Gevrey–Lösungen voll nichtlinearer schwach hyperbolischer Differentialgleichungen

M. Dreher M. Reissig

Diese Studienarbeit entstand während eines Aufenthalts des ersten Autors an der TU Bergakademie Freiberg im Wintersemester 1994/1995 Dr. Reissig.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Wir untersuchen in dieser Arbeit schwach hyperbolische Differentialgleichungen der Gestalt

$$F(\sigma^2 u_{xx}, \sigma u_{xt}, u_{tt}, \sigma u_x, u_t, u, x, t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x). \tag{0.1}$$

Hierbei ist $\sigma(x) \geq 0$ eine Funktion, die die Art der Entartung beschreibt. Da σ Nullstellen besitzen darf, liegt der Fall der Ortsentartung vor. Darüberhinaus benutzen wir σ, um das Erfülltsein der für schwach hyperbolische Differentialgleichungen typischen Levi-Bedingungen zu sichern. Die Funktion F ist so beschaffen, daß die nichtlineare Differentialgleichung

$$F(w_{xx}, w_{xt}, w_{tt}, w_x, w_t, w, x, t) = 0$$

strikt hyperbolisch ist. Wir werden unter gewissen Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit periodischer Lösungen in speziellen Räumen unendlich oft bezüglich x differenzierbarer Funktionen nachweisen.

Historischer Überblick

Kajitani untersuchte in [7] schwach hyperbolische nichtlineare Differentialgleichungen. Ein Spezialfall der von ihm untersuchten Gleichungen lautet

$$F(u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_x, u_t, u, x, t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x).$$

Kajitani setzte voraus, daß F in u und den Ableitungen von u eine analytische und in x, t eine Gevrey-Funktion der Ordnung s ist, $1 \leq s < 2$. Die Anfangsdaten sollten ebenfalls zur Gevrey-Klasse s gehören. Er konnte unter anderem zeigen, daß genau eine lokale Lösung u existiert; sie ist eine Gevrey–Funktion der Ordnung s.

Die Einschränkung $s < 2$ ist zu erwarten, wie ein Beispiel von Gevrey (vgl. [5]) zeigt: Er untersuchte

$$u_{tt} - (a(x)u_x)_x = b(x)u_x, \quad u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x). \tag{0.2}$$

Dabei seien φ_0, φ_1 Funktionen der Gevrey-Klasse s, $s \geq 2$. Gevrey konnte zeigen: Für $a \equiv 0$, $b \equiv 1$ ist das Anfangswertproblem nicht korrekt gestellt.

Für $s \geq 2$ kann man Korrektheit nachweisen, wenn der Differentialoperator sogenannte Levi–Bedingungen erfüllt. Eine Möglichkeit, Levi–Bedingungen zu formulieren, sind algebraische Beziehungen zwischen Koeffizienten des Hauptteils und Koeffizienten niederer Ableitungen. Will man die Existenz von C^∞-Lösungen bezüglich x nachweisen, dann lautet die Levi-Bedingung für (0.2)

$$|b(x)|^2 \leq Ca(x) \quad \forall x \in R$$

mit einer von x unabhängigen beliebigen Konstanten C. Im Fall $a \equiv 0$ erhalten wir zwangsläufig $b \equiv 0$, das heißt, wir haben in diesem Fall eine gewöhnliche Differentialgleichung zu untersuchen.

Im Falle allgemeinerer schwach hyperbolischer Differentialgleichungen muß man die Levi–Bedingungen geeignet modifizieren. Dabei ist zu unterscheiden, ob die Entartung von der Ortsvariablen x (wie im Gevrey–Beispiel) oder von der Zeitvariablen t erzeugt wird:

Colombini und Spagnolo betrachteten in [1] das schwach hyperbolische Anfangswertproblem

$$u_{tt} - a(t)u_{xx} = 0, \quad u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x).$$

Levi–Bedingungen sind in diesem Falle überflüssig, weil es keine Terme mit niederen Ableitungen gibt. Sie konnten zeigen, daß es eine C^∞–Funktion $a(t)$ gibt, so daß das Problem nicht C^∞–korrekt ist. Dabei wurde die Funktion $a(t)$ so gewählt, daß sie unendlich viele Oszillationen aufwies. Man kann Korrektheit nachweisen, wenn man Bedingungen fordert, die diese Oszillationen ausschließen, zum Beispiel

$$a_t(t) \leq Aa(t), \quad A > 0.$$

Reissig und Yagdjian untersuchten in [10] die quasilineare Differentialgleichung

$$u_{tt} - (a(x,t)u_x)_x = f(x,t,u,u_x), \quad u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x)$$

unter der Voraussetzung $a_t(x,t) \leq Aa(x,t)$.

Weiterhin nahmen sie an, daß es zu jeder kompakten Menge $K \subset R_x \times [0,T] \times R_u \times R_p$ Konstanten C_K, M_K gibt mit

$$|\partial_p^l f(x,t,u,p)| \leq C_K M_K^l l!^{s'} \sqrt{a(x,t)} \quad \forall (x,t,u,p) \in K \quad (1 \leq s' < s).$$

Diese Voraussetzung stellt eine Levi–Bedingung dar. In [10] konnte gezeigt werden: wenn φ_0, φ_1, a, f s-Gevrey in x und s'-Gevrey in u, u_x sind, dann existiert genau eine lokale Lösung $u(x,t)$, die s-Gevrey in x ist.

In einer Reihe von Arbeiten von Spagnolo wurden globale Regularitätsaussagen für Lösungen schwach hyperbolischer Gleichungen hergeleitet. Dabei benötigt man lokale Existenzresultate. In [12], [13] wurde als solches der Satz von Cauchy-Kowalewskaja herangezogen. Damit beschränkt man sich aber auf den Fall globaler analytischer Regularität. In [8],[10] konnte für semilineare und quasilineare Differentialgleichungen eine globale Gevrey-Regularität nachgewiesen werden. Nicht behandelt werden konnte bisher die globale Gevrey-Regularität voll nichtlinearer Differentialgleichungen der Form (0.1). Eine Ursache liegt im Fehlen eines lokalen Existenzresultats. Damit ist die Motivation für den Beweis eines lokalen Existenzresultats für (0.1) in Gevrey-Räumen als ein Hauptziel dieser Arbeit gegeben.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wenden wir uns dem C^∞-Fall zu. Hier gelingt es, die lokale Existenz von Lösungen des Cauchy-Problems für quasilineare Differentialgleichungen nachzuweisen.

Philosophie des Zugangs

Zunächst untersuchen wir nur den periodischen Fall in x. Im Abschnitt 2 beweisen wir, daß eine in x periodische Funktion u genau dann die nichtlineare Gleichung (0.1) löst, wenn $\vec{u} := (u, u_t, \sigma u_x, u_t, u_{tt}, \sigma(u_t)_x, \sigma u_x, (\sigma u_x)_t, \sigma(\sigma u_x)_x)$ periodische Lösung eines quasilinearen schwach hyperbolischen Differentialgleichungssystems

$$L(\vec{u})\vec{u} = \vec{f}(\vec{u}, \vec{u}_t, \sigma\vec{u}_x, x, t)$$

ist. Dabei ist $L(\vec{u})$ ein Matrixdifferentialoperator in Diagonalgestalt. Die Matrix enthält auf der Diagonale die Komponenten $\partial_{tt} + \sigma(x)b(x,t,\vec{u})\partial_{xt} - \sigma^2(x)a(x,t,\vec{u})\partial_{xx}$ mit gewissen Funktionen a, b.

Im Abschnitt 5 zeigen wir die lokale Existenz einer Lösung dieses Systems durch Untersuchung linearer Hilfsprobleme

$$L(\vec{v})\vec{u} = \vec{f}(\vec{v}, \vec{v}_t, \sigma\vec{v}_x, x, t).$$

Dabei wenden wir die Energiemethode und den Fixpunktsatz von Schauder–Tychonoff an.

Die Abschätzung der Lösungen der Hilfsprobleme wird in den Abschnitten 3 und 4 vorbereitet. Dabei ist die passende Wahl der Energien wesentlich. Im Gegensatz zu obigen Arbeiten wählen wir die Energien nach Steinberg [14] unter Verwendung der charakteristischen Wurzeln des Differentialoperators $L(\vec{v})$. Deshalb werden im Abschnitt 3 Evolutionsoperatoren $\partial_t - \lambda(x,t,\vec{v})\partial_x$ untersucht.

Im Abschnitt 6 fassen wir die Ergebnisse der Abschnitt 2 und 5 zusammen und zeigen ein Existenz– und Eindeutigkeitsresultat für (0.1).

Im Abschnitt 7 beweisen wir die lokale Existenz von C^∞-Lösungen quasilinearer Gleichungen. Dabei spielen die in den Abschnitten 4 und 5 hergeleiteten Energieabschätzungen eine wichtige Rolle.

Im Abschnitt 9 zeigen wir die lokale Existenz für den allgemeinen nichtperiodischen Fall. Die erforderlichen Hilfssätze werden im Abschnitt 8 bereitgestellt.

1 Hilfsmittel

H1 Es ist $\prod_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i$, falls $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 2$, und $\prod_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n a_i - 1$, falls $a_1 \geq 1$, $a_2, \ldots, a_n \geq 2$.

H2 Wenn $h_i \geq 1$, dann $l! \cdot h_1! \cdot \ldots \cdot h_l! \leq (h_1 + \ldots + h_l)!$.

H3 Für ein festes $s \geq 1$ gibt es eine von s abhängige Konstante $C_B > 0$ (B steht für Binomialkoeffizient), so daß für $j \geq i+1$ gilt:

$$\binom{j}{i}^{1-s} \leq C_B (i+1)^{1-s}.$$

H4 Zu jedem kompakten Intervall $P \subset R$ gibt es eine Konstante $C_P > 0$, so daß für P-periodische Funktionen $g(x)$ gilt:

$$\left\|\partial_x^j g(x)\right\|_{L_\infty(P)} \leq C_P \left\|\partial_x^{j+1} g(x)\right\|_{L_2(P)}, \forall j \geq 1,$$

$$\|g(x)\|_{L_\infty(P)} \leq C_P(\|g(x)\|_{L_2(P)} + \|\partial_x g(x)\|_{L_2(P)}).$$

H5 Es gilt die Leibniz-Regel

$$d_x^j f(x, u(x), p(x)) = \sum_{i+l=j} \frac{j!}{i!} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \frac{1}{\nu_1!\nu_2!} f^{(i,\nu_1,\nu_2)}(x,u,p) \times$$
$$\times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1 \\ 1 \leq h_\mu}} \frac{\partial_x^{h_1} u \ldots \partial_x^{h_{\nu_1}} u}{h_1! \ldots h_{\nu_1}!} \right) \left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2 \\ 1 \leq m_\mu}} \frac{\partial_x^{m_1} p \ldots \partial_x^{m_{\nu_2}} p}{m_1! \ldots m_{\nu_2}!} \right).$$

Dabei gelten die Vereinbarungen: Falls $\nu_1 = 0$ ($\nu_2 = 0$), dann ist auch $l_1 = 0$ ($l_2 = 0$) und sowohl die vorletzte (letzte) Summe als auch die Summanden, für die $\nu_1 = \nu_2 = 0$, aber $i < j$, gelten als nicht geschrieben.

H6 Es gilt

$$\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_\nu=l \\ 1 \leq h_\mu}} \left| \frac{\partial_x^{h_1} v \ldots \partial_x^{h_\nu} v}{h_1! \ldots h_{\nu_1}!} \right| \leq \nu \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_\nu=l \\ 1 \leq h_\mu \leq h_\nu}} \left| \frac{\partial_x^{h_1} v \ldots \partial_x^{h_\nu} v}{h_1! \ldots h_{\nu_1}!} \right|.$$

H7 Sei $P \subset R$ ein kompaktes Intervall. Wir definieren für $s \geq 1$

$$X_{+0}^s(P) := \left\{ u \in C^\infty(P) : \exists C_u, \varrho_u > 0 : \left\|\partial_x^j u\right\|_{L_\infty(P)} \leq \frac{C_u j!^s}{\varrho_u^j}, \forall j \right\},$$
$$Y_{+0}^s(P) := \left\{ u \in C^\infty(P) : \exists C_u, \varrho_u > 0 : \left\|\partial_x^j u\right\|_{L_2(P)} \leq \frac{C_u j!^s}{\varrho_u^j}, \forall j \right\},$$
$$\|u\|_{\varrho,s} := \sup_j \left\|\partial_x^j u\right\|_{L_2(P)} \frac{\varrho^j}{j!^s}.$$

Für kompaktes P sind die Räume $X_{+0}^s(P)$ und $Y_{+0}^s(P)$ äquivalent.

H8 Wir definieren

$$C([0,T], Y_{+0}^s(P)) := \big\{ u \in C([0,T], C^\infty(P)) : u(t) \in Y_{+0}^s(P) \quad \forall t \in [0,T],$$
$$\exists \varrho > 0 : \quad \forall t_0 \lim_{t \to t_0} \|u(t) - u(t_0)\|_{\varrho,s} = 0 \big\}.$$

H9 Sei $G \subset R^n$ ein Gebiet. Unter $X_{loc}^{(s_1,\ldots,s_n)}(G)$ verstehen wir die Menge aller $u \in C^\infty(G)$, für die zu jedem Kompaktum $K \subset G$ Konstanten $C_{u,K}, M_{u,K}$ existieren mit

$$|\partial_{x_1}^{j_1} \ldots \partial_{x_n}^{j_n} u(x_1, \ldots x_n)| \leq C_{u,K} M_{u,K}^{j_1+\ldots+j_n} j_1!^{s_1} \ldots j_n!^{s_n} \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K.$$

H10 **Satz 1.1 (Schauder–Tychonoff)** *Sei X ein separierter lokalkonvexer Raum, $\emptyset \neq K \subset X$, K konvex und in X kompakt. Die Abbildung $\Phi : K \to K$ sei stetig. Dann hat Φ einen Fixpunkt in K.*

Wir definieren einige Energien:

$$\begin{aligned} e_j^2(t) := e_j^2(u)(t) &:= \int_P |\partial_x^j u(x,t)|^2 dx \quad \text{(partielle Energie)} , \\ \eta(j) := \eta_u(j) &:= \frac{e_j(t)\varrho(t)^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s}, \\ E_N(t) := E_N(u)(t) &:= \sum_{j=0}^{N} \eta(j) \quad \text{(Energien endlicher Ordnung)} . \end{aligned}$$

Hierbei ist k eine natürliche Zahl (in der vorliegenden Arbeit ist $k = 2$), ϱ eine stetig differenzierbare, streng monoton fallende Funktion, die nur positive Werte annimmt, $s \geq 1$.

Später verwenden wir folgendes

Lemma 1 *Seien $f_1(x,t), f_2(x,t) \in C([0,T], C^\infty(P))$ P-periodisch in x und $\varrho(0) \leq 1$. Dann gibt es eine von f_1, f_2 unabhängige Konstante C_{prod}, so daß*

$$E_N(f_1 f_2)(t) \leq C_{prod} E_N(f_1)(t) E_N(f_2)(t) \quad \forall N \geq 1, t \in [0,T].$$

Beweis Es ist $E_N(f_1 f_2) = \sum_{j=1}^N \frac{\varrho^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s} \left\| \partial_x^j (f_1 f_2) \right\|_2 + \varrho^{-k} \left\| f_1 f_2 \right\|_2$ und mit H1, H4 folgt

$$\begin{aligned} \varrho^{-k} \left\| f_1 f_2 \right\|_2 &\leq \varrho^{-k} C_P \left\| f_1 \right\|_2 (\left\| f_2 \right\|_2 + \left\| \partial_x f_2 \right\|_2) = C_P \eta_1(0) \left(\frac{\eta_2(0)}{\varrho^{-k}} + \frac{\eta_2(1)}{2^{ks}\varrho^{1-k}} \right) \\ &\leq C_P \varrho(t) E_0(f_1)(t) E_1(f_2)(t), \\ \left\| \partial_x^j (f_1 f_2) \right\|_2 &\leq \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} \left\| \partial_x^{j-i} f_1 \partial_x^i f_2 \right\|_2 + \left\| (\partial_x^j f_1) f_2 \right\|_2 + \left\| (\partial_x^j f_2) f_1 \right\|_2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} \left\| \partial_x^{j-i} f_1 \partial_x^i f_2 \right\|_2 &\leq C_P \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j}{i} \left\| \partial_x^{j-i} f_1 \right\|_2 \left\| \partial_x^{i+1} f_2 \right\|_2 + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1}^{j-1} \binom{j}{i} \left\| \partial_x^{j-i+1} f_1 \right\|_2 \left\| \partial_x^i f_2 \right\|_2 \right) \\ &= C_P \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j}{i} \frac{\eta_1(j-i)(j-i)!^s \eta_2(i+1)(i+1)!^s}{(j-i+1)^{ks}\varrho^{j-i-k}(i+2)^{ks}\varrho^{i+1-k}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1}^{j-1} \binom{j}{i} \frac{\eta_1(j-i+1)(j-i+1)!^s \eta_2(i) i!^s}{(j-i+2)^{ks}\varrho^{j-i+1-k}(i+1)^{ks}\varrho^{i-k}} \right) \\ &\leq \frac{C_P j!^s (j+1)^s}{\varrho^{j+1-2k}(j+1)^{ks}} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \binom{j}{i}^{1-s} \frac{\eta_1(j-i)\eta_2(i+1)}{(j-i+1)^s} + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + 1}^{j-1} \binom{j}{i}^{1-s} \frac{\eta_1(j-i+1)\eta_2(i)}{(i+1)^s} \right). \end{aligned}$$

In den beiden Summen ist $(j-i+1)^s \geq (j-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1)^s \geq (j+1)^s/C$ bzw. $(i+1)^s \geq (\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1)^s \geq (j+1)^s/C$ mit einem gewissen $C \geq 1$. Außerdem ist

$$\left\|(\partial_x^j f_1) f_2\right\|_2 \leq C_P \frac{\eta_1(j) j!^s}{(j+1)^{ks} \varrho^{j-k}} \left(\frac{\eta_2(0)}{\varrho^{-k}} + \frac{\eta_2(1)}{2^{ks} \varrho^{1-k}} \right) \leq \frac{C_P j!^s}{(j+1)^{ks} \varrho^{j+1-2k}} \eta_1(j) \left(\eta_2(0) + \eta_2(1)\right).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left\|\partial_x^j (f_1 f_2)\right\|_2 \leq \frac{C C_P j!^s \varrho^{k-1}}{\varrho^{j-k} (j+1)^{ks}} \Bigg(& \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \eta_1(j-i) \eta_2(i+1) + \eta_1(j) \eta_2(0) + \\ & + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1}^{j} \eta_1(j-i+1) \eta_2(i) + \eta_1(0) \eta_2(j) \Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N} \frac{\varrho^{j-k} (j+1)^{ks}}{j!^s} \left\|\partial_x^j (f_1 f_2)\right\|_2 \leq \\ & \leq C C_P \varrho \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \eta_1(j-i) \eta_2(i+1) + \eta_1(j) \eta_2(0) + \sum_{i=\lfloor \frac{j}{2} \rfloor+1}^{j} \eta_1(j-i+1) \eta_2(i) + \eta_1(0) \eta_2(j) \right) \\ & \leq C C_P \varrho \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \eta_2(i+1) \sum_{j=2i}^{N} \eta_1(j-i) + \sum_{i=1}^{N} \eta_2(i) \sum_{j=i}^{N} \eta_1(j-i+1) + E_N(f_1) E_N(f_2) \right) \\ & \leq 3 C C_P \varrho E_N(f_1) E_N(f_2). \end{aligned}$$

Also kann man z.B. setzen $C_{prod} = (3C+1) C_P \varrho(0)$.

Ähnlich beweist man ein weiteres

Lemma 2 *Sei* $f(x, v_1, \ldots, v_n) \in X_{loc}^{(s,s',\ldots,s')}(R^{n+1})$, $v_1, \ldots, v_n \in Y_{+0}^s(P)$, $s' < s$, $E_N(v_i) \leq C_v$ $\forall i, N$. *Dabei sei zu festem Kompaktum* K *die skalierende Funktion* $\varrho(t)$ *so gewählt, daß* $\varrho(0) M_{f,K} < 1$. *Dann ist auch* $f(x, v_1(x), \ldots, v_n(x)) \in Y_{+0}^s(P)$ *und es gibt eine Konstante* $C_f = C_f(C_v)$, *so daß* $E_N(f(x, v_1(x), \ldots, v_n(x))) \leq C_f(C_v)$ $\forall N$.

Später benötigen wir das

Lemma 3 *Sei* $N \geq 2, \nu \geq 1$. *Dann ist*

$$E_N^\nu \geq \sum_{n=\nu}^{N-1} \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_\nu=n \\ 1 \leq h_\mu}} \eta(h_1+1) \ldots \eta(h_\nu+1).$$

Beweis Es gilt

$$E_N^\nu = \sum_{(m_1,\ldots,m_\nu) \in [0,N]^\nu} \eta(m_1) \ldots \eta(m_\nu) = \sum_{l=0}^{\nu N} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_\nu=l \\ (m_1,\ldots,m_\nu) \in [0,N]^\nu}} \eta(m_1) \ldots \eta(m_\nu)$$

$$\geq \sum_{l=2\nu}^{\nu N} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_\nu=l \\ (m_1,\ldots,m_\nu)\in[2,N]^\nu}} \eta(m_1)\ldots\eta(m_\nu) \geq \sum_{l=2\nu}^{N+\nu-1} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_\nu=l \\ (m_1,\ldots,m_\nu)\in[2,N]^\nu}} \eta(m_1)\ldots\eta(m_\nu)$$

$$= \sum_{n=\nu}^{N-1} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_\nu=n+\nu \\ (m_1,\ldots,m_\nu)\in[2,N]^\nu}} \eta(m_1)\ldots\eta(m_\nu) = \sum_{n=\nu}^{N-1} \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_\nu=n \\ (h_1,\ldots,h_\nu)\in[1,N-1]^\nu}} \eta(h_1+1)\ldots\eta(h_\nu+1)$$

$$= \sum_{n=\nu}^{N-1} \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_\nu=n \\ 1\leq h_\mu}} \eta(h_1+1)\ldots\eta(h_\nu+1).$$

2 Äquivalenzsatz

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Gleichung (0.1). Wir betrachten hier nur den periodischen Fall und werden beweisen, daß unter gewissen Voraussetzungen diese nichtlineare Differentialgleichung äquivalent ist zu einem System quasilinearer Differentialgleichungen mit semilinearem Hauptteil.

Mit $F_1, F_2, \ldots, F_7, F_8$ bezeichnen wir die partiellen Ableitungen $F_{\sigma^2 u_{xx}}, F_{\sigma u_{xt}}, \ldots, F_x, F_t$. Entsprechend werden $F_{11}, \ldots, F_{18}, \ldots, F_{88}$ definiert.

Sei $F_3 \geq \alpha > 0$. Das bedeutet, daß eine Auflösung $u_{tt} = G(\sigma^2 u_{xx}, \sigma u_{xt}, \sigma u_x, u_t, u, x, t)$ existiert. Sei weiterhin $G \in C([0,T], X_{loc}^{(s',\ldots,s',s)}(K))$ mit einem geeigneten Kompaktum K. Außerdem sei $(F_2/F_3)^2 - 4(F_1/F_3) \geq \gamma > 0$. Das heißt, daß die Differentialgleichung strikt hyperbolisch wird, wenn man die Funktion σ wegläßt. All diese Voraussetzungen sollen in einem geeigneten Bereich des R^8 gelten, der von den Anfangsbedingungen abhängt. Wir wählen $\varphi_2(x) := G(\sigma^2\varphi_{0,xx}, \sigma\varphi_{1,x}, \sigma\varphi_{0,x}, \varphi_1, \varphi_0, x, 0)$.

Im folgenden setzen wir voraus, daß alle Umformungen durchgeführt werden können.

Wir gliedern den Beweis in zwei Teile.

2.1 Teil A

Wir beweisen den

Satz 2.1 *Es ist u eine periodische $C^4([0,T], C^4(P))$–Lösung von (0.1) genau dann, wenn der Vektor $(\overline{u}_2, u_1, u_0) := (\sigma u_x, u_t, u)$ eine periodische $(C^4([0,T], C^3(P))$, $C^3([0,T], C^4(P))$, $C^4([0,T], C^4(P)))$–Lösung von*

$$\sigma^2 F_1 \overline{u}_{2,xx} + \sigma F_2 \overline{u}_{2,xt} + F_3 \overline{u}_{2,tt} + \sigma F_4 \overline{u}_{2,x} + \sigma F_5 u_{1,x} + \sigma F_6 u_{0,x} + \sigma F_7 = \sigma\sigma'' F_1 \overline{u}_2 \quad (2.1)$$

$$\sigma^2 F_1 u_{1,xx} + \sigma F_2 u_{1,xt} + F_3 u_{1,tt} + F_4 \overline{u}_{2,t} + F_5 u_{1,t} + F_6 u_{0,t} + F_8 = 0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 F_1 u_{0,xx} + \sigma F_2 u_{0,xt} + F_3 u_{0,tt} &= F_1(\sigma\overline{u}_{2,x} - \sigma'\overline{u}_2) + F_2\overline{u}_{2,t} + F_3 u_{1,t} - \quad (2.3) \\ &\quad - F(\sigma\overline{u}_{2,x} - \sigma'\overline{u}_2, \overline{u}_{2,t}, u_{1,t}, \overline{u}_2, u_1, u_0, x, t) \end{aligned}$$

ist. Dabei ist $F_i = F_i(\sigma\overline{u}_{2,x} - \sigma'\overline{u}_2, \overline{u}_{2,t}, u_{1,t}, \overline{u}_2, u_1, u_0, x, t)$ und es gelten die Anfangsbedingungen $\overline{u}_2(x,0) = \sigma(x)\varphi_{0,x}(x)$, $\overline{u}_{2,t}(x,0) = \sigma(x)\varphi_{1,x}(x)$, $u_1(x,0) = \varphi_1(x)$, $u_{1,t}(x,0) = \varphi_2(x)$, $u_0(x,0) = \varphi_0(x)$, $u_{0,t}(x,0) = \varphi_1(x)$.

Beweis „$\Longrightarrow$“
Wir differenzieren (0.1) nach x und erhalten

$$F_1(\sigma^2 u_{xx})_x + F_2(\sigma u_{xt})_x + F_3(u_{tt})_x + F_4(\sigma u_x)_x + F_5(u_t)_x + F_6 u_x + F_7 = 0.$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit σ und erhalten (wenn wir $\sigma^2(\sigma u_x)_{xx} = \sigma(\sigma^2 u_{xx})_x + \sigma^2\sigma'' u_x$ beachten)

$$\sigma^2 F_1(\sigma u_x)_{xx} + \sigma F_2(\sigma u_x)_{xt} + F_3(\sigma u_x)_{tt} + \sigma F_4(\sigma u_x)_x + \sigma F_5(u_t)_x + F_6\sigma u_x + \sigma F_7 = \sigma\sigma'' F_1(\sigma u_x).$$

Daraus folgt sofort (2.1).

Nun differenzieren wir (0.1) nach t und es folgt

$$F_1\sigma^2(u_{xx})_t + F_2\sigma(u_{xt})_t + F_3(u_{tt})_t + F_4\sigma(u_x)_t + F_5(u_t)_t + F_6 u_t + F_8 = 0.$$

Daraus erhält man (2.2).

Aus (0.1) folgt wegen $\sigma^2 u_{xx} = \sigma(\sigma u_x)_x - \sigma'(\sigma u_x)$ unmittelbar (2.3).

„$\Longleftarrow$“
Sei $(\overline{u}_2, u_1, u_0)$ eine periodische Lösung von (2.1), (2.2), (2.3). Wir differenzieren (2.3) nach t und erhalten

$$\begin{aligned}\sigma^2 F_1(u_{0,xx})_t + \sigma F_2(u_{0,xt})_t + F_3(u_{0,tt})_t + (\sigma^2 F_1)_t u_{0,xx} + (\sigma F_2)_t u_{0,xt} + F_{3,t} u_{0,tt} \\ = F_{1,t}(\sigma\overline{u}_{2,x} - \sigma'\overline{u}_2) + F_{2,t}\overline{u}_{2,t} + F_{3,t} u_{1,t} - F_4\overline{u}_{2,t} - F_5 u_{1,t} - F_6 u_{0,t} - F_8.\end{aligned}$$

Wegen $(\sigma^2 F_1)_t u_{0,xx} = F_{1,t}(\sigma(\sigma u_{0,x})_x - \sigma'(\sigma u_{0,x}))$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\sigma^2 F_1 u_{0,xxt} + \sigma F_2 u_{0,xtt} + F_3 u_{0,ttt} + F_4\overline{u}_{2,t} + F_5 u_{1,t} + F_6 u_{0,t} + F_8 + \\ + F_{1,t}(\sigma(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_x - \sigma'(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)) + F_{2,t}(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_t + F_{3,t}(u_{0,t} - u_1)_t = 0.\end{aligned}$$

Von dieser Gleichung subtrahieren wir (2.2) und erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma^2 F_1(u_{0,t} - u_1)_{xx} + \sigma F_2(u_{0,t} - u_1)_{xt} + F_3(u_{0,t} - u_1)_{tt} + \\ + F_{1,t}(\sigma(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_x - \sigma'(\sigma u_{0,x}, - \overline{u}_2)) + F_{2,t}(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_t + F_{3,t}(u_{0,t} - u_1)_t = 0. \quad (2.4)\end{aligned}$$

Wir differenzieren (2.3) nach x:

$$\begin{aligned}\sigma^2 F_1(u_{0,xx})_x + \sigma F_2(u_{0,xt})_x + F_3(u_{0,tt})_x + (\sigma^2 F_1)_x u_{0,xx} + (\sigma F_2)_x u_{0,xt} + F_{3,x} u_{0,tt} \\ = F_{1,x}(\sigma\overline{u}_{2,x} - \sigma'\overline{u}_2) + F_{2,x}\overline{u}_{2,t} + F_{3,x} u_{1,t} - F_4\overline{u}_{2,x} - F_5 u_{1,x} - F_6 u_{0,x} - F_7.\end{aligned}$$

Wir verwenden $(\sigma^2 F_1)_x u_{0,xx} = F_{1,x}(\sigma(\sigma u_{0,x})_x - \sigma'(\sigma u_{0,x})) + 2F_1\sigma\sigma' u_{0,xx}$ und erhalten

$$\begin{aligned}\sigma^2 F_1 u_{0,xxx} + \sigma F_2 u_{0,xtx} + F_3 u_{0,ttx} + F_{1,x}(\sigma(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_x - \sigma'(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)) + \\ + 2F_1\sigma\sigma' u_{0,xx} + F_{2,x}(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_t + F_2\sigma' u_{0,xt} + F_{3,x}(u_{0,t} - u_1)_t + \\ + F_4\overline{u}_{2,x} + F_5 u_{1,x} + F_6 u_{0,x} + F_7 = 0.\end{aligned}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir mit σ. Wenn wir $\sigma F_1 u_{0,xxx} = F_1(\sigma u_{0,x})_{xx} - F_1\sigma'' u_{0,x} - 2F_1\sigma' u_{0,xx}$ und $\sigma F_2 u_{0,xtx} = F_2(\sigma u_{0,x})_{xt} - F_2\sigma' u_{0,xt}$ beachten, folgt:

$$\begin{aligned}\sigma^2 F_1(\sigma u_{0,x})_{xx} + \sigma F_2(\sigma u_{0,x})_{xt} + F_3(\sigma u_{0,x})_{tt} + \sigma F_{1,x}(\sigma(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_x - \sigma'(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)) + \\ + \sigma F_{2,x}(\sigma u_{0,x} - \overline{u}_2)_t + \sigma F_{3,x}(u_{0,t} - u_1)_t + \sigma F_4\overline{u}_{2,x} + \sigma F_5 u_{1,x} + \sigma F_6 u_{0,x} + \\ + \sigma F_7 = \sigma\sigma'' F_1(\sigma u_{0,x}).\end{aligned}$$

Von dieser Gleichung subtrahieren wir (2.1) und erhalten:

$$\begin{aligned}\sigma^2 F_1(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2)_{xx}+\sigma F_2(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2)_{xt}+F_3(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2)_{tt}+\\ +\sigma F_{1,x}(\sigma(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2)_x-\sigma'(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2))+\sigma F_{2,x}(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2)_t+\\ +\sigma F_{3,x}(u_{0,t}-u_1)_t=\sigma''\sigma F_1(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Gleichungen (2.4), (2.5) stellen ein lineares homogenes schwach hyperbolisches Differentialgleichungssystem für die Funktionen $(\sigma u_{0,x}-\overline{u}_2)$, $(u_{0,t}-u_1)$ dar. Dieses System besitzt in der Menge der periodischen Funktionen genau eine globale Lösung. Dies folgt aus Bemerkung 5.1 im Abschnitt 5. Daraus erhalten wir $\sigma u_{0,x}=\overline{u}_2$, $u_{0,t}=u_1$ für alle (x,t) aus $P\times[0,T]$. Daraus folgt

$$\sigma(\overline{u}_2)_x-\sigma'\overline{u}_2=\sigma(\sigma u_{0,x})_x-\sigma'\sigma u_{0,x}=\sigma^2 u_{0,xx},\quad \overline{u}_{2,t}=(\sigma u_{0,x})_t=\sigma u_{0,xt}.$$

Wenn man das in (2.3) einsetzt, folgt $F(\sigma^2 u_{0,xx},\sigma u_{0,xt},u_{0,tt},\sigma u_{0,x},u_{0,t},u_0,x,t)=0$. Die Behauptungen bezüglich der Anfangswerte ergeben sich unmittelbar. Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

Bemerkung 2.1 *Alle Umformungen sind möglich, wenn* $F_i\in C^1([0,T],X_{loc}^{(s,s',\dots,s')}(P\times R^6))$ *für* $i=1,2,3$ *und* $F_i,F_{ij}\in C([0,T],X_{loc}^{(s,s',\dots,s')}(P\times R^6))$ *für* $i,j=1,\dots,8$. *(Vgl. V5.3 und V5.4 in Abschnitt 5)*

Bemerkung 2.2 *Die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an* $u,\overline{u}_2,u_1,u_0$ *können um jeweils eine Ordnung bezüglich* x *und* t *abgeschwächt werden. Diese Möglichkeit werden wir jedoch nicht ausnutzen, weil das System (2.1), (2.2), (2.3) im Teil B weiter reduziert werden wird und wir dann die schärferen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen benötigen.*

2.2 Teil B

Wir untersuchen das quasilineare System

$$\begin{aligned}k(\vec{u},\vec{u}_t,\sigma\vec{u}_x,x,t)u_{i,tt}+\sigma b(\vec{u},\vec{u}_t,\sigma\vec{u}_x,x,t)u_{i,xt}-\sigma^2 a(\vec{u},\vec{u}_t,\sigma\vec{u}_x,x,t)u_{i,xx}=f_i(\vec{u},\vec{u}_t,\sigma\vec{u}_x,x,t),\\ u_i(x,0)=\varphi_{i0}(x),\quad u_{i,t}(x,0)=\varphi_{i1}(x),\quad i=1,\dots,n.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Dabei steht $\vec{u}$ für $(u_1,\dots,u_n)$. Sei $k\geq\alpha>0$ und $(b/k)^2+4(a/k)\geq\gamma>0$.

Mit $\varphi_{i2}(x)$ bezeichnen wir die Funktion, die der Gleichung

$$\begin{aligned}k(\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_1,\sigma\vec{\varphi}_{0x},x,0)\varphi_{i2}+\sigma b(\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_1,\sigma\vec{\varphi}_{0x},x,0)\varphi_{i1,x}-\sigma^2 a(\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_1,\sigma\vec{\varphi}_{0x},x,0)\varphi_{i0,xx}=\\ =f_i(\vec{\varphi}_0,\vec{\varphi}_1,\sigma\vec{\varphi}_{0x},x,0)\end{aligned}$$

genügt.

Dann gilt folgender Satz:

Satz 2.2 *Es ist* $\vec{u}=(u_1,\dots,u_n)$ *eine periodische* $(C^3([0,T],C^3(P)))^n$*-Lösung von (2.6) dann und nur dann, wenn* $(\overline{u}_{12},\dots,\overline{u}_{n2},u_{11},\dots,u_{n1},u_{10},\dots,u_{n0}):=(\vec{\overline{u}}_2,\vec{u}_1,\vec{u}_0):=$

$(\sigma\vec{u}_x, \vec{u}_t, \vec{u})$ *eine periodische* $(C^3([0,T], C^2(P)))^n, C^2([0,T], C^3(P)))^n, C^3([0,T], C^3(P)))^n$ – *Lösung von*

$$\begin{aligned}
&k\ u_{i1,tt} + \sigma b u_{i1,xt} - \sigma^2 a u_{i1,xx} + \qquad (2.7)\\
&\quad + \big((\nabla_1 k)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 k)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 k)\vec{\overline{u}}_{2,t} + k_t\big)\, u_{i1,t} + \\
&\quad + \big((\nabla_1 b)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 b)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 b)\vec{\overline{u}}_{2,t} + b_t\big)\, \overline{u}_{i2,t} - \\
&\quad - \big((\nabla_1 a)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 a)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 a)\vec{\overline{u}}_{2,t} + a_t\big)\, (\sigma\overline{u}_{i2,x} - \sigma'\overline{u}_{i2})\\
&= \big((\nabla_1 f_i)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 f_i)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 f_i)\vec{\overline{u}}_{2,t} + f_{i,t}\big)\,,\\
&k\ \overline{u}_{i2,tt} + \sigma b \overline{u}_{i2,xt} - \sigma^2 a \overline{u}_{i2,xx} + \qquad (2.8)\\
&\quad + \big((\nabla_1 k)\sigma\vec{u}_{0,x} + (\nabla_2 k)\sigma\vec{u}_{1,x} + (\nabla_3 k)\sigma\vec{\overline{u}}_{2,x} + \sigma k_x\big)\, u_{i1,t} + \\
&\quad + \big((\nabla_1 b)\sigma\vec{u}_{0,x} + (\nabla_2 b)\sigma\vec{u}_{1,x} + (\nabla_3 b)\sigma\vec{\overline{u}}_{2,x} + \sigma b_x\big)\, \sigma u_{i1,x} - \\
&\quad - \big((\nabla_1 a)\sigma\vec{u}_{0,x} + (\nabla_2 a)\sigma\vec{u}_{1,x} + (\nabla_3 a)\sigma\vec{\overline{u}}_{2,x} + \sigma a_x\big)\, (\sigma\overline{u}_{i2,x} - \sigma'\overline{u}_{i2})\\
&= \big((\nabla_1 f_i)\sigma\vec{u}_{0,x} + (\nabla_2 f_i)\sigma\vec{u}_{1,x} + (\nabla_3 f_i)\sigma\vec{\overline{u}}_{2,x} + \sigma f_{i,x}\big) - a\sigma''\sigma\overline{u}_{i2},\\
&k\ u_{i0,tt} + \sigma b u_{i0,xt} - \sigma^2 a u_{i0,xx} = f_i(\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{\overline{u}}_2, x, t) \quad (i = 1, \ldots, n) \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

ist mit den Anfangsbedingungen $\overline{u}_{i2}(x,0) = \sigma(x)\varphi_{i0,x}(x)$, $\overline{u}_{i2,t}(x,0) = \sigma(x)\varphi_{i1,x}(x)$, $u_{i1}(x,0) = \varphi_{i1}(x)$, $u_{i1,t}(x,0) = \varphi_{i2}(x)$, $u_{i0}(x,0) = \varphi_{i0}(x)$, $u_{i0,t}(x,0) = \varphi_{i1}(x)$. *Dabei bezeichnet* $\nabla_1 = \nabla_u$, $\nabla_2 = \nabla_{u_t}$, *und* $\nabla_3 = \nabla_{\sigma u_x}$, *und* k *ist gleich* $k(\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{\overline{u}}_2, x, t)$. *(Für* a, b, f_i *gilt sinngemäß das gleiche.)*

Beweis „$\Longrightarrow$“

Wir differenzieren (2.6) nach t und erhalten sofort (2.7).

Wir differenzieren (2.6) nach x und es folgt

$$\begin{aligned}
&k\ u_{i,ttx} + b(\sigma u_{i,x})_{xt} - a(\sigma^2 u_{i,xx})_x + ((\nabla_1 k)\vec{u}_x + (\nabla_2 k)\vec{u}_{xt} + (\nabla_3 k)(\sigma\vec{u}_x)_x + k_x)\, u_{i,tt} + \\
&\quad + ((\nabla_1 b)\vec{u}_x + (\nabla_2 b)\vec{u}_{xt} + (\nabla_3 b)(\sigma\vec{u}_x)_x + b_x)\, \sigma u_{i,xt} - \\
&\quad - ((\nabla_1 a)\vec{u}_x + (\nabla_2 a)\vec{u}_{xt} + (\nabla_3 a)(\sigma\vec{u}_x)_x + a_x)\, \sigma^2 u_{i,xx}\\
&= ((\nabla_1 f_i)\vec{u}_x + (\nabla_2 f_i)\vec{u}_{xt} + (\nabla_3 f_i)(\sigma\vec{u}_x)_x + f_{i,x})\,.
\end{aligned}$$

Wenn wir diese Gleichung mit σ multiplizieren und $\sigma(\sigma^2 u_{ixx})_x = \sigma^2(\sigma u_{i,x})_{xx} - \sigma''\sigma(\sigma u_{i,x})$ ausnutzen, erhalten wir (2.8).

Aus (2.6) folgt offensichtlich (2.9).

„$\Longleftarrow$“

Sei $(\vec{\overline{u}}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_0)$ eine Lösung von (2.7), (2.8), (2.9). Wir differenzieren (2.9) nach t und erhalten

$$\begin{aligned}
&k\ u_{i0,ttt} + \sigma b u_{i0,xtt} - \sigma^2 a u_{i0,xxt} + \big((\nabla_1 k)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 k)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 k)\vec{\overline{u}}_{2,t} + k_t\big)\, u_{i0,tt} + \\
&\quad + \big((\nabla_1 b)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 b)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 b)\vec{\overline{u}}_{2,t} + b_t\big)\, \sigma u_{i0,xt} - \\
&\quad - \big((\nabla_1 a)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 a)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 a)\vec{\overline{u}}_{2,t} + a_t\big)\, \sigma^2 u_{i0,xx}\\
&= \big((\nabla_1 f_i)\vec{u}_{0,t} + (\nabla_2 f_i)\vec{u}_{1,t} + (\nabla_3 f_i)\vec{\overline{u}}_{2,t} + f_{i,t}\big)\,.
\end{aligned}$$

Davon subtrahieren wir die Gleichung (2.7):

$$k\,(u_{i0,t} - u_{i1})_{tt} + \sigma b(u_{i0,t} - u_{i1})_{xt} - \sigma^2 a(u_{i0,t} - u_{i1})_{xx} + \qquad (2.10)$$

$$
\begin{aligned}
&+\left((\nabla_1 k)\vec{u}_{0,t}+(\nabla_2 k)\vec{u}_{1,t}+(\nabla_3 k)\vec{\overline{u}}_{2,t}+k_t\right)(u_{i0,t}-u_{i1})_t+\\
&+\left((\nabla_1 b)\vec{u}_{0,t}+(\nabla_2 b)\vec{u}_{1,t}+(\nabla_3 b)\vec{\overline{u}}_{2,t}+b_t\right)(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2})_t-\\
&-\left((\nabla_1 a)\vec{u}_{0,t}+(\nabla_2 a)\vec{u}_{1,t}+(\nabla_3 a)\vec{\overline{u}}_{2,t}+a_t\right)(\sigma(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2})_x-\sigma'(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2}))=0.
\end{aligned}
$$

Wir differenzieren (2.9) nach x:

$$
\begin{aligned}
&k\ u_{i0,ttx}+b(\sigma u_{i0,xt})_x-a(\sigma^2 u_{i0,xx})_x+\\
&\quad+\left((\nabla_1 k)\vec{u}_{0,x}+(\nabla_2 k)\vec{u}_{1,x}+(\nabla_3 k)\vec{\overline{u}}_{2,x}+k_x\right)u_{i0,tt}+\\
&\quad+\left((\nabla_1 b)\vec{u}_{0,x}+(\nabla_2 b)\vec{u}_{1,x}+(\nabla_3 b)\vec{\overline{u}}_{2,x}+b_x\right)\sigma u_{i0,xt}-\\
&\quad-\left((\nabla_1 a)\vec{u}_{0,x}+(\nabla_2 a)\vec{u}_{1,x}+(\nabla_3 a)\vec{\overline{u}}_{2,x}+a_x\right)\sigma^2 u_{i0,xx}\\
&=\left((\nabla_1 f_i)\vec{u}_{0,x}+(\nabla_2 f_i)\vec{u}_{1,x}+(\nabla_3 f_i)\vec{\overline{u}}_{2,x}+f_{i,x}\right).
\end{aligned}
$$

Wir multiplizieren mit σ, verwenden $\sigma(\sigma^2 u_{i0,xx})_x=\sigma^2(\sigma u_{i0,x})_{xx}-\sigma''\sigma(\sigma u_{i0,x})$ und subtrahieren anschließend die Gleichung (2.8):

$$
\begin{aligned}
&k\ (\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2})_{tt}+\sigma b(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2})_{xt}-\sigma^2 a(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2})_{xx}+\\
&\quad+\left((\nabla_1 k)\sigma\vec{u}_{0,x}+(\nabla_2 k)\sigma\vec{u}_{1,x}+(\nabla_3 k)\sigma\vec{\overline{u}}_{2,x}+\sigma k_x\right)(u_{i0,t}-u_{i1})_t+\\
&\quad+\left((\nabla_1 b)\sigma\vec{u}_{0,x}+(\nabla_2 b)\sigma\vec{u}_{1,x}+(\nabla_3 b)\sigma\vec{\overline{u}}_{2,x}+\sigma b_x\right)\sigma(u_{i0,t}-u_{i1})_x-\\
&\quad-\left((\nabla_1 a)\sigma\vec{u}_{0,x}+(\nabla_2 a)\sigma\vec{u}_{1,x}+(\nabla_3 a)\sigma\vec{\overline{u}}_{2,x}+\sigma a_x\right)(\sigma(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2})_x-\sigma'(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2}))\\
&=-a\sigma''\sigma(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2}).
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Die Gleichungen (2.10), (2.11) sind ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem für die Funktionen $(u_{i0,t}-u_{i1})$, $(\sigma u_{i0,x}-\overline{u}_{i2})$. Da das Cauchyproblem für solche Gleichungssysteme in der Menge der periodischen Funktionen eindeutig lösbar ist, folgt $u_{i0,t}=u_{i1}$, $\sigma u_{i0,x}=\overline{u}_{i2}$. Aus (2.9) folgt dann (2.6). Damit ist der Satz 2.2 bewiesen.

Bemerkung 2.3 *Alle Umformungen können durchgeführt werden, wenn* $k,b,a,f_i\in C^1([0,T],X_{loc}^{(s,s',\ldots,s')}(P\times R^{3n}))$. *(Vgl. V5.3, V5.4 im Abschnitt 5).*

Bemerkung 2.4 *Die beiden Sätze zusammen besagen, daß die nichtlineare Gleichung (0.1) äquivalent ist zu einem System quasilinearer Gleichungen, wenn* $F_i\in C^1([0,T],X_{loc}^{(s,s',\ldots,s')}(P\times R^6))$ *für* $i=1,\ldots,8$. *Dabei hat der Hauptteil dieses Systems Diagonalgestalt und hängt semilinear von den gesuchten Funktionen ab.*

3 Evolutionsgleichungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Anfangswertproblem

$$
u_t(x,t)-\lambda(x,t,v(x,t),w(x,t))u_x(x,t)=f(x,t)\qquad\forall(x,t)\in Q:=P\times[0,T],\tag{3.1}
$$

$$
u(x,0)=u_0(x)\qquad\forall x\in P,\quad P\subset R\text{ kompakt}
$$

unter den Voraussetzungen

V3.1 λ,f,u_0 sind P-periodisch in x,

V3.2 $f \in C([0,T], Y^s_{+0}(P))$,

V3.3 $\lambda \in C([0,T], X^{(s,s',s')}_{loc}(P \times R_v \times R_w)), \quad 1 \le s' < s$,

V3.4 $u_0, v_0, w_0 \in Y^s_{+0}(P)$,

V3.5 $v, w \in C([0,T], Y^s_{+0}(P)), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad w(x,0) = w_0(x), \quad v, w$ sind P-periodisch.

Wir wählen zu beliebigem $\delta > 0$ die kompakte Menge

$$K_\delta := \{(x,t,\varphi,\psi) : (x,t) \in Q, |\varphi - v_0(x)| \le \delta, |\psi - w_0(x)| \le \delta\}$$

und beweisen in diesem Abschnitt den folgenden Satz:

Satz 3.1 *Die Voraussetzungen V3.1 – V3.4 seien erfüllt. Dann gibt es zu jedem K_δ eine skalierende Funktion $\varrho(t)$ und Konstanten C^*, C_{evol}, so daß für jedes Paar (v,w), das V3.5 und die Bedingungen*

$$(x,t,v(x,t),w(x,t)) \in K_\delta \quad \forall (x,t) \in Q,$$

$$E_N(v)(t), E_N(w)(t) \le C^* \quad \forall N, t \in [0,T]$$

erfüllt, gilt:

Falls $u(x,t) \in C^1([0,T], C^\infty(P))$ eine P-periodische Lösung von (3.1) ist, gilt die Differentialungleichung vom Gronwallschen Typ

$$E_N(u)'(t) \le C_{evol} E_N(u)(t) + E_N(f)(t) \quad \forall N, t \in [0,T].$$

Dabei hängt C_{evol} nur von v_0, w_0, λ, δ und T, P ab, jedoch nicht von f oder u_0.

Den Beweis gliedern wir in mehrere Schritte.

3.1 Konstruktion von $\varrho(t), C^*, C_{evol}$

Wegen V3.3 gibt es positive Konstanten $C_\lambda = C_\lambda(K), M_\lambda = M_\lambda(K)$, so daß

$$|\partial_x^i \partial_v^n \partial_w^m \lambda(x,t,v,w)| \le C_\lambda M_\lambda^{i+n+m} \frac{i!^s (n!m!)^{s'}}{(i+2)^{ks}} \qquad \forall (x,t,v,w) \in K_\delta.$$

Wegen V3.4 existieren positive Konstanten C_0, M_0, so daß für v_0, w_0 gilt

$$\left\|\partial_x^i v_0\right\|_2, \left\|\partial_x^i w_0\right\|_2 \le C_0 M_0^i i!^s \qquad \forall i.$$

Wir wählen $\varrho_0 = \varrho(0)$, so daß $0 < \varrho_0 \le 1, \quad \varrho_0 M_0 \le \frac{1}{2}, \quad \varrho_0 M_\lambda \le \frac{1}{2}$.

Aus $\varrho_0 M_0 \le 1/2$ folgt, daß man $C^* < \infty$ so wählen kann, daß

$$C^* > 2 \sup_{N \ge 0} \{E_N(v)(0), E_N(w)(0)\}. \tag{3.2}$$

Falls das Supremum Null sein sollte, wählt man $C^* > 0$ beliebig. Wir wählen $\varrho(t) := \varrho_0 \exp(-C_\varrho t)$, dabei ist

$$C_\varrho := C_S + C_{1/2} \text{ mit } C_{1/2} := C_\lambda M_\lambda \left(1 + C_P C^*\right),$$
$$C_S := 2C_\lambda C_B \left(M_\lambda^2 + 2^s \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(C_P M_\lambda C^*\right)^\nu \nu!^{s'-s} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{8}{3}\right)^s \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(C_P M_\lambda C^*\right)^\nu (\nu+1)^{s+1} \nu!^{s'-s} \right)^2 \right).$$

Weiterhin setzen wir $C_{evol} := 3(C_S + C_{1/2})$.

3.2 Herleitung einer Abschätzung für $e_j(u)'(t)$

Die Funktionen v, w seien gemäß den Voraussetzungen des Satzes gegeben. Sei u eine P-periodische Lösung des Anfangswertproblems. Dann folgt:

$$e_j(t)e_j'(t) = \int_P \left(\partial_x^j u\right) \left(\partial_x^j u_t\right) dx$$
$$= \int_P \left(\partial_x^j u\right) \left(\partial_x^j f + \lambda \partial_x^{j+1} u + j\lambda_x \partial_x^j u + \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} \left(d_x^{j-i}\lambda\right) \partial_x^{i+1} u \right) dx.$$

Den zweiten Summanden der Klammer formen wir mit partieller Integration um. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt dann

$$e_j'(t) \leq e_j(f)(t) + |j - 1/2| \left\|\lambda_x\right\|_\infty e_j(u)(t) + \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} \left\| \left(d_x^{j-i}\lambda\right) \partial_x^{i+1} u \right\|_2. \tag{3.3}$$

Wir erhalten

$$|j - 1/2| \left\|\lambda_x\right\|_\infty \leq (j+1) C_\lambda M_\lambda \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{ks} + \frac{\|v_x\|_\infty}{2^{ks}} + \frac{\|w_x\|_\infty}{2^{ks}} \right)$$
$$\leq (j+1) C_\lambda M_\lambda \left(1 + \frac{2!^s C_P (\eta_v(2) + \eta_w(2))}{6^{ks} \varrho(t)^{2-k}} \right)$$
$$\leq (j+1) C_\lambda M_\lambda \left(1 + C_P C^*\right) = (j+1) C_{1/2}, \text{ denn } \frac{2!^s}{6^{ks}} \leq \frac{1}{2}.$$

Wir schätzen die Summe $\sum_{i=0}^{j-2} \ldots$ aus (3.3) wie folgt ab:

$$\sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} \left\| \left(d_x^{j-i}\lambda\right) \partial_x^{i+1} u \right\|_2 \leq S_1(j) + S_2(j) + S_3(j) := \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} \left\| \partial_x^{j-i} \lambda(x,t,v,w) \right\|_\infty e_{i+1}(u) +$$
$$+ C_P \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{4} \rfloor} \binom{j}{i} \left\| d_x^{j-i} \lambda(x,t,v(x,t),w(x,t)) \right\|_2 e_{i+2}(u) +$$
$$+ \sum_{i=\lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1}^{j-2} \binom{j}{i} \left\| d_x^{j-i} \lambda(x,t,v(x,t),w(x,t)) \right\|_\infty e_{i+1}(u).$$

Dabei wird in jedem Summanden von $S_2(j), S_3(j)$ jeweils mindestens einmal nach v oder w differenziert, in den Summanden von $S_1(j)$ treten solche Differentiationen nicht auf.

3.2.1 Abschätzung von $S_1(j)$

Mit H1, H3 folgt

$$\begin{aligned} S_1(j) &\le C_\lambda \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} \frac{M_\lambda^{j-i}(j-i)!^s}{(j-i+2)^{ks}} e_{i+1} = C_\lambda \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i} \frac{M_\lambda^{j-i}(j-i)!^s}{(j-i+2)^{ks}} \frac{\eta(i+1)(i+1)!^s}{\varrho(t)^{i+1-k}(i+2)^{ks}} \\ &\le C_\lambda j!^s \sum_{i=0}^{j-2} \binom{j}{i}^{1-s} (M_\lambda \varrho(t))^{j-i} \frac{\eta(i+1)(i+1)^s}{\varrho(t)^{j+1-k}(j+2)^{ks}} \\ &\le \frac{C_\lambda C_B j!^s}{(j+2)^{ks}\varrho(t)^{j+1-k}} \sum_{i=0}^{j-2} (M_\lambda \varrho(t))^{j-i} \eta(i+1)(i+1). \end{aligned}$$

3.2.2 Abschätzung von $S_3(j)$

Sei $\nu \ge 1, h_1 + \ldots + h_\nu = l, 1 \le h_\mu$. Mit H1, H2, H4 erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \frac{(\partial_x^{h_1} v) \ldots (\partial_x^{h_\nu} v)}{h_1! \ldots h_\nu!} \right\|_\infty &\le \frac{C_P^\nu e_{h_1+1} \ldots e_{h_\nu+1}}{h_1! \ldots h_\nu!} \\ &= \frac{C_P^\nu \eta(h_1+1) \ldots \eta(h_\nu+1)((h_1+1)! \ldots (h_\nu+1)!)^s}{\varrho(t)^{l+\nu(1-k)}((h_1+2) \ldots (h_\nu+2))^{ks} h_1! \ldots h_\nu!} \\ &= \frac{C_P^\nu \eta(h_1+1) \ldots \eta(h_\nu+1)(h_1! \ldots h_\nu!)^{s-1}((h_1+1) \ldots (h_\nu+1))^s}{\varrho(t)^{l+\nu(1-k)}((h_1+2) \ldots (h_\nu+2))^{ks}} \\ &\le \frac{C_P^\nu \eta(h_1+1) \ldots \eta(h_\nu+1) l!^{s-1} \nu!^{1-s}}{\varrho(t)^{l+1-k}(l+2)^{(k-1)s}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt (wegen $\nu_1 + \nu_2 > 0$ ist $l > 0$):

$$\begin{aligned} S_3(j) \le & \sum_{i=\lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1}^{j-2} e_{i+1} \binom{j}{i} \sum_{\substack{q+l=j-i,\\ l>0}} \frac{(j-i)!}{q!} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \frac{1}{\nu_1! \nu_2!} \left\| \lambda^{(q,0,\nu_1,\nu_2)}(x,t,v,w) \right\|_\infty \times \\ & \times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1\\ 1\le h_\mu}} \left\| \frac{\partial_x^{h_1} v \ldots \partial_x^{h_{\nu_1}} v}{h_1! \ldots h_{\nu_1}!} \right\|_\infty \right) \left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2\\ 1\le m_\mu}} \left\| \frac{\partial_x^{m_1} w \ldots \partial_x^{m_{\nu_2}} w}{m_1! \ldots m_{\nu_2}!} \right\|_\infty \right) \\ \le & \sum_{i=\lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1}^{j-2} \frac{\eta_u(i+1)(i+1)!^s}{(i+2)^{ks}\varrho(t)^{i+1-k}} \binom{j}{i} \sum_{\substack{q+l=j-i,\\ l>0}} \frac{(j-i)!}{q!} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \frac{C_\lambda M_\lambda^{q+\nu_1+\nu_2} q!^s}{(q+2)^{ks}(\nu_1!\nu_2!)^{1-s'}} \times \\ & \times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1\\ 1\le h_\mu}} \frac{C_P^{\nu_1} \eta_v(h_1+1) \ldots \eta_v(h_{\nu_1}+1) l_1!^{s-1} \nu_1!^{1-s}}{\varrho(t)^{l_1+1-k}(l_1+2)^{(k-1)s}} \right) \end{aligned}$$

$$\times\left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2\\1\le m_\mu}}\frac{C_P^{\nu_2}\eta_w(m_1+1)\ldots\eta_w(m_{\nu_2}+1)l_2!^{s-1}\nu_2!^{1-s}}{\varrho(t)^{l_2+1-k}(l_2+2)^{(k-1)s}}\right).$$

Mit H1, H3 erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\frac{(i+1)!^sj!(j-i)!q!^sl_1!^{s-1}\nu_1!^{1-s}l_2!^{s-1}\nu_2!^{1-s}}{i!(j-i)!q!(\nu_1!\nu_2!)^{1-s'}}\\
&=\frac{(i+1)^sj!(q!l_1!l_2!)^{s-1}}{i!^{1-s}(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}}\le\frac{(i+1)^sj!(j-i)!^{s-1}}{i!^{1-s}(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}}\le\frac{C_B(i+1)j!^s}{(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}},\\
&\frac{1}{(i+2)^{ks}(q+2)^{ks}((l_1+2)(l_2+2))^{(k-1)s}}\le\frac{1}{(i+2)^{ks}(q+2)^s(j-i+2)^{(k-1)s}}\\
&\le\frac{1}{(j+2)^{(k-1)s}(q+2)^s(i+2)^s}\le\frac{4^s}{(j+2)^{(k-1)s}(q+2)^s(j+2)^s}\le\frac{2^s}{(j+2)^{ks}}
\end{aligned}$$

und

$$\frac{1}{\varrho^{i+1-k}\varrho^{l_1+1-k}\varrho^{l_2+1-k}}\le\frac{1}{\varrho^{i+1-k}\varrho^{l+1-k}}=\frac{\varrho^q}{\varrho^{j+2-2k}}=\frac{\varrho^q}{\varrho^{j-k}},$$

also

$$\begin{aligned}
S_3(j)\le\frac{2^sC_\lambda C_Bj!^s}{\varrho(t)^{j-k}(j+2)^{ks}}&\sum_{i=\lfloor\frac{j}{4}\rfloor+1}^{j-2}\eta_u(i+1)(i+1)\sum_{\substack{q+l=j-i,\\l>0}}(M_\lambda\varrho(t))^q\sum_{l_1+l_2=l}\sum_{\nu_1=0}^{l_1}\sum_{\nu_2=0}^{l_2}\times\\
&\times\frac{(C_PM_\lambda)^{\nu_1+\nu_2}}{(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}}\left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1\\1\le h_\mu}}\eta_v(h_1+1)\ldots\eta_v(h_{\nu_1}+1)\right)\times\\
&\times\left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2\\1\le m_\mu}}\eta_w(m_1+1)\ldots\eta_w(m_{\nu_2}+1)\right).
\end{aligned}$$

3.2.3 Abschätzung von $S_2(j)$

Sei $\nu\ge1,h_1+\ldots+h_\nu=l,1\le h_\mu\le h_\nu$. Dann folgt mit H1, H2 und H4:

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{(\partial_x^{h_1}v)\ldots(\partial_x^{h_\nu}v)}{h_1!\ldots h_\nu!}\right\|_2\le\frac{C_P^{\nu-1}e_{h_1+1}\ldots e_{h_{\nu-1}+1}e_{h_\nu}}{h_1!\ldots h_\nu!}\\
&=\frac{C_P^{\nu-1}\eta(h_1+1)\ldots\eta(h_{\nu-1}+1)\eta(h_\nu)((h_1+1)!\ldots(h_{\nu-1}+1)!h_\nu!)^s}{\varrho(t)^{l+\nu(1-k)-1}((h_1+2)\ldots(h_{\nu-1}+2)(h_\nu+1))^{ks}h_1!\ldots h_\nu!}\\
&=\frac{C_P^{\nu-1}\eta(h_1+1)\ldots\eta(h_{\nu-1}+1)\eta(h_\nu)(h_1!\ldots h_\nu!)^{s-1}((h_1+1)\ldots(h_\nu+1))^s}{\varrho(t)^{l+\nu(1-k)-1}((h_1+2)\ldots(h_{\nu-1}+2)(h_\nu+1))^{ks}(h_\nu+1)^s}\\
&\le\frac{C_P^{\nu-1}\eta(h_1+1)\ldots\eta(h_{\nu-1}+1)\eta(h_\nu)l!^{s-1}\nu!^{1-s}}{\varrho(t)^{l-k}(l+1)^{(k-1)s}(h_\nu+1)^s}.
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$$S_2(j) \leq C_P \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{4} \rfloor} e_{i+2} \binom{j}{i} \sum_{\substack{q+l=j-i,\\ l>0}} \frac{(j-i)!}{q!} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \frac{1}{\nu_1!\nu_2!} \left\| \lambda^{(q,0,\nu_1,\nu_2)}(x,t,v,w) \right\|_\infty \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1\\ 1\leq h_\mu}} \left\| \frac{\partial_x^{h_1} v \ldots \partial_x^{h_{\nu_1}} v}{h_1! \ldots h_{\nu_1}!} \right\|_{2,\infty} \right) \left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2\\ 1\leq m_\mu}} \left\| \frac{\partial_x^{m_1} w \ldots \partial_x^{m_{\nu_2}} w}{m_1! \ldots m_{\nu_2}!} \right\|_{2,\infty} \right).$$

Die Schreibweise $\|.\|_{2,\infty}$ ist dabei so zu verstehen:

$$\begin{aligned} l_1 \geq l_2 &: (\textstyle\sum \|\ldots\|_2)(\sum \|\ldots\|_\infty), \\ l_1 < l_2 &: (\textstyle\sum \|\ldots\|_\infty)(\sum \|\ldots\|_2). \end{aligned}$$

Wir führen eine weitere Schreibweise ein:

$$\text{für } l_1 \geq l_2 \text{ sei } (l_<, l_>, \nu_<, \nu_>, \eta_<, \eta_>) := (l_2, l_1, \nu_2, \nu_1, \eta_w, \eta_v),$$
$$\text{und für } l_1 < l_2 \text{ sei } (l_<, l_>, \nu_<, \nu_>, \eta_<, \eta_>) := (l_1, l_2, \nu_1, \nu_2, \eta_v, \eta_w).$$

Daraus erhalten wir:

$$S_2(j) \leq C_P \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{4} \rfloor} \frac{\eta_u (i+2)(i+2)!^s}{(i+3)^{ks} \varrho^{i+2-k}} \binom{j}{i} \sum_{\substack{q+l=j-i,\\ l>0}} \frac{(j-i)!}{q!} \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \frac{C_\lambda M_\lambda^{q+\nu_1+\nu_2} q!^s}{(q+2)^{ks} (\nu_1!\nu_2!)^{1-s'}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_<}=l_<\\ 1\leq h_\mu}} \frac{C_P^{\nu_<} \eta_<(h_1+1) \ldots \eta_<(h_{\nu_<}+1) l_<!^{s-1} \nu_<!^{1-s}}{\varrho(t)^{l_<+1-k} (l_<+2)^{(k-1)s}} \right) \times$$

$$\times \nu_> \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_>}=l_>\\ 1\leq h_\mu \leq h_{\nu_>}}} \frac{C_P^{\nu_>-1} \eta_>(h_1+1) \ldots \eta_>(h_{\nu_>-1}+1) \eta_>(h_{\nu_>}) l_>!^{s-1} \nu_>!^{1-s}}{\varrho(t)^{l_>-k} (l_>+1)^{(k-1)s} (h_{\nu_>}+1)^s} \right).$$

Wir schätzen im Folgenden die rechte Seite ab und benutzen dabei H1 und H3:

$$\begin{aligned} &\frac{(i+2)!^s j!(j-i)! q!^s l_<!^{s-1} \nu_<!^{1-s} l_>!^{s-1} \nu_>!^{1-s}}{i!(j-i)!q!(\nu_1!\nu_2!)^{1-s'}} \\ &= \frac{(i+1)^s (i+2)^s j! (q! l_1! l_2!)^{s-1}}{i!^{1-s} (\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}} \leq \binom{j}{i}^{1-s} \frac{j!^s (i+1)^s (i+2)^s}{(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}} \leq \frac{j!^s C_B (i+1)(i+2)^s}{(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}}, \\ &\frac{\nu_>}{(i+3)^{ks} (q+2)^{ks} ((l_<+2)(l_>+1))^{(k-1)s} (h_{\nu_>}+1)^s} \\ &\leq \frac{\nu_> \nu_>^s}{(i+3)^{ks} (q+2)^{ks} (l+1)^{(k-1)s} (\nu_> h_{\nu_>}+1)^s} \leq \frac{2^s \nu_>^{s+1}}{(i+3)^{ks} (q+2)^{ks} (l+1)^{ks}} \\ &\leq \frac{2^s \nu_>^{s+1}}{(i+3)^{ks} (j-i+2)^{ks}} \leq \frac{2^s \nu_>^{s+1}}{(j+2)^{(k-1)s} (i+3)^s (j-i+2)^s} \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{8}{3}\right)^s \frac{\nu_>^{s+1}}{(j+2)^{(k-1)s}(i+3)^s(j+2)^s} \leq \left(\frac{8}{3}\right)^s \frac{(\nu_>+1)^{s+1}}{(j+2)^{ks}(i+2)^s},$$
$$\frac{1}{\varrho^{i+2-k}\varrho^{l_<+1-k}\varrho^{l_>-k}} \leq \frac{1}{\varrho^{i+2-k+l-k}} = \frac{\varrho^q}{\varrho^{j-k}}.$$

Daraus folgt

$$S_2(j) \leq \frac{8^s C_\lambda C_B j!^s}{3^s \varrho(t)^{j-k}(j+2)^{ks}} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{j}{4} \rfloor} \eta_u(i+2)(i+1) \sum_{\substack{q+l=j-i\\ l>0}} (M_\lambda \varrho(t))^q \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \times$$
$$\times \frac{(M_\lambda C_P)^{\nu_1+\nu_2}(\nu_>+1)^{s+1}}{(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}} \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_<}=l_<\\ 1\leq h_\mu}} \eta_<(h_1+1)\ldots\eta_<(h_{\nu_<}+1) \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_>}=l_>\\ 1\leq h_\mu \leq h_{\nu_>}}} \eta_>(h_1+1)\ldots\eta_>(h_{\nu_>-1}+1)\eta_>(h_{\nu_>}) \right).$$

3.3 Abschätzung von $E_N(u)'(t)$

Es ist

$$E_N'(t) = \sum_{j=0}^N \eta(j) \frac{(j-k)\varrho'(t)}{\varrho(t)} + \sum_{j=0}^N \frac{e_j'(t)\varrho(t)^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s}$$
$$\leq \sum_{j=0}^N \eta(j) \frac{(j-k)\varrho'(t)}{\varrho(t)} + E_N(f)(t) + \sum_{j=0}^N |j-1/2| \, \|\lambda_x\|_\infty \eta(j) +$$
$$+ \sum_{j=2}^N \frac{\varrho(t)^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s} (S_1(j)+S_2(j)+S_3(j)).$$

Wir wissen $\sum_{j=0}^N |j-1/2| \, \|\lambda_x\|_\infty \eta(j) \leq C_{1/2} \sum_{j=0}^N (j+1)\eta(j)$, wegen $M_\lambda \varrho_0 \leq 1/2$ ist

$$\sum_{j=2}^N \frac{\varrho(t)^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s} S_1(j) \leq C_\lambda C_B \varrho(t)^{-1} \sum_{j=2}^N \sum_{i=0}^{j-2} (M_\lambda \varrho(t))^{j-i} \eta(i+1)(i+1) =$$
$$= C_\lambda C_B \varrho(t)^{-1} \sum_{i=0}^{N-2} \eta(i+1)(i+1) \sum_{j=i+2}^N (M_\lambda \varrho(t))^{j-i} \leq 2C_\lambda C_B M_\lambda^2 \varrho(t) \sum_{i=0}^{N-2} \eta(i+1)(i+1),$$

$$\sum_{j=2}^N \frac{\varrho(t)^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s} S_3(j) \leq$$
$$\leq 2^s C_\lambda C_B \sum_{j=2}^N \sum_{i=\lfloor \frac{j}{4} \rfloor+1}^{j-2} \eta_u(i+1)(i+1) \sum_{\substack{q+l=j-i,\\ l>0}} (M_\lambda \varrho(t))^q \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \frac{(C_P M_\lambda)^{\nu_1+\nu_2}}{(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}} \times$$

$$\times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1 \\ 1\le h_\mu}} \eta_v(h_1+1)\ldots\eta_v(h_{\nu_1}+1) \right) \left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2 \\ 1\le m_\mu}} \eta_w(m_1+1)\ldots\eta_w(m_{\nu_2}+1) \right).$$

Man beachte bei den folgenden Umformungen $i \geq 1$. Daraus folgt $l < j$, also ist $l_1 \leq N-1$, $l_2 \leq N-1$, $h_\mu + 1 \leq N$ und $m_\mu + 1 \leq N$. Die obige Summe ist dann wegen $M_\lambda \varrho_0 \leq 1/2$ und Lemma 3 kleiner gleich

$$\begin{aligned}
& 2^s C_\lambda C_B \sum_{i=1}^{N-2} \eta(i+1)(i+1) \sum_{j=i+2}^{N} \sum_{\substack{q+l=j-i, \\ l>0}} \left(\frac{1}{2}\right)^q \sum_{l_1+l_2=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \frac{(C_P M_\lambda)^{\nu_1+\nu_2}}{(\nu_1!\nu_2!)^{s-s'}} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1 \\ 1\le h_\mu}} \eta_v(h_1+1)\ldots\eta_v(h_{\nu_1}+1) \right) \left(\sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2 \\ 1\le m_\mu}} \eta_w(m_1+1)\ldots\eta_w(m_{\nu_2}+1) \right) \\
\leq\ & 2^s C_\lambda C_B \sum_{i=1}^{N-2} \eta(i+1)(i+1) \sum_{q=0}^{N-i-1} \frac{1}{2^q} \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{l_2=0}^{N-1} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{\nu_1=0}^{l_1} (C_P M_\lambda)^{\nu_1} \nu_1!^{s-s'} \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1 \\ 1\le h_\mu}} \eta_v(h_1+1)\ldots\eta_v(h_{\nu_1}+1) \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{\nu_2=0}^{l_2} (C_P M_\lambda)^{\nu_2} \nu_2!^{s-s'} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2 \\ 1\le m_\mu}} \eta_w(m_1+1)\ldots\eta_w(m_{\nu_2}+1) \right) \\
\leq\ & 2^s C_\lambda C_B \sum_{i=1}^{N-2} \eta(i+1)(i+1) \sum_{q=0}^{N-i-1} \frac{1}{2^q} \times \\
& \quad \times \left(\sum_{\nu_1=0}^{N-1} (C_P M_\lambda)^{\nu_1} \nu_1!^{s-s'} \sum_{l_1=\nu_1}^{N-1} \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1 \\ 1\le h_\mu}} \eta_v(h_1+1)\ldots\eta_v(h_{\nu_1}+1) \right) \times \\
& \quad \times \left(\sum_{\nu_2=0}^{N-1} (C_P M_\lambda)^{\nu_2} \nu_2!^{s-s'} \sum_{l_2=\nu_2}^{N-1} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2 \\ 1\le m_\mu}} \eta_w(m_1+1)\ldots\eta_w(m_{\nu_2}+1) \right) \\
\leq\ & 2^s C_\lambda C_B \sum_{i=1}^{N-2} \eta(i+1)(i+1) \sum_{q=0}^{N-i-1} \frac{1}{2^q} \left(\sum_{\nu_1=0}^{N-1} (C_P M_\lambda E_N(v)(t))^{\nu_1} \nu_1!^{s'-s} \right) \times \\
& \quad \times \left(\sum_{\nu_2=0}^{N-1} (C_P M_\lambda E_N(w)(t))^{\nu_2} \nu_2!^{s'-s} \right) \\
\leq\ & 2^{s+1} C_\lambda C_B \sum_{i=1}^{N-2} \eta(i+1)(i+1) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (C_P M_\lambda C^*)^\nu \nu!^{s'-s} \right)^2.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man:

$$\sum_{j=2}^{N} \frac{\varrho(t)^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s} S_2(j)$$
$$\leq 2C_\lambda C_B \left(\frac{8}{3}\right)^s \sum_{i=0}^{N-2} \eta(i+2)(i+2) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} (C_P M_\lambda C^*)^\nu (\nu+1)^{s+1} \nu!^{s'-s}\right)^2 .$$

Bei der Herleitung ist dabei zu beachten, daß für $N > 2$ folgt: $i+2 \leq j/4+2 \leq N/4+2 \leq N$ und für $N = 2 : j = 2$, also $i = 0$ und somit $i+2 \leq N$.

Insgesamt erhalten wir damit:

$$\sum_{j=2}^{N} \frac{\varrho(t)^{j-k}(j+1)^{ks}}{j!^s} (S_1(j) + S_2(j) + S_3(j)) \leq C_S \sum_{i=1}^{N} \eta(i) i.$$

Damit folgt

$$E_N'(t) \leq \sum_{j=1}^{N} \eta(j) \left(\frac{(j-k)\varrho'(t)}{\varrho(t)} + jC_S\right) + \eta(0) \left(-k\frac{\varrho'(t)}{\varrho(t)}\right) + E_N(f)(t) + C_{1/2} \sum_{j=0}^{N} (j+1)\eta(j)$$
$$\leq \sum_{j=0}^{N} \eta(j) \left(\frac{(j-k)\varrho'(t)}{\varrho(t)} + (j+1)(C_S + C_{1/2})\right) + E_N(f)(t).$$

Wegen $\varrho'(t)/\varrho(t) = -C_\varrho = -(C_S + C_{1/2})$ erhalten wir

$$\left(\frac{(j-k)\varrho'(t)}{\varrho(t)} + (j+1)(C_S + C_{1/2})\right) = (C_S + C_{1/2})(k+1) = C_{evol}.$$

Das führt zur gewünschten Differentialungleichung vom Gronwallschen Typ

$$E_N'(t) \leq C_{evol} E_N(t) + E_N(f)(t) \qquad \forall N \geq 0, t \in [0,T], \tag{3.4}$$

wobei C_{evol} tatsächlich nur von v_0, w_0, λ, δ und T, P abhängt. Damit ist Satz 3.1 bewiesen.

Bemerkung 3.1 *Bei genauerer Betrachtung der Rechnungen stellt man fest, daß λ auch von $n > 2$ Funktionen abhängen darf. Die Umformungen müssen nur sinngemäß abgeändert werden. Dabei ist vor allem zu beachten, daß die Trennung der Summationen von $S_2(j)$ und $S_3(j)$ nicht an der Stelle $\lfloor \frac{j}{4} \rfloor$, sondern bei $\lfloor \frac{j}{2n} \rfloor$ erfolgen sollte.*

Bemerkung 3.2 *Die Funktion λ muß nicht für alle $(v,w) \in R^2$ definiert sein. Insbesondere genügt es, wenn λ nur in K_δ definiert ist.*

Bemerkung 3.3 *Wenn $\lambda = \lambda(x,t) \in C([0,T], C^1(P))$ und $u \in C^1([0,T], C^1(P))$ eine periodische Lösung ist, dann ist $E_N(u)$ nur für $N = 0$ und $N = 1$ definiert und Ungleichung (3.4) gilt mit $N = 0$.*

4 Spezielle lineare schwach hyperbolische Gleichungen

Wir untersuchen zu gegebenem $\vec{v} = \vec{v}(x,t)$ das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} &u_{tt} + \sigma(x)b(x,t,\vec{v}(x,t))u_{xt} - \sigma^2(x)a(x,t,\vec{v}(x,t))u_{xx} \\ &\quad = f(x,t,\vec{v}(x,t),\vec{v}_t(x,t),\sigma(x)\vec{v}_x(x,t)) \quad \forall (x,t) \in Q, \\ &\quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in P \end{aligned} \tag{4.1}$$

unter den Voraussetzungen

V4.1 $\sigma, b, a, f, u_0, u_1, v_{i0}, v_{i1}$ sind vorgegebene in x P-periodische Funktionen,

V4.2 $\sigma, u_0, u_1, v_{i0}, v_{i1} \in Y^s_{+0}(P)$,

V4.3 $b, a \in C^1([0,T], X^{(s,s',\ldots,s')}_{loc}(P \times R^n_v)), \quad 1 \leq s' < s$,

V4.4 $f \in C([0,T], X^{(s,s',\ldots,s')}_{loc}(P \times R^{3n}))$,

V4.5 es gibt $\delta > 0, \gamma > 0$, so daß mit

$$K_{\delta,0} := \{(x,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) : x \in P, |\varphi_i - v_{i0}(x)| \leq \delta\}, \quad K_\delta := K_{\delta,0} \times [0,T]$$

gilt:

$$b^2(x,t,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) + 4a(x,t,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \geq \gamma \quad \forall (x,t,\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \in K_\delta,$$

V4.6 $v_i \in C^1([0,T], Y^s_{+0}(P)), \quad v_i$ P-periodisch und $v_i(x,0) = v_{i0}(x), \quad v_{i,t}(x,0) = v_{i1}(x)$, $(x,t,\vec{v}(x,t),\vec{v}_t(x,t),\sigma(x)\vec{v}_x(x,t)) \in K_{f,\delta} \quad \forall (x,t) \in Q$, wobei

$$K_{f,\delta} := \{(x,t,\vec{\varphi},\vec{\psi},\vec{\eta}) : (x,t,\vec{\varphi}) \in K_\delta, |\psi_i - v_{i1}(x)| \leq \delta, |\eta_i - \sigma(x)v_{i0,x}(x)| \leq \delta\}.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(x,t,\vec{\varphi}) &:= \frac{1}{2}\sigma(x)\left(-b(x,t,\vec{\varphi}) \pm \sqrt{b^2(x,t,\vec{\varphi}) + 4a(x,t,\vec{\varphi})}\right) = \sigma(x)\beta_{1,2}(x,t,\vec{\varphi}), \\ \partial_i &:= \partial_i^{(v)} := \partial_t - \lambda_i(x,t,\vec{v}(x,t))\partial_x \end{aligned}$$

und definieren die Energie $\mathcal{E}^{(v)}_N(u)(t) := E_N(u)(t) + E_N(\partial_1^{(v)}u)(t) + E_N(\partial_2^{(v)}u)(t)$. Es gilt folgendes Lemma:

Lemma 4 *Sei $E_N(v_i)(t) \leq C_1 \quad \forall N, i, t \in [0,T]$. Wir setzen weiterhin voraus, daß für Funktionen v_i mit dieser Eigenschaft $E_N(\beta_i)(t), E_N(1/(\beta_2 - \beta_1))(t) \leq C_2 \quad \forall N, i, t \in [0,T]$ erfüllt sei. Dann gibt es Konstanten C^I_β, C^{II}_β, so daß für alle $u \in C^1([0,T], Y^s_{+0}(P))$ gilt*

$$E_N(u_t)(t) \leq C^I_\beta \mathcal{E}^{(v)}_N(u)(t) \quad \forall N, t \in [0,T],$$

$$E_N(\sigma u_x)(t) \leq C^{II}_\beta \mathcal{E}^{(v)}_N(u)(t) \quad \forall N, t \in [0,T].$$

Beweis Es gilt

$$\partial_x = \frac{\partial_1 - \partial_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \tag{4.2}$$

$$\partial_t = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\partial_1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\partial_2. \tag{4.3}$$

Damit folgt

$$E_N(u_t) \le C_{prod} E_N\left(\frac{\beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\right) E_N(\partial_1 u) + C_{prod} E_N\left(\frac{\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right) E_N(\partial_2 u).$$

Mit $C_\beta^I := C_{prod}^2 C_2^2$ folgt die Behauptung. Den zweiten Teil des Lemmas beweist man analog, wobei $C_\beta^{II} := C_{prod} C_2$.

Mit diesen Beziehungen beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 4.1 *Die Voraussetzungen V4.1 – V4.5 seien erfüllt. Dann gibt es eine skalierende Funktion $\varrho(t)$ und Konstanten $C^{**} > 0$, $0 < T^* \le T$, so daß (falls $v_i(x,t)$ die Bedingung V4.6 und die Ungleichungen $\mathcal{E}_N^{(v)}(v_i)(t) \le C^{**} \quad \forall N, t \in [0, T^*]$ erfüllen) für jede periodische Lösung $u(x,t)$ von (4.1) gilt:*

$$\mathcal{E}_N^{(v)}(u)(t) \le \frac{1}{2} C^{**} \quad \forall N, t \in [0, T^*].$$

4.1 Vorbereitende Überlegungen für den Beweis

Es ist

$$\partial_1 \partial_2 u = u_{tt} + \sigma(x) b(x,t,\vec{v}) u_{xt} - \sigma^2(x) a(x,t,\vec{v}) u_{xx} + \left(\lambda_1(x,t,\vec{v})\lambda_{2x}(x,t,\vec{v}) - \lambda_{2t}(x,t,\vec{v})\right) u_x.$$

Die Differentialgleichung kann also umgeformt werden zu

$$\left(\partial_1\partial_2 + A_1\partial_1 + A_2\partial_2\right) u = f(x,t,\vec{v},\vec{v}_t,\sigma\vec{v}_x) \text{ mit } A_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_{2t} - \lambda_1\lambda_{2x}\right), \quad A_2 = -A_1.$$

An einer späteren Stelle des Beweises verwenden wir eine Funktion A_3, sie ist definiert durch

$$A_3 := \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2\lambda_{1x} - \lambda_1\lambda_{2x} + \lambda_{2t} - \lambda_{1t}\right) \text{ und erfüllt } [\partial_2, \partial_1]u = A_3(\partial_1 - \partial_2)u.$$

Die Funktionen A_i sind Gevrey–Funktionen in x, $\vec{v}$, $\vec{v}_t$, $\sigma\vec{v}_x$. Hierfür ist wesentlich, daß σ nicht von t abhängt.

Das heißt, es existieren C_A, M_A mit

$$|\partial_x^j \partial_{\vec{\varphi}}^{\vec{l}} \partial_{\vec{\psi}}^{\vec{m}} \partial_{\vec{\eta}}^{\vec{k}} A_i(x,t,\vec{\varphi},\vec{\psi},\vec{\eta})| \le C_A M_A^{j+|\vec{l}|+|\vec{m}|+|\vec{k}|} \frac{j!^s (\vec{l}!\vec{m}!\vec{k}!)^{s'}}{(j+2)^{ks}} \quad \forall (x,t,\vec{\varphi},\vec{\psi},\vec{\eta}) \in K_{f,\delta}.$$

Hierbei sind $\vec{l} = (l_1,\ldots,l_n)$, $\vec{m} = (m_1,\ldots,m_n)$, $\vec{k} = (k_1,\ldots,k_n)$ Multiindizes und es gilt $|\vec{l}| = l_1 + \ldots + l_n$ und $\vec{l}! = l_1! \cdot \ldots \cdot l_n!$ (für die anderen Multiindizes entsprechend). Weil die Wurzelfunktion in $[\gamma, \infty)$ analytisch ist, folgt mit Lemma 2 $\lambda_1, \lambda_2 \in C^1([0,T], X_{loc}^{(s,s',\ldots,s')}(K_{\delta,0}))$, also gibt es C_λ, M_λ, so daß

$$|\partial_x^j \partial_{\vec{\varphi}}^{\vec{l}} \lambda_i(x,t,\vec{\varphi})| \le C_\lambda M_\lambda^{j+|\vec{l}|} \frac{j!^s \vec{l}!^{s'}}{(j+2)^{ks}} \quad \forall (x,t,\vec{\varphi}) \in K_\delta,$$

$$|\partial_x^j \partial_{\vec{\varphi}}^{\vec{l}} \partial_{\varphi_k} \lambda_i(x,t,\vec{\varphi})| \le C_\lambda M_\lambda^{j+|\vec{l}|} \frac{j!^s \vec{l}!^{s'}}{(j+2)^{ks}} \quad \forall (x,t,\vec{\varphi}) \in K_\delta, \quad \forall k = 1,\dots,n.$$

Dieselben Abschätzungen mögen gelten, wenn man λ_i durch λ_{it} ersetzt. Weiterhin verlangen wir, daß ähnliche Ungleichungen gelten für β_1, β_2 mit Konstanten C_β, M_β. In diese Abschätzungen sei auch $1/(\beta_2 - \beta_1)$ einbezogen. Wir wählen C_f und M_f so, daß

$$|\partial_x^j \partial_{\vec{\varphi}}^{\vec{l}} \partial_{\vec{\psi}}^{\vec{m}} \partial_{\vec{\eta}}^{\vec{k}} f(x,t,\vec{\varphi},\vec{\psi},\vec{\eta})| \le C_f M_f^{j+|\vec{l}|+|\vec{m}|+|\vec{k}|} \frac{j!^s (\vec{l}!\vec{m}!\vec{k}!)^{s'}}{(j+2)^{ks}} \quad \forall (x,t,\vec{\varphi},\vec{\psi},\vec{\eta}) \in K_{f,\delta}.$$

Wegen V4.2 gibt es Konstanten C_0, M_0, so daß

$$\left\|\partial_x^i \sigma\right\|_2, \left\|\partial_x^i u_0\right\|_2, \left\|\partial_x^i u_1\right\|_2, \left\|\partial_x^{i+1} u_0\right\|_2, \left\|\partial_x^i v_{i0}\right\|_2, \left\|\partial_x^i v_{i1}\right\|_2, \left\|\partial_x^{i+1} v_{i0}\right\|_2 \le C_0 M_0^i i!^s.$$

4.2 Beweis des Satzes

4.2.1 Konstruktion von $\varrho(t), C^{**}, T^*$

Nun legen wir die Funktion $\varrho(t)$ fest: Wir wählen ϱ_0 so, daß

$$0 < \varrho_0 \le 1, \quad \varrho_0 M_\lambda \le \frac{1}{2}, \quad \varrho_0 M_\beta \le \frac{1}{2}, \quad \varrho_0 M_A \le \frac{1}{2}, \quad \varrho_0 M_f \le \frac{1}{2}, \quad \varrho_0 M_0 \le \frac{1}{2}.$$

Wir setzen $C^{**} := 3 \max_{1 \le i \le n} \sup_{N \ge 0} \{\mathcal{E}_N^{(v)}(u)(0), \mathcal{E}_N^{(v)}(v_i)(0)\}$. Falls sich dabei der Wert 0 ergeben sollte, wählt man $C^{**} > 0$ beliebig.

Dieses C^{**} erfüllt die Voraussetzung (3.2) an C^* aus Abschnitt 3 (die Funktionen $v_1, \dots, v_n$ übernehmen die Rollen von v, w aus Abschnitt 3, vgl. Bemerkung 3.1). Wir können also analog zum Satz 3.1 die Konstanten C_ϱ, C_{evol} und die skalierende Funktion $\varrho(t) = \varrho_0 \exp(-C_\varrho t)$ wählen.

Die Funktionen $v_i(x,t)$ seien gemäß den Voraussetzungen des Satzes gegeben. Weil $\mathcal{E}_N^{(v)}(v_i)(t) \le C^{**} \quad \forall N$, können wir (man vergleiche Lemma 2 und Lemma 4) gleichmäßig für jedes N und unabhängig von $\vec{v}$ die Energien $E_N(A_i(x,t,\vec{v},\vec{v}_t,\sigma\vec{v}_x))$, $E_N(f(x,t,\vec{v},\vec{v}_t,\sigma\vec{v}_x))$ abschätzen durch Konstanten $C_A^* = C_A^*(C^{**})$, $C_f^* = C_f^*(C^{**})$.

Nun wird T^* festgelegt. Sei $C_G := 3C_{prod}C_A^* + C_{evol} + 1$. Die positive Konstante $T^* \le T$ wird so gewählt, daß

$$\frac{1}{3} C^{**} e^{C_G t} + 2 \int_0^t e^{C_G(t-\tau)} C_f^* \, d\tau \le \frac{1}{2} C^{**} \quad \forall t \in [0, T^*].$$

4.2.2 Herleitung der Energieabschätzung für u

Wir nehmen an, daß es eine periodische Lösung $u(x,t)$ von (4.1) gibt. Nun wollen wir Energieabschätzungen für u herleiten. Es ist $\partial_1 \partial_2 u = \partial_1 \partial_2 u$, daraus folgt mit Satz 3.1

$$\begin{aligned} E_N(\partial_2 u)'(t) &\le E_N(\partial_1 \partial_2 u)(t) + C_{evol} E_N(\partial_2 u)(t) \\ &\le E_N(f)(t) + E_N(A_1 \partial_1 u)(t) + E_N(A_2 \partial_2 u)(t) + C_{evol} E_N(\partial_2 u)(t) \\ &\le E_N(f)(t) + C_{prod} C_A^* \left(E_N(\partial_1 u)(t) + E_N(\partial_2 u)(t)\right) + C_{evol} E_N(\partial_2 u)(t). \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$E_N(\partial_2\partial_1 u) \le E_N(\partial_1\partial_2 u) + E_N([\partial_2,\partial_1]u) \le E_N(\partial_1\partial_2 u) + E_N(A_3\partial_1 u) + E_N(A_3\partial_2 u).$$

Daraus folgt mit $\partial_2\partial_1 u = \partial_2\partial_1 u$

$$\begin{aligned} E_N(\partial_1 u)'(t) &\le E_N(\partial_2\partial_1 u)(t) + C_{evol}E_N(\partial_1 u)(t) \\ &\le E_N(\partial_1\partial_2 u)(t) + E_N(A_3\partial_1 u)(t) + E_N(A_3\partial_2 u)(t) + C_{evol}E_N(\partial_1 u)(t) \\ &\le E_N(f)(t) + 2C_{prod}C_A^* \left(E_N(\partial_1 u)(t) + E_N(\partial_2 u)(t)\right) + C_{evol}E_N(\partial_1 u)(t). \end{aligned}$$

Aus $\partial_1 u = \partial_1 u$ erhalten wir $E_N(u)'(t) \le E_N(\partial_1 u)(t) + C_{evol}E_N(u)(t)$.
Das ergibt zusammen

$$\mathcal{E}_N^{(v)}(u)'(t) \le 2E_N(f)(t) + C_G\mathcal{E}_N^{(v)}(u)(t). \tag{4.4}$$

Nach Anwendung des Gronwallschen Lemmas ergibt sich

$$\mathcal{E}_N^{(v)}(u)(t) \le \frac{1}{3}C^{**}e^{C_G t} + 2\int_0^t e^{C_G(t-\tau)}E_N(f)(\tau)d\tau \le \frac{1}{2}C^{**} \quad \forall N, t \in [0,T^*].$$

Bemerkung 4.1 *Dieser Satz wird im folgenden Abschnitt verwendet werden. Die Voraussetzungen V4.1–V4.6 werden durch die entsprechenden Voraussetzungen V5.1–V5.6 garantiert.*

Bemerkung 4.2 *Wenn* $a = a(x,t) \in C^1([0,T],C^1(P))$, $b = b(x,t) \in C^1([0,T],C^1(P))$, $f = f(x,t) \in C([0,T],C^1(P))$ *gilt und* $u \in C^2([0,T],C^2(P))$ *eine periodische Lösung ist, dann gilt wegen Bemerkung 3.3 die Ungleichung (4.4) mit* $N = 0$.

5 Spezielle quasilineare Systeme schwach hyperbolischer Differentialgleichungen

Wir betrachten das schwach hyperbolische Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_{i,tt} + \sigma(x)b(x,t,\vec{u}(x,t))u_{i,xt} - \sigma^2(x)a(x,t,\vec{u}(x,t))u_{i,xx} & \\ = f_i(x,t,\vec{u}(x,t),\vec{u}_t(x,t),\sigma(x)\vec{u}_x(x,t)) & \quad \forall (x,t) \in Q, i = 1,\dots,n, \\ u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad u_{i,t}(x,0) = u_{i1}(x) & \quad \forall x \in P. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dabei setzen wir voraus:

V5.1 $\sigma, b, a, f_i, u_{i0}, u_{i1}$ sind P-periodisch in x,

V5.2 $\sigma, u_{i0}, u_{i1} \in Y_{+0}^s(P)$,

V5.3 $b, a \in C^1([0,T], X_{loc}^{(s,s',\dots,s')}(P \times R_u^n))$,

V5.4 $f_i \in C([0,T], X_{loc}^{(s,s',\dots,s')}(P \times R^{3n}))$,

V5.5 $b^2(x,t,\vec{\varphi}) + 4a(x,t,\vec{\varphi}) \ge \gamma > 0 \quad \forall (x,t,\vec{\varphi}) \in K_\delta$.

Analog zu Abschnitt 4 definieren wir $K_{f,\delta} := \{(x,t,\vec{\varphi},\vec{\psi},\vec{\eta}) : (x,t) \in Q, |\varphi_i - u_{i,0}(x)| \leq \delta, |\psi_i - u_{i1}(x)| \leq \delta, |\eta_i - \sigma(x)u_{i0,x}(x)| \leq \delta\}$.

Die Untersuchung von (5.1) führen wir auf die Untersuchung linearer Hilfsprobleme zurück. Als Hilfsproblem betrachten wir mit einem beliebigen $\vec{v}(x,t)$

$$\begin{aligned} u_{i,tt} + \sigma(x)b(x,t,\vec{v}(x,t))u_{i,xt} - \sigma^2(x)a(x,t,\vec{v}(x,t))u_{i,xx} \\ = f_i(x,t,\vec{v}(x,t),\vec{v}_t(x,t),\sigma(x)\vec{v}_x(x,t)) \quad \forall(x,t) \in Q, i = 1,\ldots,n, \\ u_i(x,0) = u_{i0}(x), \quad u_{i,t}(x,0) = u_{i1}(x) \quad \forall x \in P \end{aligned} \tag{5.2}$$

unter den Voraussetzungen

V5.6 $v_i \in C^1([0,T], Y^s_{+0}(P))$, $\quad v_i$ P-periodisch und $v_i(x,0) = u_{i0}(x)$, $\quad v_{it}(x,0) = u_{i1}(x)$, $(x,t,\vec{v}(x,t),\vec{v}_t(x,t),\sigma(x)\vec{v}_x(x,t)) \in K_{f,\delta} \quad \forall(x,t) \in Q$.

Als Energie definieren wir $\mathcal{E}^{(v)}_N(\vec{u})(t) := \max_{1\leq i\leq n} \mathcal{E}^{(v)}_N(u_i)(t)$. Wir beweisen folgenden Satz:

Satz 5.1 *Die Voraussetzungen V5.1 – V5.5 seien erfüllt. Dann gibt es eine skalierende Funktion $\varrho(t)$ und Konstanten $C > 0$, $0 < T^* \leq T$, so daß (falls $\vec{v}(x,t)$ die Bedingung V5.6 und die Ungleichungen $\mathcal{E}^{(v)}_N(\vec{v})(t) \leq C \quad \forall N, t \in [0,T^*]$ erfüllt) für jede periodische Lösung $\vec{u}(x,t)$ von (5.2) gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(u)}_N(\vec{u})(t) \leq \frac{2}{3}C \qquad \forall N, t \in [0,T^*], \\ (x,t,\vec{u}(x,t),\vec{u}_t(x,t),\sigma(x)\vec{u}_x(x,t)) \in K_{f,\delta} \qquad \forall(x,t) \in Q^* := P \times [0,T^*]. \end{aligned}$$

Beweis Wir wählen ϱ_0 wie im vorigen Abschnitt angegeben. Wir setzen $C := 3\sup_{N\geq 0} \mathcal{E}^{(v)}_N(\vec{v})(0) = 3\sup_{N\geq 0} \mathcal{E}^{(u)}_N(\vec{u})(0)$. Nach Satz 4.1 erhalten wir, daß es ein positives $T_1 \leq T$ gibt, so daß (falls $\mathcal{E}^{(v)}_N(\vec{v})(t) \leq C \quad \forall N, t \in [0,T_1]$ und $(x,t,\vec{v}(x,t),\vec{v}_t(x,t),\sigma(x)\vec{v}_x(x,t)) \in K_{f,\delta} \quad \forall(x,t) \in P \times [0,T_1]$) für jede periodische Lösung von (5.2_i) gilt:

$$\mathcal{E}^{(v)}_N(u_i)(t) \leq \frac{1}{2}C \quad \forall N, t \in [0,T_1].$$

Es bleibt zu zeigen, daß ein positives $T^* \leq T_1$ existiert, so daß $\mathcal{E}^{(u)}_N(\vec{u})(t) \leq \frac{2}{3}C \quad \forall N, t \in [0,T^*]$ und $(x,t,\vec{u}(x,t),\vec{u}_t(x,t),\sigma(x)\vec{u}_x(x,t)) \in K_{f,\delta} \quad \forall(x,t) \in Q^*$.

Wegen $E_N(v_i)(t) \leq C \quad \forall N$ und Lemma 2 sind für jedes N die Energien $E_N(\beta_i(x,t,\vec{v}))$, $E_N(\beta_{i,t}(x,t,\vec{v}))$, $E_N(\beta_{i,v_j}(x,t,\vec{v}))$ kleiner als eine feste Konstante $C^*_\beta = C^*_\beta(C)$. Dabei ist $i = 1,2$, $j = 1,\ldots,n$ (mit $\beta_{i,t}$ ist nicht die totale Ableitung nach t gemeint, sondern die partielle).

Wir wählen $0 < T_2 \leq T$ so klein, daß mit $C_\alpha := 2C^*_\beta + 2nC_{prod}C^*_\beta C^I_\beta C$ gilt:

$$\int_0^t e^{C_{evol}(t-\tau)}C_\alpha \, d\tau \leq \frac{1}{6C_{prod}C^{II}_\beta} \quad \forall t \in [0,T_2].$$

Wir setzen $C_\sigma = \|\sigma\|_\infty$, $C_a = \max_{K_\delta}|a|$, $C_b = \max_{K_\delta}|b|$, $C_f = \max_{K_{f,\delta}}|f|$ und wählen $T_3 := \frac{\delta}{C_P C^I_\beta C}$, $T_4 := \frac{2\delta}{C_P C^I_\beta C C_\sigma}$, $T_5 := \frac{\varrho_0\delta}{C_f + C_P C^I_\beta C C_\sigma C_b + C^2_\sigma C_a C_P C}$, wählen $T_6 > 0$ so, daß $\varrho_0 > \varrho(T_6) \geq \varrho_0/2$ und setzen $T^* := \min\{T_2,T_3,T_4,T_5,T_6\}$.

Aus $\mathcal{E}_N^{(v)}(\vec{u}) \le C/2$ und Lemma 4 folgt $E_N(u_{i,t}) \le C_\beta^I C/2$ und $E_N(u_i) \le C/2$. Daraus folgern wir $\|u_{i,t}\|_2 \le C_\beta^I C/2, \quad \|u_{i,tx}\|_2 \le C_\beta^I C/2, \quad \|u_{i,txx}\|_2 \le C_\beta^I C/2, \quad \|u_{i,xxx}\|_2 \le C/\varrho_0$ und somit $\quad \|u_{i,t}\|_\infty \le C_P C_\beta^I C, \quad \|u_{i,tx}\|_\infty \le C_P C_\beta^I C/2, \quad \|u_{i,xx}\|_\infty \le C_P C/\varrho_0$.

Dann gilt für $t \le T^*$ $|u_i(x,t) - u_{i0}(x)| \le \delta$ und $|\sigma(x)u_{i,x}(x,t) - \sigma(x)u_{i0,x}(x)| \le \delta$.

Aus der Differentialgleichung entnehmen wir $\|u_{i,tt}\|_\infty \le C_f + C_\sigma C_b C_P C_\beta^I C/2 + C_\sigma^2 C_a C_P C/\varrho_0$. Durch die Wahl von T^* ist gesichert, daß $|u_{i,t}(x,t) - u_{i1}(x)| \le \delta$, falls $t \le T^*$.

Also ist $(x,t,\vec{u}(x,t),\vec{u}_t(x,t),\sigma(x)\vec{u}_x(x,t)) \in K_{f,\delta}$ für $t \le T^*$. Damit ist folgende Energie wohldefiniert:

$$\mathcal{E}_N^{(u)}(\vec{u})(t) = \max_{1\le i\le n} \left\{ E_N(u_i)(t) + E_N(\partial_1^{(u)} u_i)(t) + E_N(\partial_2^{(u)} u_i)(t) \right\}.$$

Es ist $E_N(\partial_1^{(u)} u_i)(t) \le E_N((\partial_t - \lambda_1(x,t,\vec{v}))u_{i,x})(t) + E_N((\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\vec{u}))u_{i,x})(t)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_N^{(u)}(u_i)(t) \le & \, \mathcal{E}_N^{(v)}(u_i)(t) + \\ & + E_N((\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\vec{u}))u_{i,x})(t) + E_N((\lambda_2(x,t,\vec{v}) - \lambda_2(x,t,\vec{u}))u_{i,x})(t).\end{aligned}$$

Es gilt $\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\vec{u}) = \sigma(x)(\beta_1(x,t,\vec{v}) - \beta_1(x,t,\vec{u})) =: \sigma(x)\alpha(x,t)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}E_N((\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\vec{u}))u_{i,x})(t) &\le C_{prod} E_N(\beta_1(x,t,\vec{v}) - \beta_1(x,t,\vec{u}))(t) E_N(\sigma u_{i,x})(t) \\ &\le \frac{1}{2} C_{prod} C_\beta^{II} C E_N(\alpha)(t).\end{aligned}$$

Aus $(\partial_t - 0\partial_x)\alpha(x,t) = \alpha_t(x,t)$ folgt zusammen mit $\alpha(x,0) = 0$

$$\begin{aligned}E_N'(\alpha)(t) &\le E_N(\alpha_t)(t) + C_{evol} E_N(\alpha)(t), \text{ also} \\ E_N(\alpha)(t) &\le \int_0^t e^{C_{evol}(t-\tau)} E_N(\alpha_t)(\tau) d\tau \quad \forall N, t \in [0,T^*].\end{aligned}$$

Es ist $\alpha_t(x,t) = \beta_{1t}(x,t,\vec{v}) - \beta_{1t}(x,t,\vec{u}) + \sum_{j=1}^n \beta_{1v_j}(x,t,\vec{v})v_{jt} - \beta_{1v_j}(x,t,\vec{u})u_{jt}$. Wegen $\mathcal{E}_N^{(v)}(\vec{u}) \le C/2$, $\mathcal{E}_N^{(v)}(\vec{v}) \le C$, Lemma 1, Lemma 2, Lemma 4 und der Wahl von C_β^*, C_α ist $E_N(\alpha_t)(t) \le C_\alpha$ für alle $t \le T^*$.

Damit ist $E_N((\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\vec{u}))u_{i,x})(t) \le \frac{1}{2} C_{prod} C_\beta^{II} C E_N(\alpha)(t) \le \frac{1}{12} C$. Daraus erhalten wir $\mathcal{E}_N^{(u)}(\vec{u}) \le \frac{2}{3} C$.

Nun beweisen wir einen weiteren

Satz 5.2 *Das System linearer schwach hyperbolischer Gleichungen* (5.2_i) $i = 1, \dots, n$ *besitzt eine globale periodische Lösung im Raum* $C^2([0,T], Y_{+0}^s(P))$.

Beweis Es genügt zu zeigen, daß die Gleichung

$$u_{tt} + \sigma b(x,t) u_{xt} - \sigma^2 a(x,t) u_{xx} = f(x,t), \quad u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x) \qquad (5.3)$$

eine globale Lösung besitzt, wenn $a, b \in C^1([0,T], Y_{+0}^s(P))$, $f \in C([0,T], Y_{+0}^s(P))$, $\sigma, \varphi_0, \varphi_1 \in Y_{+0}^s(P)$ und $b^2 + 4a \ge \gamma > 0$.

Wir nähern die periodischen Funktionen σ, b, a, f, φ_0, φ_1 durch periodische analytische Funktionen σ_n, b_n, a_n, f_n, φ_{0n}, φ_{1n} an, so daß

$$\begin{aligned}
&\sigma_n \to \sigma, \quad \varphi_{0n} \to \varphi_0, \quad \varphi_{1n} \to \varphi_1 \text{ im } C^{k+1}(P),\\
&a_n \to a, \quad b_n \to b \text{ im } C^1([0,T], C^k(P)),\\
&f_n \to f \text{ im } C([0,T], C^k(P)),\\
&b_n^2 + 4a_n \geq \frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Das Problem

$$u_{tt} + \sigma_n b_n(x,t) u_{xt} - \sigma_n^2 a_n(x,t) u_{xx} = f_n(x,t), \quad u(x,0) = \varphi_{0n}(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_{1n}(x)$$

hat nach dem Satz von Cauchy-Kowalewskaja eine periodische, analytische, lokale Lösung u_n im Intervall $[0, T_n^*)$. Da alle vorkommenden Funktionen analytisch und periodisch sind, können wir auch hier Energieabschätzungen ($s = 1$) herleiten und erhalten $\mathcal{E}_N(u_n)(t) \leq C$, falls $N \geq 0$ und $0 \leq t < T_n^*$. Das garantiert zusammen mit der Eindeutigkeit, daß u_n und u_{nt} als analytische Funktionen von x in $t = T_n^*$ eindeutig fortgesetzt werden können. Nun läßt sich der Satz von Cauchy-Kowalewskaja ein weiteres Mal anwenden, und man erhält, daß die Lösung u_n im Intervall $[0, T_n^{**})$, $T_n^{**} > T_n^*$ existiert.

Es läßt sich auf diesem Wege zeigen, daß u_n im gesamten Intervall $[0, T]$ definiert ist.

Nun betrachten wir zwei solche Lösungen u_n, u_m. Wir setzen $w := u_n - u_m$ und erhalten

$$\begin{aligned}
w_{tt} + \sigma_n b_n w_{xt} - \sigma_n^2 a_n w_{xx} &= f_n - f_m + (\sigma_m b_m - \sigma_n b_n) u_{mxt} - \\
&\quad -(\sigma_m^2 a_m - \sigma_n^2 a_n) u_{mxx},\\
w(x,0) &= \varphi_{0n} - \varphi_{0m}, \quad w_t(x,0) = \varphi_{1n} - \varphi_{1m}.
\end{aligned}$$

Ungleichung (4.4) liefert nach Anwendung des Gronwallschen Lemmas und einigen Vereinfachungen

$$\begin{aligned}
\|w\|_{H^{k-2}} + \|w_t\|_{H^{k-2}} \leq C_{k-2}(T) \Bigg(&\|\varphi_{0n} - \varphi_{0m}\|_{H^{k-1}} + \|\varphi_{1n} - \varphi_{1m}\|_{H^{k-2}} + \\
&+ \int_0^t \|f_n - f_m\|_{H^{k-2}} + \|\sigma_n b_n - \sigma_m b_m\|_{C^{k-2}} + \left\|\sigma_n^2 a_n - \sigma_m^2 a_m\right\|_{C^{k-2}} d\tau \Bigg),
\end{aligned}$$

denn $\{u_n\}$ ist im Raum $C^1([0,T], C^k(P))$ eine beschränkte Menge, da $\mathcal{E}_N(u)(t) \leq C$ für alle $0 \leq t \leq T$, alle $u \in \{u_n\}$ und geeignete N gilt. Folglich ist $\{u_n\}$ eine Cauchyfolge im Raum $C^1([0,T], H^{k-2}(P))$. Aus der Differentialgleichung erhalten wir, daß $\{u_n\}$ gegen eine $C^2([0,T], H^{k-3}(P))$–Lösung von (5.3) konvergiert. Aus der Energieabschätzung folgt die Eindeutigkeit dieser Lösung.

Weil diese Überlegungen sich mit jeder natürlichen Zahl k durchführen lassen, folgt die Existenz einer $C^2([0,T], C^\infty(P))$–Lösung von (5.3). Diese muß dann (wegen unseren Energieabschätzungen) sogar eine Gevrey-Lösung sein.

Damit ist der Satz bewiesen.

Nun werden wir ein Existenzresultat für quasilineare Systeme beweisen.

Satz 5.3 *Das quasilineare System (5.1) hat unter den Voraussetzungen V5.1–V5.5 eine lokale Lösung in der Menge der periodischen Funktionen aus dem Raum $C^2([0,T^*], Y^s_{+0}(P))$, wobei T^* die Konstante aus Satz 5.1 ist.*

Beweis Wir definieren $X_i := (C^i([0,T^*], \cap_{N=0}^{\infty} W_2^N(P)))^n$, $i = 0,1,2$ und wählen zwei Mengen $M, M' \subset X_1$:

$$\begin{aligned}
M = \{\vec{v} \in X_1 : \vec{v} \text{ ist } P\text{-periodisch }, \vec{v}(x,0) = \vec{u}_0(x), \vec{v}_t(x,0) = \vec{u}_1(x), \mathcal{E}_N^{(v)}(\vec{v})(t) \leq C \\
\forall N, t \in [0,T^*], \quad (x,t,\vec{v}(x,t), \vec{v}_t(x,t), \sigma(x)\vec{v}_x(x,t)) \in K_{f,\delta} \quad \forall (x,t) \in Q^*\}, \\
M' = \{\vec{v} \in X_1 : \vec{v} \text{ ist } P\text{-periodisch }, \vec{v}(x,0) = \vec{u}_0(x), \vec{v}_t(x,0) = \vec{u}_1(x), \mathcal{E}_N^{(v)}(\vec{v})(t) \leq \frac{2}{3}C \\
\forall N, t \in [0,T^*], \quad (x,t,\vec{v}(x,t), \vec{v}_t(x,t), \sigma(x)\vec{v}_x(x,t)) \in K_{f,\delta} \quad \forall (x,t) \in Q^*\}.
\end{aligned}$$

Wir wissen, daß für jedes $\vec{v} \in M$ das lineare Problem (5.2) genau eine periodische Lösung $\vec{u} \in X_2$ besitzt. Nach Satz 5.1 liegt dann $\vec{u}$ in M'. Diese Abbildung $\vec{v} \mapsto \vec{u}$, $M \to M'$ nennen wir Φ. Sie ist stetig, denn aus $\vec{v}_n \to \vec{v}$ in X_1 folgt $b(x,t,\vec{v}_n) \to b(x,t,\vec{v})$, $a(x,t,\vec{v}_n) \to a(x,t,\vec{v})$ im Raum X_1 und $f_i(x,t,\vec{v}_n,\vec{v}_{n,t},\sigma\vec{v}_{n,x}) \to f_i(x,t,\vec{v},\vec{v}_t,\sigma\vec{v}_x)$ im Raum X_0. Weil die Lösungen linearer schwach hyperbolischer Systeme stetig von den Koeffizienten abhängen, folgt $\vec{u}_n \to \vec{u}$ mit Konvergenz im X_2.

Wir verwenden folgendes

Lemma 5 *Es gilt conv*$(M') \subset M$.

Beweis des Lemmas Seien $\vec{v}, \vec{w} \in M'$, $\quad 0 \leq \nu, \mu, \quad \nu + \mu = 1$. Dann ist $\nu\vec{v} + \mu\vec{w}$ periodisch, erfüllt die Anfangsbedingungen und es gilt $(x,t,(\nu\vec{v}+\mu\vec{w}),(\nu\vec{v}+\mu\vec{w})_t,\sigma(\nu\vec{v}+\mu\vec{w})_x) \in K_{f,\delta}$, falls $(x,t) \in Q^*$. Für $i = 1,\ldots,n$ folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_N^{(\nu v+\mu w)}(\nu v_i + \mu w_i) &= E_N(\nu v_i + \mu w_i) + E_N((\nu v_i + \mu w_i)_t - \lambda_1(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w})(\nu v_i + \mu w_i)_x) + \\
&+ E_N((\nu v_i + \mu w_i)_t - \lambda_2(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w})(\nu v_i + \mu w_i)_x) \\
&\leq \nu E_N(v_i) + \mu E_N(w_i) + \nu E_N(\partial_1^{(v)} v_i) + \nu E_N((\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w}))v_{i,x}) + \\
&+ \mu E_N(\partial_1^{(w)} w_i) + \mu E_N((\lambda_1(x,t,\vec{w}) - \lambda_1(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w}))w_{i,x}) + \\
&+ \nu E_N(\partial_2^{(v)} v_i) + \nu E_N((\lambda_2(x,t,\vec{v}) - \lambda_2(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w}))v_{i,x}) + \\
&+ \mu E_N(\partial_2^{(w)} w_i) + \mu E_N((\lambda_2(x,t,\vec{w}) - \lambda_2(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w}))w_{i,x}).
\end{aligned}$$

Es ist $E_N((\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w}))v_{i,x}) \leq \frac{2}{3} C_{prod} C_\beta^{II} C E_N(\beta_1(x,t,\vec{v}) - \beta_1(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w}))$. Wir setzen $\alpha(x,t) := \beta_1(x,t,\vec{v}(x,t)) - \beta_1(x,t,(\nu\vec{v}+\mu\vec{w})(x,t))$. Dann erhalten wir wegen $\alpha(x,0) = 0$ entsprechend dem vorhergehenden Beweis zu Satz 5.1

$$E_N(\alpha)(t) \leq \int_0^t e^{C_{evol}(t-\tau)} E_N(\alpha_t)(\tau)\, d\tau.$$

Es gilt $\alpha_t(x,t) = \beta_{1t}(x,t,\vec{v}) - \beta_{1t}(x,t,\nu\vec{u}+\mu\vec{w}) + \sum_{j=1}^n \beta_{1v_j}(x,t,\vec{v})v_{jt} - \beta_{1v_j}(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w})(\nu\vec{v}_j+\mu\vec{w}_j)_t$. Wir wissen $E_N(v_j) \leq 2/3C \leq C$, $E_N(\nu v_j + \mu w_j) \leq 2/3C \leq C$ und $E_N((\nu v_j + \mu w_j)_t) \leq \nu E_N(v_{j,t}) + \mu E_N(w_{j,t}) \leq C_\beta^I C$. Nach Wahl von $C_\beta^*(C)$ folgt damit $E_N(\alpha_t) \leq 2C_\beta^*(C) + 2nC_\beta^*(C) C_{prod} C_\beta^I C = C_\alpha$. Daraus schließen wir

$$E_N(\alpha)(t) \leq \frac{1}{6C_{prod}C_\beta^{II}}, \quad \text{falls } t \leq T^*.$$

Also ist $E_N((\lambda_1(x,t,\vec{v}) - \lambda_1(x,t,\nu\vec{v}+\mu\vec{w}))v_{i,x}) \leq C/9$. Daraus folgt

$$\mathcal{E}_N^{(\nu v+\mu w)}(\nu v_i + \mu w_i) \leq \frac{2}{3}C + \frac{2}{9}C \leq C.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun haben wir alle Mittel für die Anwendung des Satzes von Schauder–Tychonoff in der Hand. Wir wissen, daß Φ die abgeschlossene, konvexe, nichtleere Menge $\mathrm{conv}(M')$ in sich abbildet.

Aus dem Differentialgleichungssystem erhalten wir, daß es Konstanten C_N gibt, so daß für die Lösung $\vec{u}$ gilt: $\|u_{i,tt}(.,t)\|_{W_2^N} \leq C_N$ für alle $N \geq 0$ und alle $0 \leq t \leq T^*$. Dabei hängen die C_N nicht von $\vec{u}$ oder $\vec{v}$ ab.

Also bildet Φ die Menge

$$K := \mathrm{conv}(M') \cap \left\{ \vec{u} \in X_2 : \sup_{0\leq t\leq T^*} \|u_{i,tt}(.,t)\|_{W_2^N} \leq C_N \quad \forall N, \quad i = 1,\ldots,n \right\}$$

in sich ab. Die Menge K ist beschränkt und konvex in X_1. Mit dem Satz von Arzela–Ascoli und der Montelraumeigenschaft von $\cap_{N=0}^{\infty} W_2^N(P)$ erhalten wir, daß K sogar kompakt in X_1 ist. Nach dem Fixpunktsatz von Schauder–Tychonoff besitzt dann die Abbildung Φ einen Fixpunkt in K. Damit ist die Existenz einer Lösung gesichert. Daraus folgt die Behauptung des Satzes 5.3.

Wir zeigen einen weiteren

Satz 5.4 *Unter den Voraussetzungen V5.1–V5.5 hat das quasilineare System (5.1) höchstens eine periodische Lösung* $\vec{u} \in (C^2([0,T^*], C^2(P)))^n$.

Beweis Seien $\vec{u}, \vec{v}$ zwei periodische Lösungen. Wir setzen $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ und erhalten

$$\begin{aligned} w_{i,tt} + \sigma b(x,t,\vec{u})w_{i,xt} - \sigma^2 a(x,t,\vec{u})w_{i,xx} &= f_i(x,t,\vec{u},\vec{u}_t,\sigma\vec{u}_x) - f_i(x,t,\vec{v},\vec{v}_t,\sigma\vec{v}_x) - \\ &- \sigma(b(x,t,\vec{u}) - b(x,t,\vec{v}))v_{i,xt} + \sigma^2(a(x,t,\vec{u}) - a(x,t,\vec{v}))v_{i,xx}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} b(x,t,\vec{v}) - b(x,t,\vec{u}) &= \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(b(x,t,\vec{u} + s(\vec{v}-\vec{u}))\right)\, ds \\ &= \int_0^1 \nabla b(x,t,\vec{u} + s(\vec{v}-\vec{u}))\, ds \cdot (\vec{v}-\vec{u}) = \vec{\vec{b}}(x,t)\vec{w}(x,t), \end{aligned}$$

dabei ist $\vec{\vec{b}}(x,t)$ periodisch. Nach ähnlichen Umformungen erhält man

$$w_{i,tt} + \sigma b(x,t,\vec{u})w_{i,xt} - \sigma^2 a(x,t,\vec{u})w_{i,xx} + \sum_{j=1}^{n} (b_{ij}(x,t)w_j + c_{ij}(x,t)w_{j,t} + \sigma d_{ij}(x,t)w_{j,x}) = 0.$$

Wir fassen die Summe als rechte Seite auf und folgern mit Bemerkung 4.2 ($N = 0$)

$$\mathcal{E}_0^{(u)}(w_i)'(t) \leq C\mathcal{E}_0^{(u)}(\vec{w})(t).$$

Daraus erhalten wir wegen $\vec{w}(x,0) = 0$, $\vec{w}_t(x,0) = 0$

$$\mathcal{E}_0^{(u)}(w_i)(t) \leq C \int_0^t \mathcal{E}_0^{(u)}(\vec{w})(\tau)\, d\tau, \text{ also } \mathcal{E}_0^{(u)}(\vec{w})(t) \leq C \int_0^t \mathcal{E}_0^{(u)}(\vec{w})(\tau)\, d\tau.$$

Wenn man nun das Gronwallsche Lemma anwendet, folgt $\mathcal{E}_0^{(u)}(\vec{w}) \equiv 0$. Damit ist die Eindeutigkeit periodischer Lösungen nachgewiesen.

Bemerkung 5.1 *Dem letzten Satz entnehmen wir, daß erst recht ein lineares System höchstens eine periodische Lösung im Raum $(C^2([0,T^*],C^2(P)))^n$ haben kann.*

6 Voll nichtlineare periodische Gleichungen

Nun können wir die Sätze 2.1, 2.2, 5.3, 5.4 zusammenfassen zu einem Existenz- und Eindeutigkeitsresultat für das Cauchy-Problem (0.1).

Dazu setzen wir voraus:

I Die Funktion $F(\sigma^2 u_{22}, \sigma u_{12}, u_{11}, \sigma u_2, u_1, u, x, t) \in C^2(I, X_{loc}^{(s',\ldots,s',s)})$ sei definiert in einer offenen Menge $M \subset R^8$, wobei I ein geeignetes Zeitintervall ist.

II Für die Ableitung F_3 gilt $F_3 \geq \alpha > 0$ überall in M (wir verwenden die im Abschnitt 2 eingeführte Schreibweise).

Das heißt, daß die durch $F(\sigma^2 u_{22}, \sigma u_{12}, u_{11}, \sigma u_2, u_1, u, x, t) = 0$ beschriebene Menge des R^8 sich darstellen läßt durch $u_{11} = G(\sigma^2 u_{22}, \sigma u_{12}, \sigma u_2, u_1, u, x, t)$, wobei $G \in C^2(I, X_{loc}^{(s',\ldots,s',s)})$.

Außerdem nehmen wir an:

III In M gelte $(F_2/F_3)^2 - 4(F_1/F_3) \geq \gamma > 0$.

Dann ist $u_{tt} = G(\sigma^2 u_{xx}, \sigma u_{xt}, \sigma u_x, u_t, u, x, t)$ eine schwach hyperbolische Differentialgleichung mit Ortsentartung.

Weiterhin setzen wir voraus:

IV Es existieren ein kompaktes Intervall $P \subset R$ und periodische Funktionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x) \in Y_{+0}^s(P)$, so daß

$$\varphi_2(x) := G(\sigma(x)^2 \varphi_{0,xx}, \sigma(x)\varphi_{1,x}, \sigma(x)\varphi_{0,x}, \varphi_1, \varphi_0, x, 0)$$

definiert ist und die abgeschlossene Menge

$$\{(\sigma(x)^2\varphi_{0,xx}(x), \sigma(x)\varphi_{1,x}(x), \varphi_2(x), \sigma(x)\varphi_{0,x}(x), \varphi_1(x), \varphi_0(x), x, 0) : x \in P\}$$

enthalten ist in der im R^7 offenen Menge $M \cap \{t = 0\}$.

Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß mit

$$\begin{aligned}
K_{F,\delta,0} := \big\{ & (u_{22}, u_{21}, u_{11}, u_2, u_1, u_0, x) : x \in P, \quad |u_{22} - \sigma(x)^2 \varphi_{0,xx}(x)| \le \delta, \\
& |u_{21} - \sigma(x)\varphi_{1,x}(x)| \le \delta, \quad |u_{11} - \varphi_2(x)| \le \delta, \\
& |u_2 - \sigma(x)\varphi_{0,x}(x)| \le \delta, \quad |u_1 - \varphi_1(x)| \le \delta, \quad |u_0 - \varphi_0(x)| \le \delta \big\}, \\
K_{F,\delta} := {} & K_{F,\delta,0} \times [0,T]
\end{aligned}$$

gilt: $K_{F,\delta,0} \times \{0\} \subset M \cap \{t = 0\}$.

Die positive Konstante T sei so gewählt, daß $K_{F,\delta} \subset M$. Außerdem setzen wir voraus:

V Die Funktionen F, σ, φ_0, φ_1 sind in x P-periodisch.

Dannn gilt der Satz:

Satz 6.1 (Existenz und Eindeutigkeit für voll nichtlineare Cauchy-Probleme) *Unter den Voraussetzungen I, II, III, IV, V hat (0.1) genau eine Lösung in der Menge der periodischen Funktionen des Raumes* $C^4([0,T^*), Y^s_{+0}(P))$.

Der Beweis folgt aus den Sätzen 2.1, 2.2, 5.3, 5.4.

Bemerkung 6.1 *Dieser Satz schließt nicht aus, daß das Cauchy-Problem (0.1) außer der periodischen Lösung noch eine weitere, dann aber nichtperiodische Lösung besitzt. Im Abschnitt 8 werden wir einen anderen Zugang verwenden, um diesen Fall auszuschließen.*

7 Untersuchungen zur C^∞-Korrektheit

In der Literatur ([2], [3]) wurden C^∞-Aussagen für recht spezielle schwach hyperbolische Anfangswertprobleme mit Hilfe der Nash-Moser-Theorie hergeleitet. Im Unterabschnitt 7.1 soll skizziert werden, warum es nicht gelang, diesen Satz von Nash und Moser auf Anfangswertprobleme

$$u_{tt} - F(\sigma^2 u_{xx}, \sigma u_{xt}, \sigma u_x, u_t, u, x, t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \tag{7.1}$$

anzuwenden.

Später werden wir einen anderen Zugang verwenden, um quasilineare Probleme

$$u_{tt} + \sigma b(x,t) u_{xt} - \sigma^2 a(x,t) u_{xx} = f(x,t,u,u_t,\sigma u_x) \tag{7.2}$$

auf C^∞-Korrektheit zu untersuchen.

7.1 Nichtlineare Anfangswertprobleme

Wir betrachten das Anfangswertproblem (7.1). Dieses soll in einer geeigneten Menge, die von den Anfangsdaten abhängt, schwach hyperbolisch sein. Die Funktionen σ, u_0, u_1, F sollen P-periodisch in x und unendlich oft differenzierbar sein.

Bei unseren Untersuchungen wollen wir die Nash-Moser-Theorie verwenden. Deshalb zunächst eine Zusammenstellung der grundlegenden Aussagen dieser Theorie (vgl. [6]):

Ein Frechet–Raum F heißt GRADED SPACE, wenn er durch eine aufsteigende Folge von Seminormen topologisiert wird, das heißt $\|f\|_n \leq \|f\|_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, $f \in F$.

F, G seien graded spaces, U eine Umgebung aus F, P eine nichtlineare Abbildung von U nach G. P erfüllt eine TAME-ABSCHÄTZUNG in U, genau dann wenn es $b, r \geq 0$ gibt, so daß für alle f aus U gilt:

$$\|P(f)\|_n \leq C_n(1 + \|f\|_{n+r}), \quad n \geq b.$$

U sei eine offene Teilmenge aus F, P eine Abbildung $U \to G$. P ist TAME, genau dann wenn P eine tame-Abschätzung in einer Umgebung eines jeden Punktes f aus U erfüllt.

P ist REGELMÄSSIG TAME, genau dann wenn P unendlich oft differenzierbar ist und alle Ableitungen von P tame sind.

Beispiel Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit, $F, G = C^\infty(X)$. Dann ist z. B. jeder (nicht notwendig lineare) Differentialoperator der Form $L(x, u, \partial_x u)$, wobei L in allen Argumenten C^∞ ist, regelmäßig tame.

Nash-Moser-Theorem Seien F, G tame-Räume, $U \subset F$, U offen. $P : U \to G$ sei regelmäßig tame. Wir setzen voraus, daß es für jedes $u \in U$ und jedes $k \in G$ genau ein $h \in F$ gibt mit $DP(u)h = k$ und definieren $h =: VP(u)k$. Sei weiterhin $VP : U \times G \to F$ regelmäßig tame.

Dann ist P lokal invertierbar und jede lokale Inverse ist regelmäßig tame.

Diese Theorie wollen wir nun anwenden. Als tame-Räume wählen wir die Räume der in x P-periodischen Funktionen

$$\begin{aligned} F &= C^2([0,T], C^\infty(P)), \\ G &= C([0,T], C^\infty(P)) \times C^\infty(P) \times C^\infty(P) \end{aligned}$$

mit den Normen

$$\begin{aligned} \|f\|_{F,n} &:= \sup_{t\in[0,T]} \{\|f(.,t)\|_{H^n} + \|f_t(.,t)\|_{H^n} + \|f_{tt}(.,t)\|_{H^n}\} \\ \|(g_1, g_2, g_2)\|_{G,n} &:= \sup_{t\in[0,T]} \|g_1(.,t)\|_{H^n} + \|g_2\|_{H^n} + \|g_3\|_{H^n} . \end{aligned}$$

Für die Abbildung $P : F \to G$ wählen wir

$$P : u \mapsto Pu = \big(u_{tt} - F(\sigma^2 u_{xx}, \sigma u_{xt}, \sigma u_x, u_t, u, ., t), u(., 0) - u_0(.), u_t(., 0) - u_1(.)\big) .$$

Nun konstruieren wir die offene Menge $U \subset F$. Dazu sei

$$w(x,t) := u_0(x) + t u_1(x) + \frac{1}{2} t^2 F(\sigma^2 u_{0xx}, \sigma u_{1x}, \sigma u_{0x}, u_1, u_0, x, 0)$$

und

$$U := \Big\{u \in F : \|u - w\|_{F,m} < C_m, \quad m = 0, 1, \ldots, m_0\Big\} . \tag{7.3}$$

Die Abbildung P bildet U in G ab. Wir untersuchen $P(U)$. Es ist

$$P(w) = (g(x,t), 0, 0) \text{ mit } g(x, 0) = 0.$$

Also gibt es ein $\tilde{g} \in C([0,T], C^\infty(P))$ mit $g(x,t) = t\tilde{g}(x,t)$. Wir wählen eine C^∞-Funktion φ mit

$$\varphi(t) = 0 \text{ für } t \leq 1 \text{ und } \varphi(t) = 1 \text{ für } t \geq 2.$$

Dann gilt in der Topologie von G

$$\left(\varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) g(x,t), 0, 0\right) \to (g(x,t), 0, 0)\,, \text{ falls } \varepsilon \to 0.$$

Folglich gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß (falls $T \leq \varepsilon_0$) die Funktion $(0,0,0)$ in $P(U)$ liegt. Die Konstante T kann also nicht beliebig groß sein. Deshalb können wir höchstens die lokale Existenz, nicht aber die globale Existenz nachweisen.

Falls P in U lokal invertierbar wäre, dann gäbe es eine Funktion $u^* \in U$ mit $P(u^*) = (0,0,0)$. Damit wäre das Anfangswertproblem gelöst.

Wir prüfen nach, ob die Voraussetzungen des Satzes von Nash-Moser erfüllt sind:

Die Räume F, G sind tame-Räume, U ist in F offen. Gemäß obigen Beispiels ist $P : U \to G$ regelmäßig tame.

Die Frechet-Ableitung von P lautet

$$DP(u)h = \left(h_{tt} - F_1\sigma^2 h_{xx} - F_2\sigma h_{xt} - F_3\sigma h_x - F_4 h_t - F_5 h, h(.,0), h_t(.,0)\right).$$

Bei der Wahl von U sei die Konstante C_0 aus (7.3) so klein gewählt, daß $DP(u)h = k$ mit $u \in U$ eine schwach hyperbolische Differentialgleichung für h darstellt. Diese ist dann in der Menge der periodischen Funktionen eindeutig lösbar. Dann existiert die Abbildung

$$VP : (u,k) \mapsto h, \quad VP : U \times G \to F.$$

Zu untersuchen ist, ob VP regelmäßig tame ist. Wir wollen zuerst der Frage nachgehen, ob VP tame ist. Sei dazu $(u^0, k^0) \in U \times G$ beliebig gewählt. Es ist zu untersuchen, ob es Konstanten b, r und eine Umgebung V von (u^0, k^0) gibt, so daß

$$\|VP(u,k)\|_{F,n} \leq C_n \left(1 + \|u\|_{F,n+r} + \|k\|_{G,n+r}\right)$$

gilt. Diese Umgebung V können wir beschreiben durch

$$V = \left\{(u,k) \in U \times G : \left\|u - u^0\right\|_m \leq C_m^0, \quad m \in [0, m_1], \quad \left\|k - k^0\right\|_m \leq C_m^0, \quad m \in [0, m_1']\right\}.$$

Die Gleichung $DP(u)h = k, \quad k = (k_1, k_2, k_3)$ kann man umformulieren zu

$$(\partial_1\partial_2 + A_1\partial_1 + A_2\partial_2)h = k_1, \quad h(x,0) = k_2(x), \quad h_t(x,0) = k_3(x),$$

wobei $\partial_i = \partial_t - \lambda_i(x,t,u)\partial_x$, $A_i = A_i(x,t,u,u_t,\sigma u_x)$. Bei der Definition der Energien wählen wir $s = 1$ und $\varrho \equiv 1$ und erhalten

$$\mathcal{E}_N^{(u)}(h)'(t) \leq C_{G,N}\mathcal{E}_N^{(u)}(h)(t) + 2E_N(k_1)(t)$$

mit $C_{G,N} = 3C_{prod}C_A^* + C_{evol} + 1$ und $C_A^* = \max_{t\in[0,T]}(E_N(A_i)(t))$. Man könnte natürlich s und ϱ anders wählen (z.B. $s = 0$), aber dann ließe sich $C_{G,N}$ womöglich nicht mehr einfach darstellen. $E_N(A_i)$ hängt von $E_N(u)$ ab und $E_N(u)$ läßt sich mit Hilfe von $\|u(.,t)\|_{H^N}$ abschätzen. Nach Anwendung des Gronwallschen Lemmas folgt damit

$$\begin{aligned}&\|h(.,t)\|_{H^N} + \|h_t(.,t)\|_{H^N} + \|\sigma h_x(.,t)\|_{H^N} \\ &\qquad \leq C_N \exp(D_N(\|u\|_{F,N})t) \left(\|k_2\|_{H^{N+1}} + \|k_3\|_{H^N} + \int_0^t \|k_1(.,\tau)\|_{H^N}\, d\tau\right).\end{aligned}$$

Für $N \geq \max\{m_0, m_1\}$ läßt sich aber $\exp(D_N(\|u\|_{F,N})t)$ nicht durch $C'_N(1 + \|u\|_{F,N+r})$ abschätzen, zumindest ist eine solche Abschätzung nicht offensichtlich.

Wir können also nicht zeigen, daß VP tame ist. Es bleibt also offen, ob P lokal invertierbar ist. Damit können wir auch keine Aussage über die C^∞-Korrektheit von (7.1) erzielen. Deshalb wenden wir uns nun im nächsten Unterabschnitt quasilinearen Problemen zu.

7.2 Quasilineare Anfangswertprobleme

Wir betrachten das schwach hyperbolische Anfangswertproblem (7.2) und setzen voraus, daß u_0, u_1, σ, a, b und f unendlich oft differenzierbar und P-periodisch in x sind.

Wir wollen mit dem Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff die Existenz einer lokalen Lösung nachweisen. Dazu betrachten wir die Abbildung $\Phi : v \mapsto u$, wobei die Menge der zulässigen Funktionen v später festgelegt wird und

$$\begin{gathered} u_{tt} + \sigma b(x,t) u_{xt} - \sigma^2 a(x,t) u_{xx} = f(x,t,v,v_t,\sigma v_x) \\ u(x,0) = v(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = v_t(x,0) = u_1(x) \end{gathered}$$

gilt. Die Funktion v sei ebenfalls periodisch. Wir formen die Differentialgleichung um zu

$$(\partial_1 \partial_2 + A_1 \partial_1 + A_2 \partial_2) u = f(x,t,v,v_t,\sigma v_x)$$

mit $\partial_i = \partial_t - \lambda_i(x,t)\partial_x$, $A_i = A_i(x,t)$. Bei der Definition der Energien wählen wir (z.B.) $s = 1$, $\varrho \equiv 1$ und erhalten

$$\mathcal{E}_N(u)'(t) \leq C_N \mathcal{E}_N(u)(t) + 2E_N(f)(t),$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} &\|u(.,t)\|_{H^N} + \|u_t(.,t)\|_{H^N} + \|\sigma u_x(.,t)\|_{H^N} \\ &\qquad \leq C_N(t) \left(\|u_0\|_{H^{N+1}} + \|u_1\|_{H^N} + \int_0^t \|f(.,\tau,v(.,\tau),v_\tau(.,\tau),\sigma v_x(.,\tau))\|_{H^N} \, d\tau \right), \end{aligned}$$

wobei $C_N(t)$ eine monoton nichtfallende Funktion ist. Nun werden wir die Norm $\|f(.,\tau,v(.,\tau),v_\tau(.,\tau),\sigma v_x(.,\tau))\|_{H^N}$ abschätzen:

$$\begin{aligned} \left\| d_x^j f(x,t,v,w,p) \right\|_{L_2} \leq C_j \sum_{i+l=j} \sum_{l_1+l_2+l_3=l} \sum_{\nu_1=0}^{l_1} \sum_{\nu_2=0}^{l_2} \sum_{\nu_3=0}^{l_3} \left\| f^{(i,\nu_1,\nu_2,\nu_3)}(x,v,w,p) \right\|_\infty \times \\ \times \sum_{\substack{h_1+\ldots+h_{\nu_1}=l_1 \\ 1 \leq h_\mu}} \sum_{\substack{m_1+\ldots+m_{\nu_2}=l_2 \\ 1 \leq m_\mu}} \sum_{\substack{n_1+\ldots+n_{\nu_3}=l_3 \\ 1 \leq n_\mu}} \left\| (\partial_x^{h_1} v)^2 \right\|_{L_{\alpha_1}}^{\frac{1}{2}} \cdots \left\| \left(\partial_x^{h_{\nu_1}} v\right)^2 \right\|_{L_{\alpha_{\nu_1}}}^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \left\| (\partial_x^{m_1} w)^2 \right\|_{L_{\beta_1}}^{\frac{1}{2}} \cdots \left\| (\partial_x^{m_{\nu_2}} w)^2 \right\|_{L_{\beta_{\nu_2}}}^{\frac{1}{2}} \left\| (\partial_x^{n_1} p)^2 \right\|_{L_{\gamma_1}}^{\frac{1}{2}} \cdots \left\| (\partial_x^{n_{\nu_3}} p)^2 \right\|_{L_{\gamma_{\nu_3}}}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei

$$\frac{1}{\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{\nu_1}} + \frac{1}{\beta_1} + \ldots + \frac{1}{\beta_{\nu_2}} + \frac{1}{\gamma_1} + \ldots + \frac{1}{\gamma_{\nu_3}} = 1. \tag{7.4}$$

Wir verwenden die Ungleichung von Nirenberg-Gagliardo:

$$\left\|\partial_x^j u\right\|_{L_r} \leq C \left\|\partial_x^m u\right\|_{L_p}^{\frac{j}{m}} \left\|u\right\|_{L_q}^{\left(1-\frac{j}{m}\right)}, \quad 0 \leq j \leq m, \quad \frac{1}{r} = \frac{j}{pm} + \frac{1}{q}\left(1 - \frac{j}{m}\right)$$

Wir wählen $\alpha_\mu = \frac{l}{h_\mu}$, $\beta_\mu = \frac{l}{m_\mu}$, $\gamma_\mu = \frac{l}{n_\mu}$. Offensichtlich ist (7.4) erfüllt. Mit $r = 2\alpha_\mu$, $p = 2$, $q = \infty$, $m = l$, $j = h_\mu$ erhalten wir

$$\left\|\left(\partial_x^{h_\mu} v\right)^2\right\|_{L_{\alpha_\mu}}^{\frac{1}{2}} = \left\|\partial_x^{h_\mu} v\right\|_{L_{2\alpha_\mu}} \leq C \left\|\partial_x^l v\right\|_{L_2}^{\frac{h_\mu}{l}} \left\|v\right\|_{L_\infty}^{\left(1-\frac{h_\mu}{l}\right)},$$

analoge Abschätzungen gelten für die Ableitungen von w und p. Also folgt insgesamt

$$\begin{aligned}\left\|d_x^N f(x,t,v,w,p)\right\|_{L_2} \leq{}& \tilde{\tilde{\varphi}}_N \left(\|v\|_\infty, \|w\|_\infty, \|p\|_\infty\right) \times \\ &\times \left(\sum_{i+l=N} \sum_{l_1+l_2+l_3=l} \left\|\partial_x^l v\right\|_{L_2}^{\frac{l_1}{l}} \left\|\partial_x^l w\right\|_{L_2}^{\frac{l_2}{l}} \left\|\partial_x^l p\right\|_{L_2}^{\frac{l_3}{l}} + 1\right) \\ \leq{}& \tilde{\varphi}_N \left(\|v\|_\infty, \|w\|_\infty, \|p\|_\infty\right) \left(\|v\|_{H^N} + \|w\|_{H^N} + \|p\|_{H^N} + 1\right).\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir

$$S(u,N,t) := \|u(.,t)\|_{H^N} + \|u_t(.,t)\|_{H^N} + \|\sigma u_x(.,t)\|_{H^N}.$$

Dann erhalten wir

$$S(u,N,t) \leq C_N(t)\left(\|u_0\|_{H^{N+1}} + \|u_1\|_{H^N} + \int_0^t \varphi_N(\|v\|_\infty, \|v_t\|_\infty, \|\sigma v_x\|_\infty)(1 + S(v,N,\tau))\, d\tau\right),$$

wobei φ_N in jedem Argument eine monoton nichtfallende Funktion ist.

Es gibt eine Konstante C_P, so daß für jede Funktion g die Ungleichung $\|g\|_\infty \leq C_P \|g\|_{H^1}$ gilt. Sei

$$M := C_1(T)\left(\|u_0\|_{H^2} + \|u_1\|_{H^1} + 1\right).$$

Wir wählen $0 < T_1 \leq T$, so daß $T_1 \varphi_1(C_P M, C_P M, C_P M)(1 + M) \leq 1$. Dann folgt aus $S(v,1,t) \leq M$ für alle $0 \leq t \leq T_1$ die Abschätzung $S(u,1,t) \leq M$ für alle $0 \leq t \leq T_1$.

Dieses T_1 wird fixiert. Für $t \leq T_1$ folgt dann

$$S(u,N,t) \leq A_N + B_N \int_0^t S(v,N,\tau)\, d\tau.$$

Für v gelte $S(v,N,t) \leq A_N e^{B_N t}$, falls $t \leq T_1$.

Dann folgt $S(u,N,t) \leq A_N + B_N \int_0^t A_N e^{B_N \tau}\, d\tau = A_N e^{B_N t}$.

Folglich bildet Φ die Menge der in x periodischen Funktionen

$$K := \{v \in C^1([0,T_1], C^\infty(P)) : S(v,N,t) \leq A_N e^{B_N t} \quad \forall N, \quad S(v,1,t) \leq M, \quad t \leq T_1\}$$

in sich ab. Aus der Differentialgleichung gewinnen wir eine Abschätzung für $\|u_{tt}\|_{H^N}$. Mit dem Satz von Arzela-Ascoli und der Montelraum–Eigenschaft des Raumes C^∞ folgern wir, daß Φ die Menge K in eine kompakte Teilmenge von sich abbildet. Der Fixpunktsatz von Schauder-Tychonoff garantiert dann die Existenz eines Fixpunktes von Φ in K. Also gilt:

Satz 7.1 *Seien $a, b, f, u_0, u_1, \sigma$ periodisch, $\sigma, u_0, u_1 \in C^\infty(P)$, $a, b \in C^1([0,T], C^\infty(P))$, $f \in C([0,T], C^\infty(P \times R^3))$ und $b^2 + 4a \geq \gamma > 0$. Dann hat (7.2) eine eindeutig bestimmte periodische lokale Lösung $u \in C^2([0,T^*), C^\infty(P))$.*

8 Abhängigkeitskegel bei linearen und quasilinearen Gleichungen

In diesem Abschnitt werden wir die Existenz von Abhängigkeitskegeln nachweisen und dabei auf die Voraussetzung der Periodizität verzichten.

8.1 Lineare Gleichungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Gleichung

$$\begin{aligned} &Lu = k(x,t)u_{tt} + \sigma(x)b(x,t)u_{xt} - \sigma^2 a(x,t)u_{xx} + \sigma c(x,t)u_x + d(x,t)u_t + g(x,t)u = 0, \\ &u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Sei Ω eine Umgebung von $(0,0)$. In Ω gelte

V8.1 $k, a, b \in C^1(\Omega)$, $c, d, g \in C(\Omega)$, $\sigma \in C^1(\Omega \cap \{t = 0\})$,

V8.2 k, b, a, c, d, g, σ sind zusammen mit ihren jeweils existierenden Ableitungen gleichmäßig beschränkt,

V8.3 mit einer Konstanten k_1 gilt $0 < k_1 \leq k(x,t)$,

V8.4 $(b/k)^2 + 4a/k \geq \gamma > 0$.

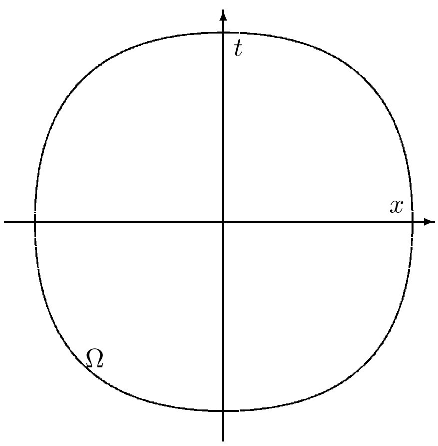
Satz 8.1 (Lokale Eindeutigkeit) *Unter den obigen Voraussetzungen gibt es eine offene Menge Ω_1 mit $(0,0) \in \Omega_1 \subset \Omega$, so daß jede Lösung $u \in C^2(\Omega)$ von (8.1) in Ω_1 verschwindet.*

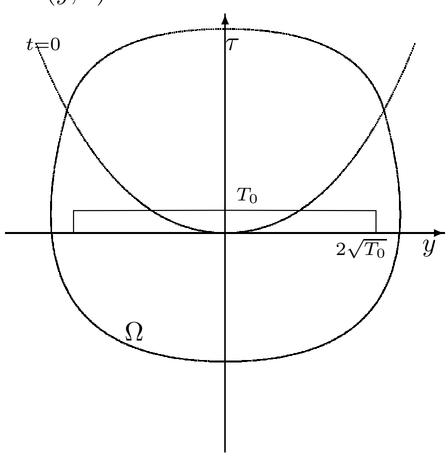
Beweis Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß für $t \leq 0$ $u(x,t) = 0$ gilt. Wir führen die Holmgrentransformation

$$\tau = t + x^2, \quad y = x$$

durch. Man erhält, daß es ein positives T_0 gibt, so daß für alle $(y,\tau) \in [-2\sqrt{T_0}, 2\sqrt{T_0}] \times [0, T_0]$ mit $\tau \leq y^2$ gilt:

$$u(x,t) =: v(y,\tau) = 0.$$





Nun wenden wir diese Transformation auf den Differentialoperator an:

$$
\begin{aligned}
\partial_x &= \partial_y + 2y\partial_\tau, \quad \partial_t = \partial_\tau, \\
\partial_{xx} &= \partial_{yy} + 4y\partial_{y\tau} + 4y^2\partial_{\tau\tau} + 2\partial_\tau, \\
\partial_{xt} &= \partial_{y\tau} + 2y\partial_{\tau\tau}, \quad \partial_{tt} = \partial_{\tau\tau}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
(k + 2y\sigma b - 4y^2\sigma^2 a)v_{\tau\tau} + \sigma(b - 4y\sigma a)v_{y\tau} - \sigma^2 a v_{yy} + \sigma c v_y + (d + 2y\sigma c - 2\sigma^2 a)v_\tau + gv = 0, \\
v(y,0) = 0, \quad v_\tau(y,0) = 0. \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

Man kann T_0 so klein wählen, daß es Konstanten $\tilde{k}_1$, $\tilde{\gamma}$ gibt mit

$$
\begin{aligned}
0 &< \tilde{k}_1 \le \tilde{k}(y,\tau), \\
0 &< \tilde{\gamma} \le \left(\frac{\tilde{b}(y,\tau)}{\tilde{k}(y,\tau)} \right)^2 + \frac{4\tilde{a}(y,\tau)}{\tilde{k}(y,\tau)}
\end{aligned}
$$

für $(y,\tau) \in [-2\sqrt{T_0}, 2\sqrt{T_0}] \times [0, T_0]$. Dann ist (8.2) eine schwach hyperbolische Gleichung mit Levibedingungen. Demnach kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Lösung u von (8.1) in $P \times [0,T_0] = [-2\sqrt{T_0}, 2\sqrt{T_0}] \times [0,T_0]$ kompakten Träger bezüglich x hat.

Bei der nun folgenden Faktorisierung des Differentialoperators $\frac{L}{k}$ verwenden wir die charakteristischen Wurzeln des Hauptteils:

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2}(x,t) &= \frac{1}{2}\sigma(x) \left(-\frac{b(x,t)}{k(x,t)} \pm \sqrt{\left(\frac{b(x,t)}{k(x,t)}\right)^2 + \frac{4a(x,t)}{k(x,t)}} \right), \\
\partial_{1,2} &= \partial_t - \lambda_{1,2}\partial_x, \\
\frac{L}{k} &= \partial_1\partial_2 + A_1\partial_1 + A_2\partial_2 + \frac{g}{k}
\end{aligned}
$$

mit

$$
A_1 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_{2t} - \lambda_1\lambda_{2x} + \frac{\sigma c}{k} + \frac{\lambda_2 d}{k} \right), \quad A_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_1\lambda_{2x} - \lambda_{2t} + \frac{\sigma c}{k} - \frac{\lambda_1 d}{k} \right).
$$

Nun untersuchen wir wieder Evolutionsgleichungen

$$
(\partial_t - \lambda(x,t)\partial_x)u = f, \quad u(x,0) = \varphi_0(x).
$$

Wir verwenden die Energie $e_0(u)(t) = e_0(t) = \|u(x,t)\|_{L_2(P)}$ und erhalten (u hat kompakten Träger in x)

$$
\begin{aligned}
e_0(t)e_0'(t) &= \int_P u(x,t)u_t(x,t)\,dx = \int_P uf\,dx + \int_P u\lambda u_x\,dx \le e_0(u)(t)e_0(f)(t) - \frac{1}{2}\int_P \lambda_x u^2\,dx \\
&\le e_0(u)(t)\left(e_0(f)(t) + C_\lambda e_0(u)(t)\right),
\end{aligned}
$$

also $e_0(u)'(t) \le e_0(f)(t) + C_\lambda e_0(u)(t)$.

Für die Lösung der Differentialgleichung (8.1) wählen wir die Energie $E(u)(t) = e_0(u)(t) + e_0(\partial_1 u)(t) + e_0(\partial_2 u)(t)$. Dann folgt aus $\partial_1\partial_2 u = \partial_1\partial_2 u$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} e_0(\partial_2 u)'(t) &\le e_0(\partial_1\partial_2 u) + C_\lambda e_0(\partial_2 u)(t) \\ &\le e_0(A_1\partial_1 u)(t) + e_0(A_2\partial_2 u)(t) + e_0(gu/k)(t) + C_\lambda e_0(\partial_2 u)(t) \\ &\le C_1 E(u)(t). \end{aligned}$$

Aus $\partial_2\partial_1 u = \partial_2\partial_1 u = \partial_1\partial_2 u + [\partial_2,\partial_1]u$ erhält man (für die Definition von A_3 vergleiche Abschnitt 4.1)

$$\begin{aligned} e_0(\partial_1 u)'(t) &\le e_0(\partial_1\partial_2 u) + e_0([\partial_2,\partial_1]u)(t) + C_\lambda e_0(\partial_1 u)(t) \\ &\le C_1 E(u)(t) + e_0(A_3\partial_1 u)(t) + e_0(A_3\partial_2 u)(t) \\ &\le C_2 E(u)(t). \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich aus $\partial_1 u = \partial_1 u$ die Abschätzung

$$e_0(u)'(t) \le e_0(\partial_1 u)(t) + C_\lambda e_0(u)(t) \le C_3 E(u)(t).$$

Daraus folgt $E(u)'(t) \le (C_1 + C_2 + C_3)E(u)(t)$.

Mit $E(u)(0) = 0$ und dem Gronwallschen Lemma erhält man $E(u)(t) = 0$ für $0 \le t \le T_0$, also $u(x,t) = 0$.

Damit ist die lokale Eindeutigkeit gezeigt.

Bemerkung 8.1 *Die Konstante T_0 hängt nur von k_1, $\tilde{k}_1$, γ, $\tilde{\gamma}$, $\sup_{\Omega\cap\{t=0\}}|\sigma|$ und $\sup_\Omega\{|k|,|b|,|a|\}$ ab. Diese Aussage gilt also auch für Ω_1.*

Bemerkung 8.2 *Ein entsprechendes Ergebnis läßt sich für Systeme*

$$\begin{aligned} &ku_{i,tt} + \sigma b u_{i,xt} - \sigma^2 a u_{i,xx} + \sum_{j=1}^n \sigma c_{ij} u_{j,x} + d_{ij} u_{j,t} + g_{ij} u_j = 0, \qquad (8.3) \\ &u_i(x,0) = 0, \quad u_{i,t}(x,0) = 0 \end{aligned}$$

herleiten. Beim Beweis wählt man als Energie $E(\vec{u}) = \sum_{j=1}^n e_0(u_j) + e_0(\partial_1 u_j) + e_0(\partial_2 u_j)$.

Für das System (8.3) werden wir nun die Existenz eines Abhängigkeitskegels nachweisen.

Wir definieren

$$\lambda_m := \sup_{(x,t)\in\Omega} \frac{1}{2}|\sigma(x)| \left| -\frac{b(x,t)}{k(x,t)} \pm \sqrt{\left(\frac{b(x,t)}{k(x,t)}\right)^2 + \frac{4a(x,t)}{k(x,t)}} \right|.$$

Für einen festen Punkt $A = (x_A, t_A) \in \Omega$ $(t_A > 0)$ betrachten wir die folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} C_A &:= \{(x,t) : \lambda_m|t - t_A| \ge |x - x_A|, \quad 0 \le t \le t_A\}, \\ D_A &:= C_A \cap \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Der Punkt A sei so gewählt, daß $C_A \subset \Omega$.

Satz 8.2 (Abhängigkeitskegel) *Seien die Voraussetzungen V8.1–V8.4 erfüllt (V8.1 und V8.2 sind sinngemäß abzuwandeln). Sei $\vec{u} \in C^2(C_A)$ eine Lösung von (8.3). Dann ist $\vec{u} \equiv 0$ in C_A.*

Beweis Im Folgenden sei $\lambda_m > 0$. Anderenfalls erhalten wir $\sigma \equiv 0$ und die Behauptung ergibt sich unmittelbar.

Wir verwenden beim Beweis eine Technik von Mizohata (vgl. [9], [10]). Das Innere C_A^0 von C_A kann ausgeschöpft werden durch eine Schar von Kurven S_θ, $0 < \theta < \lambda_m^2 t_A^2$ mit $S_\theta = \{(x,t) : \lambda_m^2 (t-t_A)^2 - (x-x_A)^2 - \theta = 0\}$.

Sei $B \in C_A^0$ beliebig gewählt. Wir transformieren die Koordinaten:

$$\begin{aligned} y &:= x, \\ \tau &:= \lambda_m^2 (t-t_A)^2 - (x-x_A)^2 - \theta_B. \end{aligned}$$

Bei der Transformation der Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_y - 2(y-x_A)\partial_\tau, \\ \partial_t &= 2\lambda_m^2 (t-t_A)\partial_\tau, \\ \partial_{xx} &= \partial_{yy} - 4(y-x_A)\partial_{y\tau} + 4(y-x_A)^2\partial_{\tau\tau} - 2\partial_\tau, \\ \partial_{tx} &= 2\lambda_m^2 (t-t_A)(\partial_{\tau y} - 2(y-x_A)\partial_{\tau\tau}), \\ \partial_{tt} &= 4\lambda_m^4 (t-t_A)\left((t-t_A)\partial_{\tau\tau} + \frac{\partial t}{\partial \tau}\partial_\tau\right), \end{aligned}$$

also lauten die Differentialgleichungen in den neuen Variablen

$$\begin{aligned} &(4\lambda_m^4 (t-t_A)^2 k - 4\lambda_m^2 (t-t_A)(x-x_A)\sigma b - 4(x-x_A)^2\sigma^2 a)u_{i,\tau\tau} + \\ &\quad + \sigma\left(2\lambda_m^2 (t-t_A) b + 4(x-x_A)\sigma a\right) u_{i,y\tau} - \sigma^2 a u_{i,yy} + \qquad (8.4) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n} \sigma c_{ij} u_{j,y} + \left(4\lambda_m^4 (t-t_A)\frac{\partial t}{\partial \tau} k + 2\sigma^2 a - 2(x-x_A)\sigma c_{ij} + 2\lambda_m^2 (t-t_A) d_{ij}\right) u_{j,\tau} + \\ &\quad + g_{ij} u_j = 0. \end{aligned}$$

Wir werden jetzt nachweisen, daß dieses System schwach hyperbolisch ist. Zunächst zeigen wir, daß in einer Umgebung von (x_B, t_B) für $\tilde{k}(x,t)$ gilt:

$$0 < \tilde{k}_1 \leq \tilde{k}(x,t).$$

Dies gilt für $x_B = x_A$, denn $\tilde{k}(y_A, \tau = 0) = 4\lambda_m^4 (t-t_A)^2 k(x,t) = 4\lambda_m^2 \theta_B k(x,t) \geq C > 0$. Im Folgenden sei $x_B \neq x_A$. Wir betrachten für $x \neq x_A$ die Funktion

$$F(z; x, t) = z^2 k(x,t) + z\sigma(x) b(x,t) - \sigma(x)^2 a(x,t).$$

Die Nullstellen von F lauten

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\sigma(x)\left(-\frac{b(x,t)}{k(x,t)} \pm \sqrt{\left(\frac{b(x,t)}{k(x,t)}\right)^2 + \frac{4a(x,t)}{k(x,t)}}\right).$$

Für $|z| > \max\{|z_1|, |z_2|\}$ ist also F positiv. Sei nun $\tau = 0$. Wir wählen

$$z_0 = \pm \frac{\lambda_m \sqrt{(x-x_A)^2 + \theta_B}}{|x - x_A|},$$

also ist $F(z_0; x, t) > 0$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} F(z_0; x, t) &= \frac{\lambda_m^2((x-x_A)^2 + \theta_B)}{(x-x_A)^2} k \pm \frac{\lambda_m \sqrt{(x-x_A)^2 + \theta_B}}{|x-x_A|} \sigma b - \sigma^2 a \\ &= \frac{1}{(x-x_A)^2} \left(\lambda_m^4 (t-t_A)^2 k \pm \lambda_m^2 (t-t_A)(x-x_A) \operatorname{sign}(x-x_A) \sigma b - (x-x_A)^2 \sigma^2 a \right) \\ &= \frac{1}{4(x-x_a)^2} \tilde{k}(y, \tau = 0). \end{aligned}$$

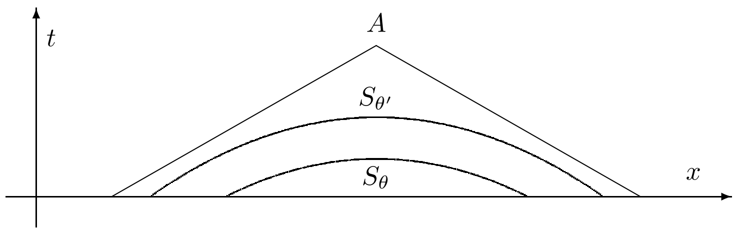
Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{k}}\right)^2 + \frac{4\tilde{a}}{\tilde{k}} &\geq \frac{1}{\tilde{k}_1^2}(\tilde{b}^2 + 4\tilde{a}\tilde{k}), \\ \tilde{b}^2 + 4\tilde{a}\tilde{k} &= \left(2\lambda_m^2 (t-t_A) b + 4(x-x_A)\sigma a\right)^2 + \\ &\quad + 16a \left(\lambda_m^4 (t-t_A)^2 k - \lambda_m^2 (t-t_A)(x-x_A)\sigma b - (x-x_A)^2 \sigma^2 a\right) \\ &= 4\lambda_m^4 (t-t_A)^2 b^2 + 16 \lambda_m^4 (t-t_A)^2 a k \\ &= 4\lambda_m^4 (t-t_A)^2 k^2 \left(\left(\frac{b}{k}\right)^2 + \frac{4a}{k} \right) \geq 4\lambda_m^4 (t-t_A)^2 k_1^2 \gamma > 0. \end{aligned}$$

Demzufolge ist (8.4) in einer Umgebung U_0 von $(y_B, \tau = 0)$ ein schwach hyperbolisches System mit Levibedingungen und homogener rechter Seite.

Wir setzen zusätzlich voraus, daß auf $U_0 \cap S_{\theta_B}$ die Anfangsdaten verschwinden. Dann gibt es nach dem vorigen Satz eine Umgebung $U_0' \subset U_0$ um $(y_B, 0)$, in der die Lösung verschwindet.

Damit läßt sich zeigen: Wenn die Anfangsdaten auf $S_\theta := S_{\theta_B}$ verschwinden, so gibt es ein θ', $0 < \theta' < \theta$, so daß die Lösung im Streifen zwischen S_θ und $S_{\theta'}$ Null ist.



Nun ist noch zu zeigen, daß ein $\theta_0 < \lambda_m^2 t_A^2$ existiert, so daß die Anfangsdaten auf S_{θ_0} verschwinden.

Dies folgt aber aus dem vorigen Satz, denn in einer Umgebung von $(x_A, 0)$ muß $u \equiv 0$ sein.

Jetzt untersuchen wir die Menge $T := \{\theta : u = 0 \text{ auf } S_\theta\}$ und beweisen $\inf T = 0$. Wäre nämlich $\inf T > 0$ so müßte aus Stetigkeitsgründen $\inf T \in T$ sein. Nach dem vorhin Bewiesenen gäbe es dann ein $\theta' < \inf T$ mit $\theta' \in T$. Das ist ein Widerspruch.

Damit ist der Satz 8.2 bewiesen.

8.2 Quasilineare Gleichungen

Wir untersuchen Systeme (5.1) unter den Voraussetzungen V5.2–V5.5. Wir setzen

$$\lambda_m := \sup_{(x,t,\vec{u})\in K_\delta} \frac{1}{2}|\sigma(x)| \left| -b(x,t,\vec{u}) \pm \sqrt{(b(x,t,\vec{u}))^2 + 4a(x,t,\vec{u})} \right|$$

und definieren C_A, D_A wie oben.

Satz 8.3 (Abhängigkeitskegel) *Seien $\vec{u}, \vec{v} \in C^2(C_A)$ zwei Lösungen von (5.1). Falls für alle $(x,t) \in C_A$ gilt $(x,t,\vec{u}(x,t)), (x,t,\vec{v}(x,t)) \in K_\delta$, dann ist $\vec{u} \equiv \vec{v}$ in C_A.*

Beweis Wir setzen $\vec{w} := \vec{u} - \vec{v}$ und erhalten

$$\begin{aligned} w_{i,tt} + \sigma b(x,t,\vec{u}) w_{i,xt} - \sigma^2 a(x,t,\vec{u}) w_{i,xx} &= \sigma(b(x,t,\vec{v}) - b(x,t,\vec{u})) v_{i,xt} - \\ - \sigma^2(a(x,t,\vec{v}) - a(x,t,\vec{u})) v_{i,xx} &+ f_i(x,t,\vec{u},\vec{u}_t,\sigma\vec{u}_x) - f_i(x,t,\vec{v},\vec{v}_t,\sigma\vec{v}_x) \end{aligned}$$

oder

$$w_{i,tt} + \sigma b(x,t,\vec{u}) w_{i,xt} - \sigma^2 a(x,t,\vec{u}) w_{i,xx} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(x,t) w_j + \sigma c_{ij}(x,t) w_{j,x} + d_{ij}(x,t) w_{j,t}$$

und $\vec{w}(x,0) = 0$, $\vec{w}_t(x,0) = 0$. Aus dem vorigen Satz folgt dann $\vec{w} \equiv 0$ in C_A.

9 Voll nichtlineare nichtperiodische Gleichungen

Wir betrachten die Gleichung (0.1) mit $x \in [-R, R]$ unter den Voraussetzungen I, II, III, IV aus Abschnitt 6.

Wir beweisen den folgenden Satz:

Satz 9.1 *Das Problem (0.1) ist lokal äquivalent zu einem quasilinearen System der Gestalt (5.1).*

Beweis Im Abschnitt 2 bewiesen wir eine vergleichbare Aussage für den periodischen Fall. Wir werden zeigen, daß auch im nichtperiodischen Fall das Anfangswertproblem (0.1) äquivalent ist zum System (2.7), (2.8), (2.9), wobei sich die Funktionen k, a, b, f_i aus gewissen Ableitungen von F ergeben.

Den in 2 Teile gegliederten Beweis aus Abschnitt 2 können wir größtenteils wörtlich übernehmen. Lediglich beim Nachweis der Eindeutigkeit der Lösungen der linearen homogenen Cauchy-Probleme (2.4), (2.5) bzw. (2.10), (2.11) müssen wir anders vorgehen. Denn die Eindeutigkeit kann nicht mit Hilfe von Energieabschätzungen gezeigt werden, weil wir für den nichtperiodischen Fall keine Energieabschätzungen hergeleitet haben. Stattdessen verwenden wir die Existenz des Abhängigkeitskegels, vgl. Satz 8.2. Damit ist (0.1) in einem Rechteck $[-R/2, R/2] \times [0, T]$ zu einem System der Form (2.7), (2.8), (2.9), also der Gestalt (5.1), äquivalent.

Nun zeigen wir folgenden Satz.

Satz 9.2 *Sei* $[\alpha_0, \beta_0] \subset (-R/2, R/2)$*. Unter den Voraussetzungen V5.2–V5.5 und einer gewissen zusätzlichen Voraussetzung hat das System (5.1) genau eine lokale Lösung* $u \in C^2([0, T_0], Y^s_{+0}([\alpha_0, \beta_0]))$.

Beweis Wir wählen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ und eine abschneidende Funktion $\Phi(x) \in Y^s_{+0}([-R/2, R/2])$ mit dem Träger $[\alpha_1, \beta_1]$, so daß $\Phi = 1$ in $[\alpha_0 - \varepsilon_1, \beta_0 + \varepsilon_1]$ und $(-R/2, R/2) \supset [\alpha_1 - \varepsilon_2, \beta_1 + \varepsilon_2] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_0 - \varepsilon_1, \beta_0 + \varepsilon_1]$. Wir multiplizieren die Daten $\vec{u}_0, \vec{u}_1$ und die rechte Seite $\vec{f}$ mit Φ. Wir definieren zu den neuen Anfangswerten $\vec{u}_0'$ das zugehörige Kompaktum

$$K'_{\delta,0} = \{(x, \vec{\varphi}) : x \in P, |\varphi_i - u'_{i0}(x)| \leq \delta\}$$

und setzen zusätzlich voraus

V8.5 Man kann $\delta > 0$ und $T > 0$ so klein wählen, daß V5.5 auch in $K'_\delta := K'_{\delta,0} \times [0, T]$ gilt.

Das wird erreicht, wenn $\{(0, 0, G(0, 0, 0, 0, 0, 0, x), 0, 0, 0, x, 0) : x \in P\} \subset M$.

Nun wählen wir

$$\lambda_m := \sup_{(x,t,\vec{u}) \in K'_\delta} \frac{1}{2} |\sigma(x)| \left| -\frac{b(x,t,\vec{u})}{k(x,t,\vec{u})} \pm \sqrt{\left(\frac{b(x,t,\vec{u})}{k(x,t,\vec{u})}\right)^2 + \frac{4a(x,t,\vec{u})}{k(x,t,\vec{u})}} \right|.$$

Falls $\varepsilon_2 < \lambda_m T$ sein sollte, wählen wir $0 < T' < T$, so daß $\varepsilon_2 > \lambda_m T'$ (vgl. Skizze).

In den Gebieten

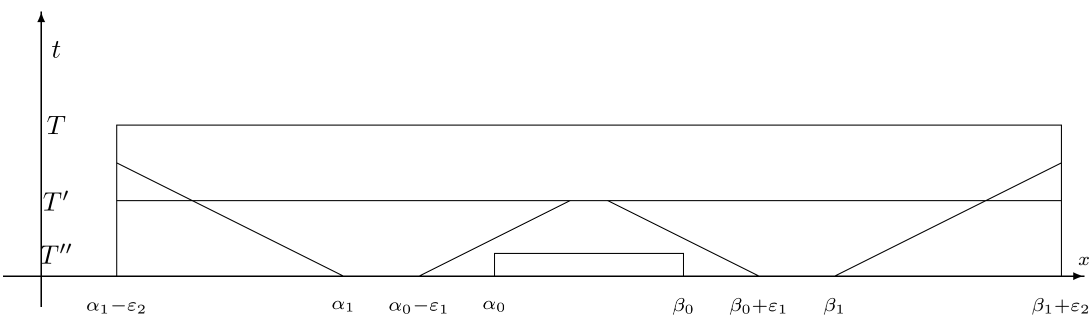
$$\{(x, t) : 0 \leq t \leq T', \quad \lambda_m t \leq (x - \beta_1), \quad \beta_1 \leq x \leq \beta_1 + \varepsilon_2\}$$

und

$$\{(x, t) : 0 \leq t \leq T', \quad \lambda_m t \leq (\alpha_1 - x), \quad \alpha_1 \geq x \geq \alpha_1 - \varepsilon_2\}$$

ändern wir a, b, σ so ab, daß $a, b \in C^1([0, T'], X^{(s,s',\ldots,s')}_{loc}([\alpha_1 - \varepsilon_2, \beta_1 + \varepsilon_2] \times R^n))$ und σ periodisch über das Intervall $P := [\alpha_1 - \varepsilon_2, \beta_1 + \varepsilon_2]$ hinaus fortgesetzt werden können. Wir setzen auch $\vec{u}_0'$, $\vec{u}_1'$, $\vec{f}'$, σ periodisch fort und erhalten dann ein periodisches Problem.

Dieses hat eine lokale Lösung $\vec{u} \in C^2([0, T''], Y^s_{+0}(P))$. Wir können annehmen, daß $\lambda_m T'' \leq \varepsilon_1$ (vgl. Skizze). Dann folgt mit $T_0 := T''$ die Behauptung, da die Lösung $\vec{u}$ auf dem Rechteck $[\alpha_0, \beta_0] \times [0, T'']$ das Anfangswertproblem (5.1) löst.



Literatur

[1] F. Colombini - S. Spagnolo, An example of a weakly hyperbolic Cauchy Problem not well posed in C^∞, Acta Math., **148** (1982), 243-253.

[2] P. D'Ancona, Local existence for semilinear weakly hyperbolic equations with time dependent coefficients, Nonlinear Analysis, Vol.21, No.9 (1993), 685-696.

[3] P. D'Ancona - R. Manfrin, Local solvability for a class of weakly hyperbolic semilinear equations, Sezione di analisi matematica e probabilita, Universita di Pisa, **2.107** (656), July 1992, 1-18.

[4] P.A. Dionne, Sur les problèmes hyperboliques bien posés, J. Anal. Math, **10** (1962-63), 1-90.

[5] M. Gevrey, Sur les équations aux derivées du type parabolique, J. Math. Pures Appl., **9** (1913), 305-471.

[6] R.S. Hamilton, The Inverse Function Theorem of Nash and Moser, Bull. (N.S.) AMS, **7** 1 (1982), 65-222.

[7] K. Kajitani, Local solution of Cauchy problem for nonlinear hyperbolic systems in Gevrey classes, Hokkaido Math. J., **12** (1983), 434-460.

[8] R. Manfrin, Some results of Gevrey and analytic regularity for semilinear weakly hyperbolic equations of Oleinik type, erscheint.

[9] S. Mizohata, The theory of partial differential equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[10] M. Reissig - K. Yagdjian, Levi conditions and global Gevrey regularity for the solutions of quasilinear weakly hyperbolic equations, erscheint.

[11] S. Spagnolo, Analytic and Gevrey well-posedness of the Cauchy problem for second order weakly hyperbolic equations with coefficients irregular in time, Taniguchi Symp. HERT, Katata 1984, 363-380.

[12] S. Spagnolo, Analytic regularity of the solutions of a semi-linear weakly hyperbolic equation, Ricerche di Matematica, Suppl. Vol. XXXVI (1987), 193-202.

[13] S. Spagnolo, Some results of analytic regularity for the semi-linear weakly hyperbolic equations of the second order, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, Fascicolo Speciale 1988, Hyperbolic Equations, (1987), 203-229.

[14] S. Steinberg, Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necessarily strictly hyperbolic, Journ. Diff. Equ., **17** (1975), 119-153.