Z Zahlen, Zahlen-Folgen und -Reihen

Zahlen

Bisher haben wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ (bzw. die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$) fast ausschließlich als Körper betrachtet. Dieser Standpunkt reicht für die Analysis nicht aus. Wesentlich kommen bei $\mathbb{R}$ hinzu Eigenschaften, die sich auf die Anordnung ("größer", "kleiner") beziehen.
Eine Relation R in einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subset A \times A$. Für $(a, b) \in R$ schreibt man auch aRb oder benutzt suggestive Zeichen, wie $=, <, \leq, \ldots$.

Definition Z.1 *Eine Relation $\leq$ auf einer Menge A heißt eine "Ordnungsrelation" oder kurz "Ordnung", wenn die folgenden Aussagen 1. bis 3. gelten:*

1. *Es ist stets $a \leq a$, d.h. $\leq$ ist reflexiv.*
2. *Für alle $a, b \in A$ folgt aus $a \leq b$ und $b \leq a$, daß $a = b$, d.h. $\leq$ ist antisymmetrisch.*
3. *Für alle $a, b, c \in A$ folgt aus $a \leq b$ und $b \leq c$, daß auch $a \leq c$, d.h. $\leq$ ist transitiv.*

Gilt zudem

4. *Für alle $a, b \in A$ ist $a \leq b$ oder $b \leq a$, so heißt die Ordnung "vollständig" oder "total".*

Wir lesen $a \leq b$ als "a kleiner oder gleich b" bzw. synonym als "b größer oder gleich a". $b \geq a$ ist gleichbedeutend mit $a \leq b$, ferner stehen $b > a$ und $a < b$ beide für ($a \leq b$ und $a \neq b$).
Die aus der Schule wohlbekannten Ordnungsrelationen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind solche totalen Ordnungen, wobei jeweils die nächste die vorhergehende fortsetzt.
Auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ ist diese Ordnung sogar eine "Wohlordnung", d.h.

Satz Z.2 *Jede nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ enthält ein kleinstes Element.*

(Einen Beweis kann man nur über eine axiomatische Begründung der natürlichen Zahlen führen und die schenken wir uns.)
Hieraus ergibt sich als wichtiges Beweisprinzip:

Satz Z.3 (Vollständige Induktion) *Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq n_0$ seien $A(n)$ Aussagen, für die gelten*

1. *$A(n_0)$ ist wahr ("Induktionsanfang")*
2. *$\forall n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ wahr, so auch $A(n+1)$ ("Induktionsschritt").*

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \geq n_0$.

Beweis: Sei $M := \{n \geq n_0, A(n) \text{ ist falsch.}\}$
Ist $M = \emptyset$, so ist unsere Behauptung gezeigt.
Wäre $M \neq \emptyset$, so gäbe es in M ein erstes Element n_1, für das also $A(n_1)$ falsch und dabei $n_1 \geq n_0$. Da $A(n_0)$ wahr ist, wäre sogar dann $n_1 > n_0$ und damit auch noch $n_1 - 1 \geq n_0$. Nun ist ja n_1 das kleinste Element von M, also wäre notwendig dann $A(n_1 - 1)$ wahr, folglich nach dem Induktionsschluß auch $A(n_1)$ wahr, was einen Widerspruch gibt. □

Mittels des Induktionsprinzips erhält man beispielsweise folgende Ergebnisse:

- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

- $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+...+(2n-1) = n^2$.
- Mit $0! := 1, n! := 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n =: \prod_{i=1}^{n} i$, (für $n \geq 1$), man liest dieses Symbol als "n-Fakultät", setze für $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot k}.$$

  Dies sind die sogenannten "Binomialkoeffizienten", gelesen " n über k ". Für sie gelten etwa:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

  sowie die allgemeine "Binomialformel"

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

- $x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-1} + y^{n-1})$.

  (Den Schluß von n auf $n+1$ mache man über

$$x^{n+1} - y^{n+1} = x^n x - x^n y + x^n y - y^n y = (x-y)x^n + (x^n - y^n)y = ...)$$

Diese Anordnung auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ verträgt sich mit den arithmetischen Operationen.

Satz Z.4 *Die Ordnungsrelation $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung, mit der für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten*

1. *Aus $a \leq b$ folgt $a + c \leq b + c$ (Monotonie der Addition).*
2. *Aus $a \leq b$ und $c \geq 0$ folgt $ac \leq bc$ (Monotonie der Multiplikation).*

Man nennt deshalb $\mathbb{R}$ einen "angeordneten" Körper, der überdies "archimedisch" ist, d.h. für den gilt

3. *Zu jeder reellen Zahl $a \geq 0$ existiert eine natürliche Zahl n mit $a \leq n$.*

Letzteres kann man natürlich verschärfen zu

Zu jeder reellen Zahl a existiert eine ganze Zahl n mit $n - 1 < a \leq n$.

Dafür schreibt man auch

$$n = \lceil a \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} \mid a \leq m\}, \quad \text{gelesen: "Minimum"},$$

bzw.

$$\lfloor a \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq a\}, \quad \text{gelesen: "Maximum"}.$$

Aus Satz Z.4 ergeben sich eine Reihe von Rechenregeln, die wir dauernd nutzen werden

Satz Z.5 *Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten*

1. *Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.*
2. *Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.*
3. *Aus $a < b$ und $c \leq d$ folgt $a + c < b + d$.*

4. *Aus $a \leq b$ folgt $-a \geq -b$, speziell gelten aus $a \leq 0$ folgt $-a \geq 0$, aus $a \geq 0$ folgt $-a \leq 0$.*
5. *Aus $a \leq b$ und $c \leq 0$ folgt $ac \geq bc$, speziell aus $a \geq 0$ und $c \leq 0$ stets $ac \leq 0$.*
6. *Es ist $a^2 \geq 0$, speziell $1 = 1^2 > 0$.*
7. *Aus $a > 0$ folgt $\frac{1}{a} > 0$, aus $0 < a < b$ folgt $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.*

Schließlich notieren wir noch zwei Aussagen, die sich aus der Eigenschaft "archimedisch" ergeben:

Satz Z.6

1. *Zu jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine rationale Zahl q mit $0 \leq q - x < \frac{1}{n}$.*
2. *Gilt für ein reelles $a \in \mathbb{R}$, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$, so ist $a = 0$.*

Beweis:

1. Mit $p := \lceil nx \rceil$ ist $0 \leq p - nx < 1$ und mit $q := \frac{p}{n}$ folgt die Behauptung.
2. Ist $a > 0$, so ist $\frac{1}{a}$ definiert und > 0 und damit $n := \lceil \frac{1}{a} \rceil + 1$ eine natürliche Zahl $> \frac{1}{a}$. Für sie ist nach Satz Z.5.7 auch $\frac{1}{n} < a$ im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ lassen keine solche Anordnung mehr zu, da $i^2 = -1$ nicht mit Satz Z.5 vereinbar ist.

Wir bezeichnen für $x \in \mathbb{R}$

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

als "Betrag" von x. Offenbar ist $|x| = \max\{x, -x\}$. Ferner gelten

Satz Z.7

1. $|-x| = |x|$,
2. $|x| \geq 0$, $= 0$, *genau für* $x = 0$,
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$, $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, *sofern* $y \neq 0$,
4. $|\,|x| - |y|\,| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$, *speziell* $|\,x - y\,| \geq |x| - |y|$.

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß es zu jeder nicht negativen reellen Zahl eine Quadratwurzel gibt. Damit ist für komplexe Zahlen $z = u + iv$ $(u, v \in \mathbb{R})$ der "Betrag"

$$|z| := \sqrt{u^2 + v^2}$$

wohldefiniert.

Zusatz Z.8 *Auch für den Betrag in $\mathbb{C}$ gelten die Regeln von Satz Z.7.*

Wir stellen noch eine wichtige Ungleichung bereit:

Satz Z.9 (BERNOULLIsche Ungleichung)
Für $x \in \mathbb{R}, > -1, \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ist

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Beweis: Für $n = 2$ hat man $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$, wenn $x \neq 0$.
Für den Schluß von n auf $n+1$ rechnet man

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &> 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

$\square$

Die oben benutzte Existenz der Quadratwurzel folgt aus einer viel umfassenderen Eigenschaft der reellen Zahlen, der sogenannten "Vollständigkeit", die wir nun angehen. Dazu brauchen wir

Definition Z.10 *Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ oder $A \subset \mathbb{C}$ heißt "beschränkt", wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $|a| \leq s$ für alle $a \in A$.*
Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt "nach oben beschränkt", wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodaß $a \leq s$ für alle $a \in A$. Die Zahl s heißt dann "obere Schranke" für A.
Analog erklärt man untere Schranken.
Beachten Sie, daß solche Schranken <u>nicht</u> in der Menge A selbst zu liegen brauchen.
Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt "Supremum" oder "kleinste obere Schranke" von A, geschrieben $\sup A$, wenn

1. *c obere Schranke von A ist und*
2. *$c \leq s$ für jede obere Schranke s von A.*

Analog erklärt man das "Infimum" oder die "größte untere Schranke", notiert als $\inf A$.
Beide Größen $\inf A$ und $\sup A$ gehören im allgemeinen nicht zu A.
Liegt das Supremum von A sogar in A, dann heißt es "Maximum", geschrieben $\max A$, entsprechend wird das Infimum zum "Minimum", geschrieben $\min A$.

Satz Z.11 (Vollständigkeitsaxiom) *Für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gilt die folgende Eigenschaft der "Vollständigkeit":*
Zu jeder nicht leeren, nach oben beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$ gibt es ein Supremum, zu jeder nicht leeren, nach unten beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$ ein Infimum.

Zum praktischen Handhaben dieser Begriffe hilft der folgende

Satz Z.12 *In $\mathbb{R}$ sind äquivalent:*

1. *$c = \sup A$ und*
2. *(a) Ist $x > c$, so ist $x \notin A$,*
   (b) aber zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $a \in A$ mit $c - \epsilon < a \leq c$;

bzw. analog

3. *$d = \inf A$ und*
4. *(a) Ist $y < d$, so ist $y \notin A$,*
   (b) aber zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $a \in A$ mit $d \leq a < d + \epsilon$.

Beweis: Sei $c = \sup A$: Dann ist c obere Schranke, somit gilt (a). Wäre (b) falsch, so gäbe es ein $\epsilon_0 > 0$, sodaß in A kein Element $> c - \epsilon_0$ läge. Dann wären alle $a \in A$ schon $\leq c - \epsilon_0$ und damit auch $c - \epsilon_0$ eine obere Schranke, im Widerspruch zur Definition von c als Supremum.
Es gelte 2.: (a) liefert, daß alle $a \in A$ schon $\leq c$ sind, sodaß c eine obere Schranke ist. Wäre $c' < c$ noch eine kleinere obere Schranke, so folgte aus (b) mit $\epsilon := \frac{c-c'}{2}$ ein Widerspruch. □

Wir verabreden noch folgende

Bezeichnungen Z.13 *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann sei*

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}. \end{aligned}$$

Man nennt $[a,b]$ ein "abgeschlossenes", (a,b) ein "offenes Intervall" und die anderen beiden "einseitig offene Intervalle". Man schreibt auch abkürzend

$$\mathbb{R}_{\geq a} := [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

und analoge Bildungen; hier spricht man von "uneigentlichen" Intervallen.

In der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ nennen wir für $x_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ die Menge

$$K(x_0, r) := \{x \in \mathbb{C}\,;\, |x - x_0| < r\}$$

die "offene Kreisscheibe" um x_0 mit Radius r, die Menge

$$\overline{K}(x_0, r) := \{x \in \mathbb{C}\,;\, |x - x_0| \leq r\}$$

die "abgeschlossene Kreisscheibe" um x_0 mit Radius r.
Ein offenes Intervall $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ in $\mathbb{R}$ bzw. eine offene Kreisscheibe $K(x_0, \epsilon)$ in $\mathbb{C}$ heißt eine "ϵ-Umgebung" von x_0.
Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ oder $A \subset \mathbb{C}$ heißt "offen", wenn sie mit jedem Punkt x_0 auch eine ϵ-Umgebung von x_0 enthält. Sie heißt "abgeschlossen", wenn sie Komplement einer offenen ist. Eine beschränkte und abgeschlossenen Menge heißt auch "kompakt".

Etwa mittels der Dreiecksungleichung bekommt man

Satz Z.14 *Ein offenes Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ sind selbst offene Mengen, ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ sind ist auch abgeschlossen im Sinne der zuletzt gegebenen Definition, ein Intervall $[a,b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist kompakt.*

Zahlenfolgen

Definition Z.15 *Eine "Folge von Elementen einer Menge M" ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach M: $n \mapsto a_n$. Schreibweisen dafür sind*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n)_n,\ \text{ oder einfach } (a_n).$$

Liegt die Menge M in den reellen oder komplexen Zahlen, so spricht man von einer reellen oder komplexen "Zahlenfolge".

Wir behandeln zunächst nur Zahlenfolgen, die im allgemeinen komplex sein dürfen.

Definition Z.16 *Eine Zahl a heißt "Grenzwert" der Folge a_n, wenn gilt:*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_0(\epsilon)}\ |a_n - a| < \epsilon.$$

Man schreibt dafür

$$a_n \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} a \quad \textit{oder} \quad a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \textit{oder} \quad a = \lim_n a_n \quad \textit{oder sehr schlampig} \quad a = \lim a_n.$$

Eine Folge heißt "konvergent", wenn sie einen Grenzwert besitzt, eine Folge mit Grenzwert 0 heißt "Nullfolge".

Etwa $\left(\frac{1}{n}\right)$, $\left(\frac{1}{2^n}\right)$, (q^n) für $|q| < 1$ sind Beispiele für Nullfolgen.
Ein wichtiger Konvergenzsatz lautet

Satz Z.17 (Vergleichskriterium) *Ist (a_n) eine Zahlenfolge und a eine Zahl, sodaß mit einer Nullfolge (ϵ_n) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$|\,a_n - a\,| < \epsilon_n,$$

so ist $a = \lim a_n$.

Beweis: Zu $\epsilon > 0$ existiert ein n_0, sodaß für alle $n \geq n_0$ gilt, daß $|\,\epsilon_n - 0\,| = |\,\epsilon_n\,| < \epsilon$. Dann ist aber auch $|\,a_n - a\,| \leq |\,\epsilon_n\,| < \epsilon$, was die Konvergenz zeigt. □

Satz Z.18 *Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.*

Beweis: Sind nämlich a und a' Grenzwerte von (a_n), so ist für beliebiges $\epsilon > 0$ und jedes $n \geq n_0(\epsilon)$

$$|\,a - a'\,| = |\,a - a_n + a_n - a'\,| \leq |\,a - a_n\,| + |\,a_n - a'\,| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Dann muß aber nach Satz Z.6 schon $a - a' = 0$ sein, d.h. $a = a'$. □

Definition Z.19 *Eine Zahlenfolge (a_n) in $\mathbb{R}$ heißt "monoton wachsend", wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $a_n \leq a_{n+1}$ ist.*
Ist sogar stets $a_n < a_{n+1}$, so redet man von "streng monoton wachsend".
Analog erklärt man "monoton fallend" bzw. "streng monoton fallend".

Satz Z.20 *Die reelle Folge (a_n) sei beschränkt und monoton wachsend. Dann ist sie konvergent und es gilt*

$$a_n \to \sup\{a_1, a_2, ...\}.$$

Analog konvergiert eine monoton fallende beschränkte Folge gegen das $\inf\{a_1, a_2, ...\}$.

Beweis: Die Folge sei monoton wachsend. Das Supremum $a := \sup\{a_1, a_2, ...\}$ existiert, da die Folge beschränkt ist. Nach Satz Z.12 ist dann

- für jedes $n \in \mathbb{N}$ stets $a_n \leq a$, und ferner
- gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein n_0, sodaß $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a$.

Wegen der Monotonie ist dann für jedes $n \geq n_0$ auch $a - \epsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$, somit für $n \geq n_0$ auch $|\,a_n - a\,| < \epsilon$, was die Konvergenz zeigt. □

Über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{C}$ können wir die Konvergenz, d.h. die Existenz eines Grenzwertes auch aus der sog "Cauchy-Bedingung" schließen:

Definition Z.21
*Eine Folge (a_n) heißt "*CAUCHY*-Folge" oder "*CAUCHY*-konvergent", wenn gilt*

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n,m\geq n_0} |\, a_n - a_m \,| < \epsilon.$$

Satz Z.22 *Jede konvergente Folge ist* CAUCHY*-Folge.*

Beweis: $a_n \to a$ bedeutet,

$$\forall_{\epsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}} \forall_{n\geq n_0} |\, a_n - a \,| < \epsilon.$$

Wähle ϵ, dazu n_0' so, daß $|\, a_n - a\,| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq n_0'$. Dann ist für $n, m \geq n_0'$:

$$|\, a_n - a_m \,| \leq |\, a_n - a \,| + |\, a - a_m \,| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Satz Z.23 *Jede* CAUCHY*-Folge ist beschränkt.*

Beweis: Bestimme n_0 zu $\epsilon := 1$. Dann ist für $n \geq n_0$:

$$|\, a_n - a_{n_0} \,| < 1, \quad \text{d.h. } |\, a_n \,| < |\, a_{n_0} \,| + 1.$$

□

Damit folgt die zentrale Aussage

Satz Z.24 *In $\mathbb{R}$ ist jede* CAUCHY*-Folge konvergent.*

Beweis: Es sei (a_n) eine CAUCHY-Folge. Dann ist sie insbesondere beschränkt, somit gibt es eine Konstante C, sodaß für alle n

$$-C \leq a_n \leq +C.$$

Nun bilden wir die Folge (u_n) mit

$$u_n := \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\} = \inf\{a_k \,|\, k \geq n\}.$$

Trivialerweise ist wieder

$$-C \leq u_n \leq +C,$$

ferner die Folge (u_n) monoton wachsend. Nach Satz Z.20 ist damit diese Folge (u_n) konvergent und zwar

$$u_n \to u := \sup\{u_1, u_2, ...\}.$$

Wir zeigen: u ist auch der Grenzwert der ursprünglichen Folge, d.h. $(a_n) \to u$. Wähle $\epsilon > 0$. Wegen $u_n \to u$ gibt es ein n_0, mit dem $|\, u_n - u \,| < \frac{\epsilon}{3}$ für $n \geq n_0$. Da $u_n := \inf\{a_k \,|\, k \geq n\}$ gibt es zu jedem n ein $k(n) \geq n$, sodaß $|\, u_n - a_{k(n)} \,| < \frac{\epsilon}{3}$. Schließlich ist ja die Folge (a_n) eine CAUCHY-Folge, somit gibt es ein n_1, mit dem $|\, a_n - a_m \,| < \frac{\epsilon}{3}$ für $n, m \geq n_1$. Für $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ ist dann

$$|\, a_n - u \,| \leq |\, a_n - a_{k(n)} \,| + |\, a_{k(n)} - u_n \,| + |\, u_n - u \,| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

□

Um die Aussage von Satz Z.24 auch für komplexe Folgen zu bekommen, nutzen wir

Satz Z.25 *Sind $a_n \to a$, und $b_n \to b$ zwei komplexe Zahlenfolgen, ferner $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, so gelten*

1. $\alpha a_n + \beta b_n \to \alpha a + \beta b$.
2. $a_n b_n \to ab$.
3. *Falls* $b \neq 0$ *und* $c_n := \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & \text{für } b_n \neq 0 \\ 0 & \text{für } b_n = 0 \end{cases}$, *gilt* $c_n \to \frac{a}{b}$.
4. $|\, a_n \,| \to |a|$

Beweis:

1. Es ist
$$|\,(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha a + \beta b)\,| \leq |\alpha|\,|\, a_n - a \,| + |\beta|\,|\, b_n - b \,|.$$
Für $n \geq \max\{n_0(a, \frac{\epsilon}{2|\alpha|}), n_0(b, \frac{\epsilon}{2|\beta|})\}$ ist dann $|\, a_n - a \,| < \frac{\epsilon}{2|\alpha|}$, $|\, b_n - b \,| < \frac{\epsilon}{2|\beta|}$, somit die ganze obige rechte Seite $< \epsilon$.

2. $|\, a_n b_n - ab \,| \leq |\, a_n b_n - a_n b \,| + |\, a_n b - ab \,| = |a_n|\,|\, b_n - b \,| + |b|\,|\, a_n - a \,|$. Die Folge (a_n) ist konvergent, somit CAUCHY-konvergent, also beschränkt. Damit kann man $|a_n| \leq \alpha$ mit geeignetem α abschätzen und wie bei 1. weitermachen.

3. Sofern $b \neq 0$ ist für $n \geq n_0(\frac{|b|}{2})$ auch $|b_n| \geq \frac{|b|}{2}$. Da es für die Konvergenz nicht auf die ersten Glieder der Folge ankommt, können wir also gleich annehmen, daß für alle n schon $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ ist. Dann ist
$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| = \frac{1}{|b_n||b|}\,|\, b a_n - a b_n \,|\,.$$
Es ist $\frac{1}{|b_n||b|} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}|b||b|} = \frac{2}{|b|^2}$, ferner gilt nach Teil 1. $(b a_n - a b_n) \to 0$, sodaß die obige Differenz beliebig klein wird.

4. $||a_n| - |a|| \leq |\, a_n - a \,|$. □

Satz Z.26 *Ist* $(a_n) = (\alpha_n + i\beta_n)$ *eine komplexe* CAUCHY*-Folge, so sind auch die Folgen* (α_n) *und* (β_n) *aus den Realteilen bzw. den Imaginärteilen jeweils* CAUCHY*-Folgen.*

Beweis:

$$\begin{aligned} |\, a_n - a_m \,|^2 &= |\,(\alpha_n + i\beta_n) - (\alpha_m + i\beta_m)\,|^2 \\ &= |\,(\alpha_n - \alpha_m) + i(\beta_n - \beta_m)\,|^2 \\ &= |\,(\alpha_n - \alpha_m)\,|^2 + |\,(\beta_n - \beta_m)\,|^2 \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |\, \alpha_n - \alpha_m \,| &\leq |\, a_n - a_m \,| \\ |\, \beta_n - \beta_m \,| &\leq |\, a_n - a_m \,|, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Dies liefert uns die Erweiterung von Satz Z.24 ins Komplexe:

Satz Z.27 *In* $\mathbb{C}$ *ist jede* CAUCHY*-Folge konvergent.*

Beweis: Nach Satz Z.26 bilden auch die Folgen aus den Realteilen bzw. den Imaginärteilen jeweils eine reelle CAUCHY-Folge, die nach Satz Z.24 konvergent ist. Mit Satz Z.25.1 konvergiert dann auch die ganze Folge. □

Warnung *Über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ haben* CAUCHY-*Folgen einen Grenzwert. Wir werden aber später allgemeinere Bereiche kennenlernen, wo die analoge Aussage* ***falsch*** *ist.*

Ein wichtiger Begriff ist der der Teilfolge.

Definition Z.28 *Es sei (a_n) eine Zahlenfolge, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine "Teilfolge" der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Folgende Aussagen über Teilfolgen sind leicht zu beweisen:

Satz Z.29

1. *Jede Teilfolge einer* CAUCHY-*Folge ist selbst* CAUCHY-*Folge.*
2. *Jede Teilfolge einer gegen den Grenzwert a konvergierenden Folge ist selbst konvergent mit Grenzwert a.*
3. *Konvergiert eine Folge (a_n) und hat eine Teilfolge den Grenzwert a, so konvergiert (a_n) selbst gegen a.*

Aus den Überlegungen zu CAUCHY-Folgen ergibt sich das folgende Prinzip der Intervallschachtelung:

Satz Z.30 (Intervallschachtelung) *Eine Folge $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Intervallen (in $\mathbb{R}$) bildet eine "Intervallschachtelung", wenn*

1. *für alle $n \in \mathbb{N}$ stets $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ und*
2. *$b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$.*

Dafür gilt

Satz Z.31 *Zu einer Intervallschachtelung abgeschlossener Intervalle $[a_n, b_n]$ gibt es genau eine Zahl c, die in allen liegt, d.h. für die*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

Es ist $c = \lim a_n = \lim b_n$.

Beweis: Über die Bedingung $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ ergibt sich

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le a_{n+1} \le ... \le b_{n+1} \le b_n \le ... \le b_2 \le b_1.$$

Damit ist die Folge (a_n) monoton wachsend und nach oben durch jedes b_k beschränkt, entsprechend die Folge (b_n) monoton fallend und nach unten durch jedes a_k beschränkt. Nach Satz Z.20 gilt dann

$$\begin{aligned} a_n &\to a := \sup\{a_1, a_2, ...\} \\ b_n &\to b := \inf\{b_1, b_2, ...\}. \end{aligned}$$

Da jedes b_k obere Schranke für $\{a_n \mid \in \mathbb{N}\}$ ist ist somit

$$a \le b_k \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}$$

und analog

$$b \ge a_k \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Somit ist stets

$$a - b \le b_k - a_k.$$

Andrerseits ist wegen der Monotonie auch für alle $k \in \mathbb{N}$

$$a \geq a_k, \quad b \leq b_k$$

und somit stets

$$b - a \leq b_k - a_k.$$

Also haben wir

$$|\, b - a \,| \leq b_k - a_k \to 0 \quad (k \to \infty),$$

sodaß $b = a =: c$. Schließlich ist damit dann für beliebige n

$$a_n \leq a = c = b \leq b_n, \quad \text{d.h. } c \in [a_n, b_n],$$

sodaß c in allen Intervallen liegt. Wegen $b_n - a_n \to 0$ kann es nur eine solche Zahl geben. □

Aus dem Prinzip der Intervallschachtelung erhalten wir den

Satz Z.32 (BOLZANO-WEIERSTRASS) *Jede Folge c_n in einem "kompakten", d.h. beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Deren Grenzwert liegt wieder in $[a, b]$.*

Beweis: Wir arbeiten mit Intervallschachtelung. Setze $[a_0, b_0] := [a, b]$ und $n_0 := 0$. Dann ist sicher $c_{n_0} \in [a_0, b_0]$ und $[a_0, b_0]$ enthält unendlich viele (nämlich alle) Glieder unsere Folge (c_n). Darauf arbeiten wir rekursiv weiter:
Das zuletzt erreichte Intervall $[a_k, b_k]$ teilt man in der Mitte in $[a_k, d_k]$ und $[d_k, b_k]$. Enthält $[a_k, d_k]$ unendlich viele Folgenglieder, so wird es das nächste Intervall, d.h. dann setzen wir

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := [a_k, d_k],$$

andernfalls liegen unendlich viele Folgenglieder in $[d_k, b_k]$ und wir setzen

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := [d_k, b_k].$$

Ferner wählen wir $n_{k+1} > n_k$ so, daß $c_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Die Intervalle sind geschachtelt, ihre Länge halbiert sich jeweils, somit liegt eine Intervallschachtelung vor und (c_{n_k}) liefert die gesuchte konvergente Teilfolge. □

Wir nutzen dies für

Satz Z.33 *Zu jeder natürlichen Zahl $k \geq 1$ und jeder positiven Zahl $a \in \mathbb{R}, > 0$ gibt es genau eine positive Zahl $w \in \mathbb{R}$ mit $w^k = a$. Man nennt diese Zahl w die "positive k-te Wurzel aus a", geschrieben als $w := \sqrt[k]{a} := a^{\frac{1}{k}}$.*

Beweis: Die Menge

$$A := \{x > 0 \,|\, x^k \leq a\}$$

ist nach der BERNOULLI-Ungleichung sicher durch $1 + a$ nach oben beschränkt. Ferner ist $u := \min\{1, a\} \in A$ und damit $A \neq \emptyset$. Also existiert

$$w := \sup A.$$

Dies ist die gesuchte Wurzel. Dazu zeigen wir, daß $w^k = a$. Da w ein Supremum ist, folgt über die Charakterisierung in Satz Z.12, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ jedenfalls

$$w + \frac{1}{n} \notin A, \quad \text{d.h. } (w + \frac{1}{n})^k > a,$$

ferner für jedes n mit $w - \frac{1}{n} > 0$ schon

$$w - \frac{1}{n} \in A, \quad \text{d.h. } (w - \frac{1}{n})^k \leq a.$$

Offenbar ist

$$(w - \frac{1}{n})^k < (w + \frac{1}{n})^k.$$

Wir betrachten die Folge der Intervalle

$$J_n := [(w - \frac{1}{n})^k, \ (w + \frac{1}{n})^k].$$

Trivialerweise sind die geschachtelt, d.h. $J_{n+1} \subset J_n$ und wegen

$$\begin{aligned}
&(w + \frac{1}{n})^k - (w - \frac{1}{n})^k = \\
&\qquad \left[(w + \frac{1}{n}) - (w - \frac{1}{n})\right] \left[(w + \frac{1}{n})^{k-1} + (w + \frac{1}{n})^{k-2}(w - \frac{1}{n}) + \ldots +\right] \\
&\qquad \leq \frac{2}{n} k (w+1)^{k-1} \to 0
\end{aligned}$$

gehen die Intervalllängen gegen Null, sodaß eine Intervallschachtelung vorliegt. Offenbar liegt w^k in jedem der Intervalle, wegen $(w + \frac{1}{n})^k > a$, und $(w - \frac{1}{n})^k \leq a$ aber auch a. Somit ist notwendig $w^k = a$, also w die gesuchte Wurzel.
Daß es nur eine solche *positive* Wurzel geben kann, folgt aus der Monotonie der Multiplikation. □

Zur Berechnung dieser Wurzeln verwendet man das NEWTON-Verfahren, das wir im nächsten Kapitel kennenlernen werden.

Zahlenreihen

Definition Z.34 *Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge in $\mathbb{C}$.*

1. *$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ oder auch $\sum_{j=k}^{\infty} a_j$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ heißt "unendliche Reihe mit den Summanden a_j".*

   Man notiert dafür oft nur $\sum_j a_j$ oder gar nur $\sum a_j$.

2. *$s_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ heißt die "n-te Partialsumme".*

3. *$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ heißt "konvergent", wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert.*

   Ist $s = \lim s_n$, so heißt s auch die "Summe" der Reihe und man schreibt $s = \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

4. *Ist die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ nicht konvergent, so heißt sie "divergent".*

Warnung!! *Das Zeichen $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ ist zunächst nur eine Aufforderung zu prüfen, ob die Folge der zugehörigen Partialsummen konvergiert, und erst wenn dies zutrifft, besitzt es einen Wert als komplexe oder reelle Zahl.*

Ein erstes Konvergenzkriterium enthält

Satz Z.35 *Eine Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit nichtnegativen reellen Gliedern a_j konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.*

Beweis: Es ist $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, somit die Folge der Partialsummen monoton wachsend. Damit folgt die Behauptung aus Satz Z.20. □

Beispiel Z.36

1. *Die "harmonische Reihe" $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$ ist divergent.*
2. *Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ ist konvergent.*
3. *Die "geometrische Reihe" $\sum_{j=0}^{\infty} q^j$ ist divergent für $|q| \geq 1$ und konvergent für $|q| < 1$. Im letzten Fall ist ihre Summe*

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

Beweis: Bei 1. und 2. liegen Reihen mit positiven Gliedern vor, sodaß wir nur die Beschränktheit der Partialsummern zu prüfen haben.
Zu 1.:

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ... + \frac{1}{2^n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + ... + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} \\ &= 1 + n\frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Damit sind die Partialsummen nicht beschränkt.
Zu 2.:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{(n-1)n} \end{aligned}$$

Nun ist $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, somit

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \\ &\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2. \end{aligned}$$

Folglich sind hier die Partialsummen beschränkt.
Zu 3.: $s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ für $q \neq 1$. Für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge, somit

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}.$$

Damit ist hier die geometrische Reihe konvergent und zwar mit der angegebenen Summe.
Ist $|q| \geq 1$, so ist stets auch $|q^j| \geq 1$ und damit (q^j) keine Nullfolge und die Divergenz der Reihe ergibt sich aus dem unten stehenden Satz Z.38. □

Wir hatten gesagt, daß eine Reihe konvergiert, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert. Letzteres ist bei Zahlenfolgen in $\mathbb{C}$ ja gleichbedeutend damit, daß die Folge der Partialsummen eine CAUCHY-Folge ist. Wegen

$$|\, s_m - s_n \,| = |\, \sum_1^m a_j - \sum_1^n a_j \,| = |\, \sum_{n+1}^m a_j \,|,$$

wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit stillschweigend $m > n$ angenommen haben, bedeutet dies

Satz Z.37 *Die Reihe $\sum a_j$ ist genau dann konvergent, wenn gilt:*

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0(\epsilon)}\forall_{m>n\geq n_0(\epsilon)} \mid \sum_{n+1}^{m} a_j \mid < \epsilon,$$

wenn also für jedes noch so kleine positive ϵ eine Stelle n_0 existiert, sodaß für alle dahinter liegenden Reihenabschnitte $\sum_{j=n+1}^{m} a_j$ der Betrag kleiner ϵ ist.

Setzen wir hier insbesondere $m = n+1$, so ist dann $\mid \sum_{n+1}^{n+1} a_j \mid = \mid a_{n+1} \mid$.
Somit erhalten wir

Satz Z.38 *Ist $\sum a_j$ konvergent, so ist (a_j) eine Nullfolge.*

Warnung! *Diese Aussage darf man nicht umdrehen, die Umkehrung ist falsch!*

Definition Z.39 *Die Reihe $\sum a_j$ heißt "absolut konvergent", wenn die Reihe aus den absoluten Beträgen, also $\sum \mid a_j \mid$ konvergiert.*

Hierfür gilt

Satz Z.40 *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis: Für $m > n$ ist $\mid \sum_{n+1}^{m} a_j \mid \leq \sum_{n+1}^{m} \mid a_j \mid$. Dann wende man Satz Z.37 an. $\square$

Die Umkehrung von dieser Aussage ist falsch. Denn die Reihe

$$\sum \frac{(-1)^j}{j}$$

ist nach Beispiel Z.36 sicher nicht absolut konvergent. Andrerseits ist sie ein Beispiel für das folgende

Leibniz-Kriterium Z.41 *Eine alternierende Reihe $\sum a_j$ in $\mathbb{R}$, die also reelle Glieder mit abwechselnden Vorzeichen hat, ist konvergent, sofern $(|a_j|)$ eine monoton fallende Nullfolge ist.*

Beweis: Für $j \in \mathbb{N}$ sei etwa stets $a_{2j} \geq 0, a_{2j+1} \leq 0$. Dann ist

$$\begin{array}{lll} s_{2n+2} & = s_{2n+1} + a_{2n+2} & \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} & = s_{2n} + (a_{2n+1} + a_{2n+2}) & \leq s_{2n} \\ s_{2n+1} & = s_{2n-1} + (a_{2n} + a_{2n+1}) & \geq s_{2n-1} \end{array}$$

somit

$$s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n},$$

und weil die $(|a_j|)$ noch eine Nullfolge bilden, liegt also bei den Intevallen $[s_{2n-1}, s_{2n}]$ eine Intervallschachtelung vor. Die nach Satz Z.31 hierdurch bestimmte Zahl s ist dann $s = \lim s_{2n-1} = \lim s_{2n}$, sodaß sogar $s = \lim s_n$ gilt, was die Konvergenz unserer Reihe zeigt. $\square$

Definition Z.42 *Eine Folgen (b_n) von positiven reellen Zahlen heißt eine "Majorante" zur Folge (a_n), wenn für alle n stets $\mid a_n \mid \leq b_n$ ist. Man sagt dann auch, daß $\sum b_j$ Majorante zu $\sum \mid a_j \mid$ ist.*

Damit gilt das

Majoranten-Kriterium Z.43 *Ist (b_j) Majorante zu (a_j) und $\sum b_j$ konvergent, so ist $\sum a_j$ absolut konvergent.*

Beweis: Für $m > n$ ist $0 \leq \sum_{n+1}^{m} | a_j | \leq \sum_{n+1}^{m} b_j$.
Die Konvergenz der majorisierenden Reihe liefert mit Satz Z.37 die Behauptung, (noch kürzer gehts mit Satz Z.35). □

Quotienten-Kriterium Z.44 *Mit einem $q \in (0,1)$ und einem $k \in \mathbb{N}$ gelte für alle $n \geq k$ stets $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$. Dann ist die Reihe $\sum a_j$ absolut konvergent.*

Beweis: Per Induktion schließt man, daß für $n \geq k$ und beliebige $m \in \mathbb{N}$ stets $| a_{n+m} | \leq | a_n | q^m$ gilt. Damit hat $\sum_j a_{n+j}$ die konvergente Majorante $| a_n | \sum_j q^j$. □

Eine weitere Anwendung des Majoranten-Kriterium Z.43 ist das sog.

Wurzel-Kriterium Z.45 *Mit einem $q \in (0,1)$ und einem $k \in \mathbb{N}$ gelte für alle $n \geq k$ die Abschätzung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$. Dann ist $\sum a_j$ absolut konvergent.*

Beweis: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ impliziert $|a_n| \leq q^n$, sodaß (im Wesentlichen) die geometrische Reihe eine konvergente Majorante liefert. □

Beispiel Z.46 *1. Die sog. "Exponentialreihe"*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

ist für jede komplexe Zahl $x \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und stellt damit eine auf ganz $\mathbb{C}$ erklärte Funktion dar, die sog. "Exponentialfunktion".

Denn für $m \geq 2|x|$ und jedes $n \geq m$ haben wir

$$\begin{aligned} \frac{|x^n|}{n!} &= \frac{|x^m|}{m!} \cdot \frac{|x|}{m+1} \cdot \frac{|x|}{m+2} \cdots \frac{|x|}{n} \\ &\leq \frac{|x^m|}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} = \frac{|2x|^m}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^n . \end{aligned}$$

Damit taugt die geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ als Majorante. Als Folgerung ergibt sich
2.

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \leq e := \exp(1) = 2,7182818......$$

und damit ist auch
3.

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + ... + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\ &\leq 1 + \frac{n}{1}\frac{1}{n} + \frac{n^2}{2!}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{n^n}{n!}\frac{1}{n^n} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \leq e. \end{aligned}$$

Dies nutzen wir weiter für

Beispiel Z.47 *Es gilt $\sqrt[n]{n} \to 1$.*

Denn zunächst ist mit $a_n := \sqrt[n]{n}$ stets $a_n > 1$ für $n > 1$. Ferner ist

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n(n+1)} = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} = n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{n}{e},$$

somit > 1 für $n > e$. Somit ist die Folge der a_n schließlich monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent:

$$a_n = \sqrt[n]{n} \to a \ (\geq 1).$$

Damit haben wir speziell auch

$$a_{2n} \to a$$

und so nach Satz Z.25 auch

$$a_{2n}^2 \to a^2.$$

Es ist

$$a_{2n}^2 = \left(\sqrt[2n]{2n}\right)^2 = \sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{2} \cdot a_n.$$

Nun gilt (zeigen Sie das mal selbst!) $\sqrt[n]{2} \to 1$, ferner $a_n \to a$, also nach Satz Z.25 auch

$$a_{2n}^2 \to 1 \cdot a = a.$$

Folglich ist $a = a^2$ und wegen $a \geq 1$ damit $a = 1$, was wir ja zeigen wollten.

Beispiel Z.48 *Für $|x| < 1$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Reihe $\sum_n n^k x^n$ absolut.*

Beweis: Wegen $\sqrt[n]{n} \to 1$ gilt auch $\sqrt[n]{n^k} \to 1$ und somit $\sqrt[n]{|n^k x^n|} \to |x| < 1$. Mit $q := \frac{1+|x|}{2} < 1$ ist dann das Wurzelkriterium anwendbar. □

Die Exponentialreihe wie die zuletzt betrachtete Reihe sind sogenannte Potenzreihen:

Definition Z.49 *Eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit $x_0, a_n \in \mathbb{C}$ heißt Potenzreihe mit Koeffizientenfolge (a_n) um x_0. Konvergiert sie für ein gegebenes $x \in \mathbb{C}$, so sagt man auch "die Potenzreihe konvergiert an der Stelle x."*

Solche Potenzreihen werden uns noch viel beschäftigen. Hier machen wir nur folgende erste Aussagen darüber. Wir verstehen dabei unter der "abgeschlossenen Kreisscheibe um den Punkt $x_0 \in \mathbb{C}$" die Menge

$$\overline{K}(x_0, r) := \{x \in \mathbb{C}\,;\, |x - x_0| \leq r\}.$$

Satz Z.50 *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten und q eine reelle Zahl mit $0 < q < 1$. Dann gelten:*

1. *Konvergiert die Reihe an einer Stelle $x_1 \neq x_0$ in $\mathbb{C}$, so konvergiert sie absolut und "gleichmäßig" auf $\overline{K}(x_0, q|x_1 - x_0|)$, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0(\epsilon)$, so daß für alle $m > n > n_0(\epsilon)$ und alle $x \in \overline{K}(x_0, q|x_1 - x_0|)$*

   $$|\sum_{j=n+1}^{m} a_j(x-x_0)^j| < \epsilon$$

   gilt.
   Ferner existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, mit der

   $$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right| \leq C \qquad \text{für alle } x \in \overline{K}(x_0, q|x_1 - x_0|).$$

2. *Zu der Potenzreihe gibt es eine Zahl $r > 0$, den sogenannten "Konvergenzradius", mit dem für den "Konvergenzkreis" $K(x_0, r)$ gilt:*

   Für jedes $x \in K(x_0, r)$ ist die Potenzreihe absolut konvergent, für jedes x außerhalb von $\overline{K}(x_0, r)$, d.h. mit $|x - x_0| > r$ ist sie nicht konvergent. Hier ist der Fall $r = \infty$ zugelassen (dies bedeutet dann, daß die Reihe in der ganzen komplexen Ebene konvergiert; sie bestimmt ein "ganze" Funktion).

   Diesen Konvergenzradius r kann man bestimmen bzw. abschätzen aus der Formel
$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} := \inf_n \{\sup_{k\geq n} \sqrt[k]{|a_k|}\}.$$
   Ergibt dieser "Limes superior" den Wert 0, was $r = \infty$ bedeutet, so konvergiert die Reihe überall, ergibt sich der Wert ∞, was $r = 0$ bedeutet, so ist die Reihe nirgends (außer trivialerweise bei $x = x_0$) konvergent.

3. *Auch die Reihe*
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1}$$
   konvergiert absolut und gleichmäßig in der Kreisscheibe $\overline{K}(x_0, q|x_1 - x_0|)$.

Beweis: Zu 1.: Da die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ konvergiert, sind jedenfalls ihre Reihenglieder beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante M, mit der für alle n gilt, daß $|a_n(x_1 - x_0)^n| < M$. Damit ist dann für die betrachteten x:
$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n| \cdot |x_1 - x_0|^n \left(\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|}\right)^n \leq Mq^n.$$
Damit können wir die geometrische Reihe als Majorante verwenden. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz folgt daraus, daß in der Majorante die konkrete Stelle x gar nicht mehr auftritt.
Der Wert dieser majorisierenden geometrischen Reihe taugt als Abschätzungskonstante C.
Zu 2.: Ist die Reihe nicht in der ganzen Ebene konvergent, so gibt es also eine Stelle x_1, an der sie nicht konvergiert. Dann kann sie nach 1. sicher für kein x konvergieren mit $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.
Sei nun r das Supremum aller Abstände $|x - x_0|$, sodaß die Reihe an der Stelle x konvergiert. Dieses Supremum ist nun endlich und ist der genannte Konvergenzradius. Denn für $|x - x_0| > r$ kann die Reihe nach der Definition des Supremums nicht mehr konvergieren, für $|x - x_0| < r$ gibt es wieder nach der Definition des Supremums ein x' mit $|x - x_0| < |x' - x_0| < r$, für das die Reihe konvergiert. Nach 1. konvergiert sie dann auch für x selbst und zwar wieder absolut.

Zur Darstellung des Konvergenzradius beschränken wir uns auf den Spezialfall, daß $\rho := \lim_n \sqrt[n]{| a_n |}$ existiert. Es ist dann auch $\limsup \sqrt[n]{| a_n |} = \rho$.
Wir wenden das Wurzel-Kriterium Z.45 auf die Reihe mit den Gliedern $a_n(x - x_0)^n$ an, wobei wir die Fälle $r = 0$ und $r = \infty$ zunächst noch ausschließen.
Ist $|x - x_0| < r := \frac{1}{\rho}$, so ist mit einem q, $0 < q < 1$ auch $|x - x_0| < q^2 r$ und für große n auch $\sqrt[n]{| a_n |} < \frac{1}{q}\rho$, somit
$$\sqrt[n]{|(x - x_0)^n a_n|} = |x - x_0| \sqrt[n]{| a_n |} < q^2 \frac{1}{\rho}\frac{1}{q}\rho = q < 1,$$
sodaß die Reihe hier (absolut) konvergiert.

Ist andrerseits $|x - x_0| > r := \frac{1}{\rho}$, so ist mit einem q, $0 < q < 1$ auch $|x - x_0| > \frac{1}{q^2} r$ und für große n dann $\sqrt[n]{|\,a_n\,|} > q\rho$, sodaß

$$\sqrt[n]{|(x - x_0)^n a_n|} = |x - x_0| \sqrt[n]{|\,a_n\,|} > \frac{1}{q^2}\frac{1}{\rho} q\rho = \frac{1}{q} > 1.$$

Dann ist also stets $|(x - x_0)^n a_n| > 1$ und damit die Reihe sicher divergent.
Die im Falle $r = 0$ oder $r = \infty$ bei diesem Beweis nötigen Modifikationen seien als Übung gestellt.
Zu 3.: Mit dem selben M wie in 1. haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |na_n(x - x_0)^{n-1}| &= n \cdot |a_n| \cdot |x_1 - x_0|^{n-1} \left(\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|}\right)^{n-1} \\ &\le n\frac{M}{|x_1 - x_0|} q^{n-1} = \frac{M}{q|x_1 - x_0|} \cdot n \cdot q^n. \end{aligned}$$

Nach Beispiel Z.48 ist die damit gebildete Reihe aber absolut konvergent. Die Majorante ist wieder unabhängig vom konkreten x, was wieder die Gleichmäßigkeit beweist. □

Wir beschließen dieses Kapitel mit ein paar Ergebnissen zum Umordnen von Reihen. Bei einer Summe von endlich vielen Summanden kommmt es bekanntlich nicht darauf an, in welcher Reihenfolge man sie aufsummiert, das Ergebnis ist immer die selbe Zahl. Bei unendlichen Reihen ist das *nicht* so. Die Reihe $\sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$ ist nach dem LEIBNIZ-Kriterium Z.41 konvergent mit einem Grenzwert $s \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$. Wir wissen, daß die Partialsummen der harmonischen Reihe

$$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$

nicht beschränkt sind und dies gilt dann trivialerweise auch für

$$\frac{1}{2} s_n := \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + ...$$

Damit gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(m_n)_n$ von natürlichen Zahlen, sodaß für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{2j} \ \ge\ 2n.$$

Die Glieder unserer Folge, d.h. Elemente der Menge $\left\{\frac{(-1)^j}{j} \mid j = 2, 3, ...\right\}$ ordnen wir nun neu an – man beachte, daß positiv genau die Glieder mit geradem j sind –.

- Zunächst nehmen wir die positiven Glieder mit (geraden) Nummern $\le 2m_1$,
- dann $-\frac{1}{3}$,
- dann die positiven Glieder mit (geraden) Nummern $2m_1 < j \le 2m_2$,
- dann $-\frac{1}{5}$, etc.

Wenn wir also so abwechselnd weiterverfahren, erhalten wir für gewisse Partialsummen genau den Wert

$$\sum_{j=1}^{m_n} \frac{1}{2j} \ - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{2n+1}\right) \ge 2n - n = n \to \infty.$$

Die so umgeordnete Reihe kann also nicht konvergieren. Es gilt sogar genauer:

Zu jeder beliebigen reellen Zahl a kann man eine Umordnung finden, die gegen a konvergiert, ebenso kann man bei geigneter Umordnung der Folge die Partialsummen gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ divergieren lassen.

Man beachte also die

Warnung *Ordnet man die Reihenfolge der Glieder einer unendlichen Reihe um, so ändert man im allgemeinen das Konvergenzverhalten bzw. den Grenzwert.*

Es gibt jedoch eine wichtige Ausnahme:

Satz Z.51 *Es sei $\sum a_n$ eine **absolut konvergente** Reihe mit Grenzwert a. Dann ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergent und zwar gegen denselben Grenzwert a.*

Wir übergehen den Beweis. (Siehe etwa O.Forster, Analysis 1.)

Beachten Sie: *Gefahrlos dürfen Sie nur absolut konvergente Reihen umordnen.*

Eine etwas anspruchsvollere Variante des Umordnungsprinzips braucht man für den folgenden Satz, der sagt, wie man eine Potenzreihe bezüglich einer beliebigen Stelle ihres Konvergenzkreises darstellen kann.

Satz Z.52 *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, x_0 beliebig aus dem Konvergenzkreis $K(0, R)$. Dann sind alle Reihen*

$$b_k := \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k}$$

absolut konvergent und die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

konvergiert mindestens in dem größten Kreis um x_0, der noch ganz in $K(0, R)$ liegt, der Konvergenzradius der neuen Reihe ist also $\geq (R - |x_0|)$. Im gemeinsamen Definitionsbereich haben beide Reihen jeweils an gleichen Stellen gleiche Werte.

Vergleichen Sie dazu auch Satz Z.50.3. Wir skizzieren den **Beweis** nur.
Für $x \in K(0, R)$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 + (x - x_0))^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k \right).$$

Soweit war alles unproblematisch. Man überzeugt sich, daß auch die zuletzt notierte Reihe absolut konvergent ist, und kann daraus schließen (das ist mit Arbeit verbunden), daß man die Reihenfolge der beiden Summationen über n und über k vertauschen darf, ohne etwas am Konvergenzverhalten und Wert der Reihe zu ändern. Dann haben wir also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k} \right) (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k.$$

$\square$

Ein weiteres Resultat, das mit dem Umordnen zusammenhängt und daher die absolute Konvergenz voraussetzt, ist

Satz Z.53 (CAUCHY-Produkt) *Es seien $\sum_{n=0}^\infty a_n$ und $\sum_{n=0}^\infty b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir*

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^\infty c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^\infty c_n = \left(\sum_{n=0}^\infty a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^\infty b_n\right).$$

Den nicht ganz kurzen Beweis schenken wir uns. (Siehe etwa O.Forster, Analysis 1.) Die hier eingeführte Konstruktion des CAUCHY-Produkts kommt ganz natürlich bei Potenzreihen vor. Bildet man hierfür (zunächst formal) $(\sum_{n=0}^\infty \alpha_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^\infty \beta_n x^n)$ und sortiert nach Potenzen von x, so ergibt sich mit

$$\gamma_n := \sum_{k=0}^n \alpha_{n-k} \beta_k.$$

eben gerade

$$\sum_{n=0}^\infty \gamma_n x^n = \left(\sum_{n=0}^\infty \alpha_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^\infty \beta_n x^n\right).$$

Konvergieren die beiden rechtsstehenden Reihen an der Stelle $x \in \mathbb{C}$ absolut, so auch die linke, d.h. deren CAUCHY-Produkt.

In Beispiel Z.46 hatten wir gezeigt, daß für jedes $x \in \mathbb{C}$ die Reihe

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$$

absolut konvergiert. Somit können wir hierauf etwa den Satz über das CAUCHY-Produkt anwenden. Mit

$$a_n := \frac{x^n}{n!},\ b_n := \frac{y^n}{n!}$$

ist

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \frac{(x+y)^n}{n!} \end{aligned}$$

und dies ist ja das n-te Glied der Reihe zu $\exp(x+y)$. Also folgt nach dem Satz über das CAUCHY-Produkt

Satz Z.54 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)
Für beliebige komplexe $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$