können wir hieraus stets die eindeutig bestimmte nicht negative Quadratwurzel ziehen:

Definition V.35 *Sei* $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein Raum mit Skalarprodukt. Dann heißt die Abbildung* $|\cdot| : U \to \mathbb{R} : x \mapsto |x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *die "Norm" von* x.

Speziell für das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ ist dies die gewöhnliche euklidische Länge.

Satz V.36 *Für die Norm gelten*

N1: $\forall_{x\in U}\ |x| \geq 0, = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

N2: $\forall_{x\in U}\forall_{\alpha\in K}\ |\alpha x| = |\alpha||x|$, *wobei* $|\alpha|$ *der Betrag der reellen oder komplexen Zahl* α *ist,*

N3: $\forall_{x,y\in U}\ |x + y| \leq |x| + |y|$ *(Dreiecksgleichung).*

Beweis: N1 folgt unmittelbar aus S4, für N2 rechnet man

$$|\alpha x| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\overline{\alpha}\cdot\alpha\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\cdot\langle x, x\rangle} = |\alpha|\cdot|x|.$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung N3 benötigen wir

Satz V.37 *In einem unitären Raum gilt die* CAUCHY-SCHWARZ*sche-Ungleichung:*

$$\forall_{x,y\in U}\ |\langle x, y\rangle| \leq |x|\cdot|y|,$$

wobei = genau für linear abhängige x, y *gilt.*

Der Beweis dieser viel verwendeten Ungleichung ist für den reellen Fall im Kapitel O bei Satz O.23 geführt. Die für den komplexen Fall notwendige technische Modifikation sei übergangen.
Damit folgt dann die Dreiecksungleichung wie bei Satz O.24.

Beispielsweise im R^n oder im C^n sind die aus einem Skalarprodukt gewonnenen Normen keineswegs die einzigen Abbildungen nach $\mathbb{R}$, die die Regeln $N1, N2, N3$ erfüllen, etwa

$$|\cdot|: \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \ x \mapsto |x| := \max_{i=1}^n |\xi_i|$$

leistet dies auch.

Definition V.38 *Ist V ein reeller oder komplexer Vektorraum, so heißt eine Abbildung $|\cdot|: \ V \to \mathbb{R}$, die $N1, N2, N3$ erfüllt, eine "Norm" auf V.*
Man nennt dann $(V, |\cdot|)$ einen normierten Raum.

Solche Normen werden uns später in Funktionenräumen ständig begegnen.

Kehren wir wieder zu den unitären Räumen zurück. Wir erklären wieder

Definition V.39 *Es sei U ein unitärer Raum.*

1. *Zwei Vektoren $x, y \in U$ heißen "orthogonal" oder "aufeinander senkrecht", in Zeichen $x \perp y$, wenn $\langle x, y \rangle = 0$.*
2. *Eine Familie $(x_i \mid i \in I)$ heißt ein "Orthonormal-System" (ONS), wenn für alle i, j stets*
$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$
ist, d.h. jeder Vektor die Norm $= 1$ hat und je zwei verschiedene aufeinander senkrecht stehen.
3. *Eine Basis, die gleichzeitig ein Orthonormal-System ist, heiß Orthonormal-Basis (ONB).*
4. *Für einen Unterraum $V \subset U$ bezeichne*
$$V^\perp := \{w \in U \mid \langle w, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\},$$
also alle Vektoren, die auf jedem Vektor von V senkrecht stehen. Man nennt $V^\perp$ das "orthogonale Komplement" von V in U.

Mit orthonormalen Basen läßt sich besonders einfach rechnen:

Satz V.40 *Mit einer Orthonormal-Basis $(x_1, \ldots, x_n)$ von U gilt für jeden Vektor y die Darstellung*

$$y = \langle x_1, y \rangle \, x_1 + \langle x_2, y \rangle \, x_2 + \ldots + \langle x_n, y \rangle \, x_n,$$

aus der man die sog. PARCEVALsche Gleichung

$$|y|^2 = |\langle x_1, y \rangle|^2 + |\langle x_2, y \rangle|^2 + \ldots + |\langle x_n, y \rangle|^2$$

erhält. Hat man nur ein orthonormales System, das nicht notwendig Basis ist, so gilt noch die BESSELsche Ungleichung

$$|y|^2 \geq |\langle x_1, y \rangle|^2 + |\langle x_2, y \rangle|^2 + \ldots + |\langle x_n, y \rangle|^2.$$

Mit dem orthogonalen Komplement $V^\perp$ eines Unterraumes V erhalten wir die Darstellung des Raumes als direkte Summe

$$U = V \oplus V^\perp.$$

Die **Beweise** der ersten beiden Gleichungen gehen wie bei Satz O.36, die letzten beiden Aussagen zeigen wir im Anschluß an Satz V.43.
Solche Orthonormal-Basen kann man über einen einfachen Algorithmus gewinnen:

Satz V.41 (Orthogonalisieren nach E.SCHMIDT) *Es sei $(u_1, u_2, \ldots)$ eine endliche oder unendliche Folge von Vektoren in einem unitären Raum, wobei jeweils endlich viele linear unabhängig seien. Setzt man dann*

$$\begin{aligned} y_1 &:= u_1, \; x_1 := \frac{1}{|y_1|} y_1, \; \text{ und für } n = 1, 2, \ldots \text{ rekursiv} \\ y_{n+1} &:= u_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, u_{n+1} \rangle \, x_i, \\ x_{n+1} &:= \frac{1}{|y_{n+1}|} y_{n+1}, \end{aligned}$$

so gelten

1. *die y_i sind stets $\neq 0$, somit ist alles wohldefiniert,*
2. *die x_i bilden ein Orthonormal-System, für das überdies für alle n*
3. $\operatorname{span}(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n)$ *ist.*

Wir nutzen dies für folgendes

Approximationsproblem V.42 *Es sei $V := \operatorname{span}(u_1, ..., u_n)$ ein Unterraum in einem unitären Raum U, ferner $y \in U, \notin V$. Gesucht ist ein Vektor $y_0 \in V$, dessen Abstand zu y minimal ist, genannt "Proximum an y in V".*

Dafür gilt

Satz V.43 *Das sog. Proximum y_0 an y in V ist eindeutig bestimmt als der Vektor $y_0 \in V$, für den $(y - y_0) \perp v$ für alle $v \in V$ ist.*
Mit einer Orthonormalbasis $(x_1, .., x_n)$ von V hat y_0 die Darstellung

$$y_0 = \sum_{i=0}^{n} \langle x_i, y \rangle \, x_i.$$

Beweis: Für jedes $i = 1, ..., n$ ist für das so dargestellte y_0

$$\begin{aligned} \langle x_j, y - y_0 \rangle &= \left\langle x_j, y - \sum_{i=0}^{n} \langle x_i, y \rangle \, x_i \right\rangle \\ &= \langle x_j, y \rangle - \sum_{i=0}^{n} \langle x_i, y \rangle \, \langle x_j, x_i \rangle \\ &= \langle x_j, y \rangle - \langle x_j, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $y_0 - y$ senkrecht zu ganz V und, wie man aus obiger Formel abliest, dadurch auch y_0 eindeutig bestimmt. Dafür ist dann mit beliebigem $v \in V$

$$\begin{aligned} |y - v|^2 &= \langle y - v, y - v \rangle \\ &= \langle y - y_0 + y_0 - v, y - y_0 + y_0 - v \rangle \\ &= |y - y_0|^2 + \langle y - y_0, y_0 - v \rangle + \langle y_0 - v, y - y_0 \rangle + |y_0 - v|^2 \\ &= |y - y_0|^2 + |y_0 - v|^2 \quad (\text{ da } y_0 - v \perp y - y_0) \\ &> |y - y_0|^2 \quad \text{ wenn } y_0 \neq v. \end{aligned}$$

Setzt man hier $v := 0$, so erhält man

$$|y|^2 = |y - y_0|^2 + |y_0|^2 \geq |y_0|^2$$

und dies ist die BESSELsche Ungleichung.

Ferner hat man über $y = y_0 + (y - y_0)$ eine und zwar die einzige Zerlegung von y in eine Anteil $\in V$ und einen $\in V^{\perp}$, was die letzte Aussage von Satz V.40 beweist. $\square$