Lösung entarteter parabolischer Differentialgleichungen mit Hilfe der Rothe–Methode

Michael Dreher

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung semilinearer und quasilinearer entarteter parabolischer Differentialgleichungen. Dabei besteht die Entartung darin, daß der Hauptteil des elliptischen Operators nicht gleichmäßig elliptisch ist.
Diese Gleichungen werden mit Hilfe der Rothe–Methode behandelt. Die Rothe–Methode beruht auf der Semidiskretisierung der Zeitvariablen:
Es werden äquidistante Unterteilungspunkte des Zeitintervalles gewählt. Die Differentialgleichung wird bezüglich der Zeitvariablen diskretisiert, es entsteht eine Familie elliptischer Hilfsprobleme. Diese werden gelöst, hierfür steht eine umfangreiche Theorie zur Verfügung. Für die Lösungen dieser Hilfsprobleme werden A–priori–Abschätzungen bewiesen.
Diese Familie von Funktionen wird zu einer auf einem zusammenhängenden Teil des Zeitintervalls definierten Funktion fortgesetzt. Anschließend wird die Konvergenz dieser Funktionen gezeigt, falls die Unterteilungsschrittweite gegen Null strebt. Es läß sich beweisen, daß der Grenzwert dieser Folge tatsächlich Lösung ist und daß es keine weitere Lösung gibt.
Grundlage der Behandlung der elliptischen Hilfsprobleme ist die eingehende Untersuchung gewichteter Sobolev–Räume. Die dem Problem angepaßte Definition dieser Sobolev–Räume gestattet die Herleitung der erforderlichen Aussagen für elliptische Operatoren. Dabei sind im Falle quasilinearer Gleichungen andere Räume zu wählen als im semilinearen Fall.
Die Rothe–Methode wird aus mehreren Gründen verwendet: Zum Einen gestattet sie die Anwendung der umfangreichen Theorie elliptischer Operatoren, zum Anderen kann das *nichtlineare* Cauchy–Problem durch eine geeignete Diskretisierung in eine Familie *linearer* Hilfsprobleme umgewandelt werden, siehe z.B. [Kač85], [Web91].
Dabei werden keinerlei Wachstumsvoraussetzungen an die Nichtlinearitäten gestellt. In diesem Fall ist es erforderlich, $L_\infty(\Omega)$–Abschätzungen für die Lösungen zu gewinnen, vgl. [Plu88], [Plu91], [Plu93].

Kapitel 1

Notationen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand, $T > 0$, $I = [0, T]$, $Q = \Omega \times I$, $\Gamma = \partial\Omega \times I$. Sei $\|.\|_p$ die Norm im Raum der p–integrierbaren Lebesgue–meßbaren Funktionen $L_p(\Omega)$, $\|.\|_\infty$ die Norm im Raum $L_\infty(\Omega)$ und sei $(.,.)$ das Skalarprodukt im Raum $L_2(\Omega)$. $W_2^1(\Omega)$ und $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ bezeichnen die üblichen Sobolevräume mit der Norm

$$\|u\|_{2,1}^2 := \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 + \|u\|_2^2 .$$

Die Räume $\overset{o}{W}{}_{pg}^1(\Omega)$, $W_p^2(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ sind gewichtete Sobolev–Räume mit Gewichtsfunktionen g, ϱ und den Normen

$$\|u\|_{p,1,g}^p = \sum_{i=1}^N \left\| g^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p^p + \|u\|_p^p ,$$

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^p = \sum_{|\alpha|=2} \left\| \varrho^{\frac{\mu}{p}} D^\alpha u \right\|_p^p + \sum_{|\alpha|=1} \left\| \varrho^{\frac{\mu+\nu}{2p}} D^\alpha u \right\|_p^p + \left\| \varrho^{\frac{\nu}{p}} u \right\|_p^p .$$

c, C bezeichnen generische positive Konstanten.

Kapitel 2

Einführendes Beispiel

In den Kapiteln 4 und 5 wird die Rothe–Methode angewendet werden, um semilineare und quasilineare entartete parabolische Rand–Anfangswertprobleme zu behandeln. Diese Untersuchungen sind sehr aufwendig und benötigen viele Hilfsmittel, welche im folgenden Kapitel bereitgestellt werden.
Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, die Rothe–Methode an einem einfachen Beispiel zu demonstrieren, um das Verständnis der späteren Kapitel 4, 5 zu erleichtern.
Die hier verwendeten Sätze aus der Funktionalanalysis sind in Kapitel 3 aufgeführt.
Untersucht wird das parabolische Rand–Anfangswertproblem mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen

$$u_t(x,t) + Au(x,t) = f(x,t) \quad \text{in} \quad Q, \tag{2.1}$$
$$u(x,0) = U_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \tag{2.2}$$
$$u(x,t) = 0 \quad \text{auf} \quad \Gamma. \tag{2.3}$$

Dabei sei

$$Au := -\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + a_0(x)u, \tag{2.4}$$
$$a_{ik} \in L_\infty(\Omega) \quad \text{für} \quad i,k = 1,\dots,N, \tag{2.5}$$
$$a_0 \in L_\infty(\Omega), \tag{2.6}$$
$$\sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \geq c_0|\xi|^2, \quad c_0 > 0, \quad \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \tag{2.7}$$
$$a_0(x) \geq c_0 > 0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{2.8}$$
$$f \in C^{0,1}(I, L_2(\Omega)), \quad \text{das heißt } \|f(.,t_1) - f(.,t_2)\|_2 \leq C|t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in I, \tag{2.9}$$
$$U_0 \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega), \quad AU_0 \in L_2(\Omega). \tag{2.10}$$

Die Rothe–Methode wird verwendet, um folgenden Satz zu beweisen:

Satz 2.1 *Das Rand–Anfangswertproblem* (2.1), (2.2), (2.3) *besitzt genau eine schwache Lösung, das heißt es existiert genau eine Funktion* $u \in W_2^1(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap C^{0,1}(I, L_2(\Omega))$ *mit*

$u_t \in L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap L_\infty(I, L_2(\Omega))$, so daß für jede Funktion $v \in L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ gilt:

$$\int_I (u_t(x,t), v(x,t))\, dt + \int_I a(u(x,t), v(x,t))\, dt = \int_I (f(x,t), v(x,t))\, dt. \tag{2.11}$$

Dabei bedeutet

$$a(u,v) := \sum_{i,k=1}^{N} \int_\Omega a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0(x) u(x) v(x)\, dx.$$

Der Beweis beruht auf der Methode der Diskretisierung der Zeitvariablen und stützt sich auf mehrere Hilfssätze.
Seien n eine positive natürliche Zahl, $h := \frac{T}{n}$ und $t_j := jh$, $j = 0, \ldots, n$, Unterteilungspunkte des Intervalles $[0, T]$.
Eine Diskretisierung des Anfangswertproblems liefert eine Folge elliptischer Probleme mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen:

$$\begin{aligned} \delta u_j(x) + A(x) u_j(x) &= f_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \\ u_j(x) &= 0, \quad \text{auf} \quad \partial\Omega, \\ u_0(x) &= U_0(x) \quad \text{in} \quad \Omega, \end{aligned}$$

hierbei ist $\delta u_j := \frac{1}{h}(u_j - u_{j-1})$, $f_j(x) := f(x, t_j)$, (u_j ist eine Näherung für $u(x, t_j)$).
Zunächst wird nachgewiesen, daß diese elliptischen Randwertprobleme schwache Lösungen besitzen. Anschließend werden verschiedene A-priori-Abschätzungen für die Lösungen u_j hergeleitet. Unter Nutzung dieser Abschätzungen läßt sich zeigen, daß die Funktionen

$$\begin{aligned} &u^n(x,t) := u_{i-1}(x) + (t - t_{i-1}) \delta u_i(x) \quad (t_{i-1} < t \le t_i, \quad i = 1, \ldots, n,) \\ &\overline{u}^n(x,t) := u_i(x) \quad (t_{i-1} < t \le t_i, \quad i = 1, \ldots, n) \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ in geeigneten Banachräumen gegen eine Funktion $u(x,t)$ konvergieren. Diese Funktion $u(x,t)$ ist schwache Lösung von (2.1), (2.2), (2.3). Abschließend wird die Eindeutigkeit nachgewiesen.
Die Existenz der Funktionen u_j wird durch das folgende Lemma gesichert.

Lemma 2.1 *Es existieren eindeutig bestimmte $u_j \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, $j = 0, \ldots, n$, so daß*

$$\begin{aligned} &(\delta u_j, v) + a(u_j, v) = (f_j, v) \quad j = 1, \ldots, n, \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega), \\ &u_0(x) = U_0(x) \quad \textit{in} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Beweis Es existieren positive Konstanten c_0, C, so daß

$$|a(u,v)| \le C \|u\|_{2,1} \|v\|_{2,1},$$

$$a(u,u) \ge c_0 \|u\|_{2,1}^2$$

für alle $u, v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$. Demzufolge ist $a_h(u,v) := a(u,v) + \frac{1}{h}(u,v)$ eine symmetrische, elliptische Bilinearform im Hilbertraum $\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$. Nach dem Satz von Lax–Milgram existiert dann genau eine Funktion $u_j \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$, so daß

$$a_h(u_j, v) = \left(f_j + \frac{1}{h} u_{j-1}, v\right) \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■
Also existieren die Funktionen u^n, $\overline{u}^n$. Für die Untersuchung der Konvergenz dieser Funktionen werden einige A-priori-Abschätzungen benötigt, die im nächsten Lemma hergeleitet werden.

Lemma 2.2 *Es existiert eine Konstante C, so daß für alle h, j gilt:*

$$\begin{aligned} \|u_j\|_{2,1} &\leq C, \\ \|\delta u_j\|_2 &\leq C, \\ h\sum_{j=1}^{n} \|\delta u_j\|_{2,1}^2 &\leq C. \end{aligned}$$

Beweis Die Wahl der Testfunktion $v = \delta u_j$ in (2.12) liefert

$$\begin{aligned} (\delta u_j, \delta u_j) + a(u_j, \delta u_j) &= (f_j, \delta u_j)\,, \\ (\delta u_{j-1}, \delta u_j) + a(u_{j-1}, \delta u_j) &= (f_{j-1}, \delta u_j)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j) + ha(\delta u_j, \delta u_j) = h\,(\delta f_j, \delta u_j)\,.$$

Die Formel $(p-q)p = \frac{1}{2}\left(p^2 - q^2 + (p-q)^2\right)$ liefert

$$\frac{1}{2}\left(\|\delta u_j\|_2^2 - \|\delta u_{j-1}\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|_2^2 + ch\,\|\delta u_j\|_{2,1}^2 \leq h\,\|\delta f_j\|_2\,\|\delta u_j\|_2\,,$$

also

$$\frac{1}{2}\left(\|\delta u_j\|_2^2 - \|\delta u_{j-1}\|_2^2\right) + ch\,\|\delta u_j\|_{2,1}^2 \leq Ch\,\|\delta f_j\|_2\,\|\delta u_j\|_{2,1} \leq C_\varepsilon h\,\|\delta f_j\|_2^2 + \varepsilon h\,\|\delta u_j\|_{2,1}^2\,.$$

Nach geeigneter Änderung von c, C_ε folgt

$$\|\delta u_j\|_2^2 - \|\delta u_{j-1}\|_2^2 + ch\,\|\delta u_j\|_{2,1}^2 \leq C_\varepsilon h\,\|\delta f_j\|_2^2\,.$$

Nach Summation $(j = 2, \ldots, i)$ ergibt sich

$$\|\delta u_i\|_2^2 - \|\delta u_1\|_2^2 + ch\sum_{j=2}^{i}\|\delta u_j\|_{2,1}^2 \leq C_\varepsilon h\sum_{j=2}^{i}\|\delta f_j\|_2^2 \leq C(t_i) \leq C(T),$$

da wegen der Lipschitzstetigkeit von f die Norm $\|\delta f_j\|_2$ gleichmäßig für h nach oben beschränkt ist.
Nun sind noch $\|\delta u_1\|_2$ und $h\,\|\delta u_1\|_{2,1}^2$ abzuschätzen. Dazu wählt man in (2.12) $j = 1$ und die Testfunktion $v = \delta u_1$ und erhält

$$(\delta u_1, \delta u_1) + a(u_1, \delta u_1) = (f_1, \delta u_1)\,,$$

also

$$\|\delta u_1\|_2^2 + ha(\delta u_1, \delta u_1) = (f_1, \delta u_1) - a(u_0, \delta u_1).$$

Wegen $AU_0 \in L_2(\Omega)$ gilt $a(u_0, \delta u_1) = (AU_0, \delta u_1)$ und es folgt

$$\|\delta u_1\|_2^2 + ha(\delta u_1, \delta u_1) = (f_0, \delta u_1) + h\,(\delta f_1, \delta u_1) - (AU_0, \delta u_1)\,. \tag{2.13}$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy–Schwarz

$$\|\delta u_1\|_2 \leq \|f_0 - AU_0\|_2 + h\,\|\delta f_1\|_2 \leq C.$$

Dann folgt aus (2.13)

$$ch\,\|\delta u_1\|_{2,1}^2 \leq \|f_0 - AU_0\|_2\,\|\delta u_1\|_2 + h\,\|\delta f_1\|_2\,\|\delta u_1\|_2 \leq C.$$

Damit ist $h\sum_{j=1}^{n}\|\delta u_j\|_{2,1}^2 \leq C$ bewiesen.
Die Wahl der Testfunktion $v = u_j$ liefert

$$(u_j - u_{j-1}, u_j) + ha(u_j, u_j) = h\,(f_j, u_j)\,.$$

Mit $(p-q)p = \frac{1}{2}\left(p^2 - q^2 + (p-q)^2\right)$ ergibt sich daraus

$$\frac{1}{2}\left(\|u_j\|_2^2 - \|u_{j-1}\|_2^2 + \|u_j - u_{j-1}\|_2^2\right) + ch\,\|u_j\|_{2,1}^2 \leq h\,\|f_j\|_2\,\|u_j\|_2 \leq C_\varepsilon h\,\|f_j\|_2^2 + \varepsilon h\,\|u_j\|_{2,1}^2\,.$$

Daraus folgt nach Summation $(j = 1, \ldots, i)$

$$\|u_i\|_2^2 - \|u_0\|_2^2 + ch\sum_{j=1}^{i}\|u_j\|_{2,1}^2 \leq C_\varepsilon h\sum_{j=1}^{i}\|f_j\|_2^2 \leq C(t_i) \leq C(T),$$

also $\|u_i\|_2 \leq C$.
Wenn in (2.12) als Testfunktion $v = u_j$ gewählt wird, ergibt sich

$$(\delta u_j, u_j) + a(u_j, u_j) = (f_j, u_j)\,,$$

also

$$c\,\|u_j\|_{2,1}^2 \leq (f_j, u_j) + |\,(\delta u_j, u_j)\,| \leq C.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung des Lemmas. ■
Nun wird die Konvergenz der Folge (u^n) untersucht.

Lemma 2.3 *Es existiert eine Funktion $u \in W_2^1(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ mit $u_t \in L_\infty(I, L_2(\Omega))$, so daß folgende Konvergenzaussagen gelten:*

$$\begin{aligned} u^n &\to u \quad \textit{in} \quad L_\infty(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)),\\ u^n &\rightharpoonup u \quad \textit{in} \quad W_2^1(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)),\\ u_t^n &\to u_t \quad \textit{in} \quad L_2(I, L_2(\Omega)). \end{aligned}$$

Beweis Der Beweis besteht aus mehreren Teilen.
1. Schritt. $u^n \to u$ in $C(I, L_2(\Omega))$ und $\overline{u}^n \to u$ in $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$
Aus den A-priori-Abschätzungen folgt $u_t^n \in L_\infty(I, L_2(\Omega)) \cap L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ und $\overline{u}^n \in L_\infty(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$. Die Mengen $\{u_t^n : n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\{\overline{u}^n : n \in \mathbb{N}\}$ sind in den Räumen $L_\infty(I, L_2(\Omega))$, $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ bzw. $L_\infty(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ beschränkt.

Aus (2.12) erhält man

$$(u_t^n, v) + a(\overline{u}^n(.,t), v) = \left(\overline{f}^n(.,t), v\right) \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega). \tag{2.14}$$

Hierbei bedeutet $\overline{f}^n(.,t) = f(.,t_i)$ für $t_{i-1} < t \leq t_i$. Eine entsprechende Gleichung gilt für eine andere Diskretisierung, bei der I in m Teilintervalle zerlegt wird. Es sei $t \in I$ fest gewählt. Nach Subtraktion beider Gleichungen und der Wahl $v = \overline{u}^n(.,t) - \overline{u}^m(.,t)$ folgt

$$((u^n - u^m)_t, \overline{u}^n - \overline{u}^m) + a(\overline{u}^n - \overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m) = \left(\overline{f}^n - \overline{f}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m\right),$$

also

$$\begin{aligned}((u^n - u^m)_t, u^n - u^m) + a(\overline{u}^n - \overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m) &= \left(\overline{f}^n - \overline{f}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m\right) + \\ &((u^n - u^m)_t, u^n - \overline{u}^n) + ((u^n - u^m)_t, \overline{u}^m - u^m).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}((u^n - u^m)_t, u^n - u^m) + c\,\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_{2,1}^2 &\leq C_\varepsilon \left\|\overline{f}^n - \overline{f}^m\right\|_2^2 + \varepsilon\,\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_2^2 + \\ &+ (\|u_t^n\|_2 + \|u_t^m\|_2)\,(\|u^n - \overline{u}^n\|_2 + \|\overline{u}^m - u^m\|_2).\end{aligned}$$

Wegen $u^n(.,t) - \overline{u}^n(.,t) = \delta u_i(t - t_{i-1})$ gilt $\|u^n - \overline{u}^n\|_2 \leq \|\delta u_i\|_2\, T/n \leq C/n$. Weiterhin ist wegen $\overline{f}^n(.,t) - \overline{f}^m(.,t) = \overline{f}^n(.,t) - f(.,t) + f(.,t) - \overline{f}^m(.,t)$ auch $\left\|\overline{f}^n(.,t) - \overline{f}^m(.,t)\right\|_2 \leq C(n^{-1} + m^{-1})$. Damit ergibt sich

$$((u^n - u^m)_t, u^n - u^m) + c\,\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_{2,1}^2 \leq C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)^2 + C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \leq C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Integration dieser Gleichung über $[0,t]$ liefert[1] (es ist $u^n(x,0) - u^m(x,0) = 0$)

$$\|u^n(.,t) - u^m(.,t)\|_2^2 + c\int_0^t \|\overline{u}^n(.,\tau) - \overline{u}^m(.,\tau)\|_{2,1}^2\, d\tau \leq C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right).$$

Demzufolge ist (u^n) eine Cauchyfolge im Banachraum $C(I, L_2(\Omega))$, es existiert also eine Funktion $u \in C(I, L_2(\Omega))$, so daß $u_n \to u$ in $C(I, L_2(\Omega))$. Weiterhin ist $(\overline{u}^n)$ eine Cauchyfolge im Banachraum $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$, also existiert $\tilde{u} \in L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$, so daß $\overline{u}^n \to \tilde{u}$ in $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Nun ist $u = \tilde{u}$ zu zeigen. Es ist $\overline{u}^n - u^n$ eine Nullfolge im Raum $L_\infty(I, L_2(\Omega))$. Also gilt $\overline{u}^n \to u$ im Sinne des $L_\infty(I, L_2(\Omega))$. Aus den stetigen Einbettungen $L_\infty(I, L_2(\Omega)) \subset L_2(I, L_2(\Omega))$ und $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)) \subset L_2(I, L_2(\Omega))$ folgt dann $\overline{u}^n \to u$ und $\overline{u}^n \to \tilde{u}$ im Sinne des $L_2(I, L_2(\Omega))$. Das heißt $u = \tilde{u}$.

2. Schritt. $u^n \to u$ in $L_\infty(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$

Die Wahl der Testfunktion $v = u^n(.,t) - u^m(.,t)$ liefert

$$a(\overline{u}^n - \overline{u}^m, u^n - u^m) = \left(\overline{f}^n - \overline{f}^m, u^n - u^m\right) - (u_t^n - u_t^m, u^n - u^m),$$

[1] Wenn $u \in L_2(I, W_2^1(\Omega))$ und $u_t \in L_2(I, (W_2^1(\Omega))')$, dann gilt $2\int_0^t (u_t, u)\, d\tau = \|u(t)\|_2^2 - \|u(0)\|_2^2$, vgl. Satz 3.1.10.

also

$$\begin{aligned}a(u^n-u^m,u^n-u^m) &= a(u^n-\overline{u}^n,u^n-u^m)+a(\overline{u}^m-u^m,u^n-u^m)+\\&+\left(\overline{f}^n-\overline{f}^m,u^n-u^m\right)-(u_t^n-u_t^m,u^n-u^m)\,.\end{aligned}$$

Es ist wegen $u^n(.,t)-\overline{u}^n(.,t)=\delta u_i(t-t_{i-1})=\int_{t_{i-1}}^t 1\delta u_i(x)\,d\tau$ und der Ungleichung von Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}\|u^n(.,t)-\overline{u}^n(.,t)\|_{2,1} &\le \sqrt{t-t_{i-1}}\left(\int_{t_{i-1}}^t \|\delta u_i(x)\|_{2,1}^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le Cn^{-\frac{1}{2}}\left(\int_0^T \|u_t^n(.,\tau)\|_{2,1}^2\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \le Cn^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}c\,\|u^n-u^m\|_{2,1}^2 &\le C\,\|u^n-u^m\|_{2,1}\left(\|u^n-\overline{u}^n\|_{2,1}+\|\overline{u}^m-u^m\|_{2,1}\right)+\\&+\left\|\overline{f}^n-\overline{f}^m\right\|_2\|u^n-u^m\|_2+(\|u_t^n\|_2+\|u_t^m\|_2)\,\|u^n-u^m\|_2\,,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}c\,\|u^n-u^m\|_{2,1}^2 &\le C_\varepsilon\left(\|u^n-\overline{u}^n\|_{2,1}^2+\|\overline{u}^m-u^m\|_{2,1}^2\right)+\\&+C(n^{-1}+m^{-1})\sqrt{n^{-1}+m^{-1}}+C\sqrt{n^{-1}+m^{-1}},\\&\le C\sqrt{n^{-1}+m^{-1}}.\end{aligned}$$

Also ist (u^n) eine Cauchyfolge im Banachraum $L_\infty(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$, es existiert demnach ein $\tilde{\tilde{u}}$, so daß $u^n\to\tilde{\tilde{u}}$ im Sinne des $L_\infty(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$. Es folgt aus der stetigen Einbettung $L_\infty(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))\subset L_\infty(I,L_2(\Omega))$ und aus den oben bewiesenen Konvergenzeigenschaften unmittelbar $\tilde{\tilde{u}}=u$.

3. Schritt. $u_t^n\to u_t$ *in* $L_2(I,L_2(\Omega))$ *und* $u_t^n\rightharpoonup u_t$ *in* $L_2(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$

Es gilt

$$\int_I((u^n-u^m)_t,v)\,dt+\int_I a(\overline{u}^n-\overline{u}^m,v)\,dt=\int_I\left(\overline{f}^n-\overline{f}^m,v\right)\,dt \quad \forall v\in L_2(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

Die Wahl $v(.,t):=(u^n(.,t)-u^m(.,t))_t$ liefert

$$\begin{aligned}\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I,L_2(\Omega))}^2 &\le \int_I|a(\overline{u}^n-\overline{u}^m,(u^n-u^m)_t)|\,dt+C_\varepsilon\left\|\overline{f}^n-\overline{f}^m\right\|_{L_2(I,L_2(\Omega))}^2+\\&+\varepsilon\,\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I,L_2(\Omega))}^2\,,\\\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I,L_2(\Omega))}^2 &\le C\,\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_{L_2(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))}\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))}+C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^2.\end{aligned}$$

Da die Folge (u_t^n) im Raum $L_2(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ beschränkt ist, folgt, daß (u_t^n) eine Cauchyfolge im Raum $L_2(I,L_2(\Omega))$ ist. Es existiert also ein Grenzelement v. Zu zeigen bleibt $v=u_t$.

Dazu sei (im Sinne eines Bochner–Integrals) $w(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau + U_0$. Es gilt $u^n(t) = \int_0^t u_t^n(\tau)\,d\tau + U_0$. Daraus folgt

$$\|u^n(t) - w(t)\|_2 \le \int_0^t \|u_t^n(\tau) - v(\tau)\|_2 \,d\tau \le \sqrt{t}\,\|u_t^n - v\|_{L_2(I,L_2(\Omega))},$$

also konvergiert (u^n) gegen w im Raum $L_\infty(I, L_2(\Omega))$. Daraus folgt $u = w$, also $v = u_t$.
Die Folge (u_t^n) ist im Hilbertraum $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ beschränkt. Aus Lemma 3.1.1 folgt dann, daß $v \in L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ und $u_t^n \rightharpoonup v$ in $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$.
4. Schritt. $u_t \in L_\infty(I, L_2(\Omega))$
Es gilt $\|u^n(t_1) - u^n(t_2)\|_2 \le \int_{t_1}^{t_2} \|u_t^n\|_2 \,dt \le C|t_2 - t_1|$. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert $u \in C^{0,1}(I, L_2(\Omega))$, also $u_t \in L_\infty(I, L_2(\Omega))$.
Damit ist die Konvergenz bewiesen. ■
Es ist noch zu zeigen, daß die Grenzfunktion tatsächlich Lösung ist. Dies wird im nächsten Lemma bewiesen.

Lemma 2.4 *Die Funktion u ist Lösung von* (2.11).

Beweis Es gilt

$$\int_I (u_t^n, v)\,dt + \int_I a(\overline{u}^n, v)\,dt = \int_I \left(\overline{f}^n, v\right)\,dt \quad \forall n, \quad \forall v \in L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)).$$

Nun ist

$$|a(\overline{u}^n(.,t), v(.,t)) - a(u(.,t), v(.,t))| \le C\,\|\overline{u}^n(.,t) - u(.,t)\|_{2,1}\,\|v\|_{2,1} \to 0,$$

da $u_n \to u$ im Raum $L_\infty(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$ und $(\overline{u}^n - u^n)$ eine Nullfolge in diesem Raum ist, vgl. (2.15). Weiterhin ist

$$|a(\overline{u}^n(.,t), v(.,t))| \le C\,\|\overline{u}^n(.,t)\|_{2,1}\,\|v\|_{2,1} \le C\,\|v\|_{2,1},$$

also ist der Konvergenzsatz von Lebesgue anwendbar. Die Konvergenz der beiden anderen Integrale folgt aus den Konvergenzeigenschaften von (u_t^n) und der Stetigkeit von $f(.,t)$. Dann folgt unmittelbar (2.11).
Damit ist die Existenz einer Lösung gezeigt. ■
Zu beweisen bleibt noch die Eindeutigkeit.

Lemma 2.5 *Es existiert höchstens eine Lösung von* (2.11) *im Raum* $L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)) \cap W_2^1(I, L_2(\Omega))$.

Beweis Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (2.11). Sei $w := u_1 - u_2$. Dann gilt für jedes $v \in L_2(I, \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))$

$$\int_I (w_t(x,t), v(x,t))\,dt + \int_I a(w(x,t), v(x,t))\,dt = 0.$$

Die Wahl $v := w$ liefert

$$\|w(.,T)\|_2^2 - \|w(.,0)\|_2^2 + c\,\|w\|^2_{L_2(I,\overset{o}{W}{}_2^1(\Omega))} \le 0,$$

wegen $w(.,0) = 0$ also $w \equiv 0$. ■

Kapitel 3

Hilfssätze und Hilfsmittel

3.1 Funktionalanalysis

Die Beweise der folgenden beiden Sätze finden sich in [Heu92].

Satz 3.1.1 *Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum (bzw. reflexiven Raum) besitzt eine schwach konvergente Teilfolge.*

Satz 3.1.2 *Seien B_1, B_2 Banachräume. Die Einbettung $B_1 \subset B_2$ sei stetig. Dann gilt für die Dualräume die stetige Einbettung $B_2' \subset B_1'$.*

Das folgende Lemma ist ein Hilfssatz für Lemma 2.3.

Lemma 3.1.1 *Seien V, H zwei Hilberträume mit stetiger Einbettung $V \subset H$. Sei $(u_n) \subset V$ eine Folge, die in H schwach gegen $h \in H$ konvergiert und in V beschränkt ist:*

$$\|u_n\|_V \leq C \quad \forall n$$

Dann gilt auch $h \in V$ und $u_n \overset{V}{\rightharpoonup} h$.

Beweis Die Folge (u_n) besitzt eine in V schwach konvergente Teilfolge (u_n'). Es existiert also $v \in V$, so daß

$$u_n' \overset{V}{\rightharpoonup} v.$$

Folglich gilt für jedes $\varphi_V \in V'$

$$\langle \varphi_V, u_n' \rangle_V \to \langle \varphi_V, v \rangle_V .$$

Wegen Satz 3.1.2 ist dann auch $\varphi_H \in H'$ Element von V', also gilt

$$\langle \varphi_H, u_n' \rangle_H \to \langle \varphi_H, v \rangle_H .$$

Also hat die Folge (u_n') in H den schwachen Grenzwert v. Da diese Folge in H den schwachen Grenzwert h besitzt, gilt $v = h$.
Nun ist noch zu zeigen, daß nicht nur eine Teilfolge gegen v konvergiert, sondern die gesamte Folge (u_n).
Angenommen, es würde nicht die ganze Folge konvergieren. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$, ein Funktional $\varphi_0 \in V'$ und eine Teilfolge $(\overline{u}_n)$, so daß

$$|\langle \varphi_0, \overline{u}_n - v \rangle_V| \geq \varepsilon \quad \forall n.$$

Diese Teilfolge $(\overline{u}_n)$ ist im Hilbertraum V beschränkt, besitzt also eine in V schwach konvergente Teilfolge $(\overline{u}'_n)$ mit Grenzwert w. Nach obigen Darlegungen muß dann $w = h$ gelten. Das ist ein Widerspruch. Also konvergiert die gesamte Folge schwach in V gegen h. ■
Ein Beweis für den nächsten Satz findet sich in [Rek84].

Satz 3.1.3 (Lax–Milgram) *Sei H ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $(.,.)$ und $A(.,.)$ eine Bilinearform über $H \times H$. A sei beschränkt und positiv definit, das heißt, es existieren positive Konstanten K, α, so daß für alle $u, v \in H$*

$$|A(u,v)| \le K \|u\|_H \|v\|_H \,,$$

$$A(u,u) \ge \alpha \|u\|_H^2$$

gilt.
Dann existiert zu jedem linearen, beschränkten Funktional F über H genau ein $z \in H$, so daß

$$F(v) = A(v,z) \quad \forall v \in H.$$

Weiterhin gilt

$$\|z\|_H \le \frac{1}{\alpha} \|F\|_{H'} = \frac{1}{\alpha} \sup_{\|v\|_H = 1} |F(v)|.$$

Für die Theorie der Funktionenräume wird der Begriff des lokalkonvexen Raumes und der starken Topologie benötigt, vgl. [Zei76].

Definition 3.1.1 *Sei K ein bewerteter Körper mit Bewertungsfunktion $|.|$, zum Beispiel $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$.*
Ein lokalkonvexer Raum $(X, (p_j))$ besteht aus einem linearem Raum X über K und einer Familie von Halbnormen $(p_j)_{j \in I}$, so daß gilt:

$$p_j(x) = 0 \quad \forall j \in I \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$$

Die Teilmenge $U \subset X$ heißt offen, wenn zu jedem $x_0 \in U$ ein positives ε und $j_1, \ldots, j_n \in I$ existieren, so daß

$$\{x : p_{j_i}(x - x_0) < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\} \subset U$$

gilt. Diese offenen Mengen erzeugen in X eine Topologie τ.

Bemerkung 3.1.1 *Die Topologie τ nennt man „die durch $(p_j)_{j \in I}$ erzeugte Topologie“.*

Bemerkung 3.1.2 *Der Raum (X, τ) ist ein topologischer Vektorraum, daß heißt, die Operationen*

$$\begin{aligned} \imath + \imath : X \times X &\to X, & \imath \cdot \imath : K \times X &\to X, \\ (x,y) &\mapsto x + y & (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

sind stetig in der Topologie τ.

Bemerkung 3.1.3 *Der Raum (X, τ) ist separiert.*

Definition 3.1.2 *Die Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert gegen $x \in X$, wenn für jedes $j \in I$ gilt:*

$$p_j(x_n - x) \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Definition 3.1.3 *Die Menge $M \subset X$ heißt in X beschränkt, wenn für jedes $j \in I$*

$$\sup_{x\in M} p_j(x) < \infty$$

gilt.

Definition 3.1.4 *Sei X ein lokalkonvexer Raum über K. Der duale Raum zu X („der Dual X'“) ist die Menge aller linearen und stetigen Abbildungen $f : X \to K$.*
Die Familie der Halbnormen

$$\left\{ p_M : f \in X' \mapsto p_M(f), \quad p_M(f) := \sup_{x\in M} |f(x)|, \quad M \subset X, M \text{ beschränkt} \right\}$$

erzeugt in X' die starke* Topologie τ_S^* und die Familie der Halbnormen

$$\{p_x : f \in X' \mapsto p_x(f), \quad p_x(f) := |f(x)|, \quad x \in X\}$$

erzeugt in X' die schwache* Topologie τ_W^*.

Definition 3.1.5 *Die schwache Topologie τ_W auf X wird durch die Halbnormen*

$$\{p_f : x \in X \mapsto p_f(x), \quad p_f(x) := |f(x)|, \quad f \in X'\}$$

erzeugt.

Wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind, wird “starke Topologie“ anstatt “starker* Topologie“ geschrieben.
In reflexiven Räumen ist jede beschränkte Menge schwach kompakt. Nun wird ein Kriterium für die Reflexivität von normierten Räumen angegeben.

Definition 3.1.6 *Ein normierter Raum heißt gleichmäßig konvex, wenn gilt:*
Aus $\|x_n\| \le 1$, $\|y_n\| \le 1$, $\|x_n + y_n\| \to 2$ folgt $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Für gleichmäßige konvexe Räume gilt:

Satz 3.1.4 (Satz von Milman) *Gleichmäßig konvexe Räume sind reflexiv.*

Weiterhin gilt:

Satz 3.1.5 *Die Räume $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ sind gleichmäßig konvex.*

3.1.1 Bochner–Integral

Das Bochner–Integral verallgemeinert Integrale der Gestalt $\int_a^b f(x)\,dx$, f reellwertig. In den Büchern [Wlo82] und [Kač85] wird die Theorie der Bochner–Integrale dargestellt.
In diesem Abschnitt werden diejenigen Aussagen dieser Theorie zusammengefaßt, die für die vorliegende Arbeit von Bedeutung sind (vgl. Kapitel 2).
Sei V ein Banachraum, $I = (0, T)$. Sei V' der Dual zu V und $\langle f, v\rangle$ die Dualität zwischen $f \in V'$ und $v \in V$.

Definition 3.1.7 *Die Funktion $u : I \to V$ heißt einfach, wenn endlich viele $a_i \in V$, meßbare $E_i \subset I$ $(i = 1, \dots, n)$ existieren mit $\cup_{i=1}^n E_i = I$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und*

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i},$$

wobei χ_{E_i} die charakteristische Funktion von E_i ist.
Wenn die Mengen E_i Teilintervalle von I sind, heißt u Stufenfunktion.

Definition 3.1.8 *Die Funktion $u : I \to V$ heißt (Bochner–)meßbar, wenn eine Folge (u_n) einfacher Funktionen existiert, so daß fast überall in I $u_n(t) \to u(t)$ gilt. Wenn zusätzlich gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_I \|u_n(t) - u(t)\|_V \, dt = 0,$$

dann heißt u (Bochner–)integrierbar und es ist

$$\int_I u(t)\, dt := \lim_{n\to\infty} \int_I u_n(t)\, dt.$$

Definition 3.1.9 *Die Funktion $u : I \to V$ ist (stark) differenzierbar in $t_0 \in I$, wenn $w \in V$ existiert, so daß*

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}(u(t_0 + h) - u(t_0)) - w \right\|_V = 0.$$

Dann sei $\frac{du(t_0)}{dt} := u'(t_0) := w$.

Im nächsten Lemma werden einige Eigenschaften meßbarer Funktionen zusammengestellt.

Satz 3.1.6 *Sei u Bochner–meßbar. Dann gilt:*

1. *u ist integrierbar genau dann, wenn $\|u(t)\|_V \in L_1(I)$,*
2. $$\left\| \int_I u(t)\, dt \right\|_V \leq \int_I \|u(t)\|_V \, dt,$$
3. *wenn u integrierbar ist, dann ist $v(t) := \int_{t_0}^t u(s)\, ds$ differenzierbar fast überall in I und es gilt $v_t(t) = u(t)$,*
4. *wenn u integrierbar ist und $f \in V'$, dann gilt*
   $$\int_I \langle f, u(t) \rangle \, dt = \left\langle f, \int_I u(t)\, dt \right\rangle.$$

Definition 3.1.10 *Für $1 \leq p < \infty$ sei $L_p(I, V)$ der lineare Raum aller meßbaren Funktionen $u : I \to V$, für die*

$$\|u\|_{L_p(I,V)}^p := \int_I \|u(t)\|_V^p \, dt$$

endlich ist.
Mit $L_\infty(I, V)$ sei der lineare Raum der meßbaren Funktionen $u : I \to V$ bezeichnet, für die

$$\|u\|_{L_\infty(I,V)} := \sup_{t\in I} \text{ess} \, \|u(t)\|_V < \infty.$$

Diese Räume haben folgende Eigenschaften:

Satz 3.1.7 *1. $L_p(I,V)$ und $L_\infty(I,V)$ sind Banachräume,*

2. wenn $u \in L_p(I,V)$ und $v \in L_q(I,V')$, wobei $p^{-1}+q^{-1}=1$, falls $1<p<\infty$ und $q=1$ ($q=\infty$), falls $p=\infty$ ($p=1$), dann gilt

$$\int_I \langle v(t), u(t)\rangle \, dt \le \|v\|_{L_q(I,V')} \|u\|_{L_p(I,V)},$$

3. wenn V ein reflexiver Banachraum ist und $1 \le p < \infty$, dann ist der duale Raum zu $L_p(I,V)$ isometrisch isomorph zu $L_q(I,V')$, das heißt, zu jedem $f \in (L_p(I,V))'$ existiert ein $v \in L_q(I,V')$ mit

$$f(u) = \int_I \langle v(t), u(t)\rangle \, dt \quad \forall u \in L_p(I,V).$$

Für $p>1$ ist dann $L_p(I,V)$ ein reflexiver Banachraum.

Im folgenden werden Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen definiert.

Definition 3.1.11 *Mit $C(I,V)$ wird der Banachraum aller Funktionen $u: I \to V$ bezeichnet, für die für alle $t_0 \in I$ $\lim_{t\to t_0} \|u(t)-u(t_0)\|_V = 0$ gilt. Sei $\|u\|_{C(I,V)} := \|u\|_{L_\infty(I,V)}$. Sei weiterhin $C^1(I,V)$ der Banachraum der stark differenzierbaren $u \in C(I,V)$, für die $u_t \in C(I,V)$. Der Banachraum $C^{0,1}(I,V)$ besteht aus allen Funktionen $u \in C(I,V)$, für die eine Konstante $C_u > 0$ existiert mit*

$$\|u(t)-u(t')\|_V \le C_u |t-t'| \quad \forall t,t' \in I.$$

Sei $W_p^1(I,V)$ der Banachraum der stark differenzierbaren $u \in L_p(I,V)$ mit $u_t \in L_p(I,V)$.

Damit gilt:

Satz 3.1.8 *1. $C^1(I,V)$ ist dicht in $L_p(I,V)$, wenn $1 \le p < \infty$,*

2. Die Menge der Stufenfunktionen ist dicht in $L_p(I,V)$, falls $1 \le p < \infty$.

Weiterhin läßt sich zeigen:

Satz 3.1.9 *Wenn $u_n \rightharpoonup u$ im Raum $L_p(I,V)$ und $\frac{du_n}{dt} \rightharpoonup v$ in $L_p(I,V)$, dann ist $\frac{du}{dt} = v$.*

Sei nun H ein Hilbertraum mit stetiger und dichter Einbettung $V \subset H$. Der Raum V sei reflexiv. Dann ist auch die Einbettung $H' \subset V'$ dicht. Der Raum H kann mit H' identifiziert werden, so daß $V \subset H \subset V'$ folgt. Dann existiert zu jedem $y \in H$ ein $f_y \in V'$, so daß

$$(y,v)_H = \langle f_y, v\rangle \quad \forall v \in V.$$

Es ist demnach möglich, das Skalarprodukt $(.,.)$ des Hilbertraumes H mit der Bilinearform $\langle .,. \rangle$ über $V' \times V$ zu identifizieren.
Mit diesen Bezeichnungen gilt folgender Satz:

Satz 3.1.10 *Sei $u,v \in L_p(I,V)$, $(1<p<\infty)$ und $u_t, v_t \in L_q(I,V')$, wobei $p^{-1}+q^{-1}=1$. Dann gilt $u,v \in C(I,H)$ und*

$$(u(t),v(t)) - (u(s),v(s)) = \int_s^t \left\langle \frac{du(\tau)}{d\tau}, v(\tau)\right\rangle + \left\langle \frac{dv(\tau)}{d\tau}, u(\tau)\right\rangle \, d\tau.$$

Weiterhin läßt sich zeigen:

Satz 3.1.11 *Sei V ein Hilbertraum. Dann sind auch $L_2(I,V)$ und $W_2^1(I,V)$ Hilberträume mit den Skalarprodukten*

$$(u,v)_{L_2(I,V)} = \int_I (u(t),v(t))_V \; dt,$$

$$(u,v)_{W_2^1(I,V)} = (u,v)_{L_2(I,V)} + (u_t,v_t)_{L_2(I,V)} .$$

3.1.2 Spektraltheorie abschließbarer Operatoren

In diesem Abschnitt wird das Spektrum gewisser unbeschränkter Operatoren untersucht. Die hier vorgestellten Hilfsmittel werden in einem späteren Abschnitt für die Untersuchung gewisser entarteter elliptischer Differentialoperatoren benötigt.
Im folgenden sei H ein separabler, unendlichdimensionaler komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $(.,.)$ und A ein linearer Operator, dessen Definitionsbereich $D(A)$ und Wertebereich $R(A)$ in H liegen.
Die folgenden Sätze finden sich in [Tri72].

Definition 3.1.12 *Der Operator A heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $x_n \to x \in H$ mit $(x_n) \subset D(A)$ und $Ax_n \to y$ folgt, daß $x \in D(A)$ und $Ax = y$.*

Jeder lineare beschränkte Operator mit $D(A) = H$ ist abgeschlossen. Es gilt umgekehrt der Satz:

Satz 3.1.12 *Wenn A abgeschlossen ist und $D(A) = H$, dann ist A beschränkt.*

Weiterhin gilt

Satz 3.1.13 *A ist genau dann abgeschlossen, wenn $(D(A), [.,.])$ ein Hilbertraum ist. Hierbei ist $[x,y] := (x,y) + (Ax, Ay)$.*

Die später untersuchten Operatoren sind nicht abgeschlossen, aber ihr Definitionsgebiet läßt sich so erweitern, daß diese Operatoren abgeschlossen werden. Deshalb werden nun Erweiterungen von Operatoren definiert.

Definition 3.1.13 *Der lineare Operator B heißt Erweiterung oder Fortsetzung von A, $(A \subset B)$, wenn*

$$D(A) \subset D(B) \text{ und } Ax = Bx \text{ für jedes } x \in D(A)$$

gilt. A heißt abschließbar, wenn es einen abgeschlossenen Operator B mit $A \subset B$ gibt.

Der nächste Satz sichert die Existenz einer sogenannten „minimalen" Erweiterung.

Satz 3.1.14 *Sei A abschließbar. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Erweiterung $\overline{A}$, so daß $\overline{A}$ abgeschlossen ist und daß für jede Erweiterung B von A $A \subset \overline{A} \subset B$ gilt. $\overline{A}$ heißt Abschluß des Operators A. Der Definitionsbereich $D(\overline{A})$ von $\overline{A}$ ist der Abschluß des Raumes $D(A)$ in der Norm $\|x\|_{\overline{A}} := \sqrt{[x,x]}$.*

Nun werden adjungierte Operatoren definiert.

Definition 3.1.14 *Sei $D(A)$ dicht in H. Sei*

$$D(A^*) := \{y \in H : \exists y^* \in H \text{ mit } (Ax,y) = (x,y^*) \quad \forall x \in D(A)\}$$

und $A^*y := y^*$, falls $y \in D(A^*)$.

Bemerkung 3.1.4 *Wegen* $D(A) \overset{dicht}{\subset} H$ *ist dieses* y^* *eindeutig bestimmt.*

Diese Menge $D(A^*)$ hat folgende Eigenschaften:

Satz 3.1.15 *Sei* $D(A)$ *dicht in* H. *Dann gilt*

1. $D(A^*)$ *ist linearer Raum,* A^* *ist linearer abgeschlossener Operator,*
2. *Wenn* B *Erweiterung zu* A *ist, dann ist* A^* *Erweiterung zu* B^*,
3. *Wenn* A *abschließbar ist, dann gilt* $A^* = \left(\overline{A}\right)^*$.

A^* heißt adjungierter Operator zu A.

Definition 3.1.15 *Sei* $D(A)$ *dicht in* H.
A *heißt symmetrisch, wenn* $(Ax, y) = (x, Ay)$ *für alle* $x, y \in D(A)$ *gilt.*
A *heißt selbstadjungiert, falls* $A^* = A$ *gilt.*

Der Zusammenhang zwischen diesen Begriffen wird durch den folgenden Satz beschrieben.

Satz 3.1.16 *Es gilt*

1. A *selbstadjungiert* $\Longrightarrow$ A *symmetrisch,*
2. A *symmetrisch* $\Longrightarrow$ A *abschließbar und* $\overline{A}$ *symmetrisch,*
3. $A \subset B$, A, B *symmetrisch* $\Longrightarrow$ $B \subset A^*$,
4. *Wenn* A *selbstadjungiert ist, dann ist* A *abgeschlossen. Wenn* $A \subset B$ *und* B *symmetrisch ist, dann ist* $B = A$.

Bemerkung 3.1.5 *Die letzte Aussage dieses Satzes bedeutet, daß selbstadjungierte Operatoren keine nichttrivialen symmetrischen Erweiterungen besitzen.*

Nun folgt ein Kriterium, wann A selbstadjungiert ist.

Satz 3.1.17 *Sei* A *symmetrisch.*

1. *Wenn* $D(A) = H$, *dann ist* A *selbstadjungiert und beschränkt.*
2. *Wenn es ein* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gibt mit* $R(A+\lambda E) = R(A+\overline{\lambda}E) = H$, *dann ist* A *selbstadjungiert.*

Der nächste Satz beschreibt die Zerlegung des Hilbertraumes H in eine Summe geeigneter Null– und Bildräume.

Satz 3.1.18 *Sei* A *symmetrisch und* $\lambda \in \mathbb{C}$.
Dann gilt $D(A + \lambda E) = D(A)$, $(A + \lambda E)^* = A^* + \overline{\lambda}E$ *und*

$$H = \overline{R(A + \lambda E)} \oplus N(A^* + \overline{\lambda}E).$$

Hierbei steht $N(B)$ für den Nullraum des Operators B.
Der folgende Satz beschreibt den Abschluß des Bildraumes eines halbbeschränkten Operators.

Satz 3.1.19 *Sei A ein halbbeschränkter Operator, das heißt, es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit*

$$(Ax, x) \geq c \, \|x\|_H^2 \quad \forall x \in D(A).$$

Sei weiterhin $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $\lambda + c > 0$. Dann ist

$$\overline{R(\overline{A} + \lambda E)} = R(\overline{A} + \lambda E).$$

Nun stehen alle Begriffe bereit, um das Spektrum selbstadjungierter Operatoren zu untersuchen.

Definition 3.1.16 *Ein selbstadjungierter Operator, der ausschließlich Eigenwerte mit endlichdimensionalen Eigenräumen besitzt, heißt Operator mit reinem Punktspektrum.*

Der folgende Satz ist von zentraler Bedeutung für die Untersuchung entarteter elliptischer Differentialgleichungen.

Satz 3.1.20 *Sei A ein Operator mit reinem Punktspektrum. Dann gilt:*

1. *A ist nicht beschränkt.*

2. *Die Eigenwerte von A können unter Berücksichtigug der Vielfachheit nach der Größe geordnet werden, sie häufen sich nicht im Endlichen. Wenn $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die Eigenwerte und $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ die orthonormierten Eigenelemente bezeichnen, dann ist das System $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vollständig und es gilt*

$$\begin{aligned}
&|\lambda_j| \to \infty \text{ für } j \to \infty, \\
&D(A) = \left\{ x \in H : \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2 |\,(x, x_j)\,|^2 < \infty \right\}, \\
&Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \,(x, x_j)\, x_j.
\end{aligned}$$

Die folgende Definition wird benötigt, um ein Kriterium zu formulieren, wann ein Operator ein reines Punktspektrum besitzt.

Definition 3.1.17 *A heißt positiv definit, wenn es ein $c > 0$ gibt mit*

$$(Ax, x) \geq c \, \|x\|_H^2 \quad \forall x \in D(A).$$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda + c > 0$. Dann sei

$$\|x\|_\lambda := \sqrt{(Ax, x) + \lambda \,(x, x)} \text{ für } x \in D(A).$$

Sei weiterhin

$$H_A := H_\lambda := \left\{ x \in H : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x_n \xrightarrow{H} x, \quad x_n \in D(A) \ \forall n, \quad \|x_n - x_m\|_\lambda \xrightarrow{n,m \to \infty} 0 \right\}.$$

Bemerkung 3.1.6 *Mit der Formulierung $\|x_n - x_m\|_\lambda \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ ist gemeint, daß die Folge (x_n) eine Cauchyfolge in der Norm $\|.\|_\lambda$ ist. H_λ ist ein Hilbertraum, $D(A)$ liegt in H dicht. Für $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\mu + c > 0$ gilt $H_\mu = H_\lambda$ und die Normen $\|.\|_\mu$, $\|.\|_\lambda$ sind zueinander äquivalent. Für positiv definite Operatoren ist $H_A = H_{\overline{A}}$ einschließlich der Äquivalenz der Normen.*

Der folgende Satz ist für den Nachweis der Existenz von Lösungen gewisser elliptischer Differentialgleichungen wichtig.

Satz 3.1.21 *Sei $\overline{A}$ selbstadjungiert und positiv definit. Dann gilt $R(\overline{A}) = H$.*

Beweis Nach Satz 3.1.18 und Satz 3.1.19 gilt mit $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} H &= \overline{R(\overline{A})} \oplus N(\overline{A}^*) \\ &= R(\overline{A}) \oplus N(\overline{A}^*) \\ &= R(\overline{A}) \oplus N(\overline{A}) \\ &= R(\overline{A}) \oplus \{0\} = R(\overline{A}), \end{aligned}$$

weil $\overline{A}$ positiv definit ist. ■
Es gilt der folgende Satz.

Satz 3.1.22 (Kriterium von Rellich) *Sei A ein selbstadjungierter positiv definiter Operator. A ist genau dann ein Operator mit reinem Punktspektrum, wenn der Einbettungsoperator $E(H_A \to H)$ kompakt ist.*

„Kleine“ symmetrische Störungen selbstadjungierter Operatoren erzeugen ebenfalls einen selbstadjungierten Operator, wie das folgende Kriterium zeigt:

Satz 3.1.23 (Kriterium von Kato) *Sei A selbstadjungiert, B symmetrisch, $D(A) \subset D(B)$. Seien $0 \leq \varepsilon < 1$ und $C > 0$ reelle Zahlen, so daß für alle $x \in D(A)$*

$$\|Bx\|_H \leq \varepsilon \|Ax\|_H + C \|x\|_H$$

gilt. Dann ist der Operator $A + B$ selbstadjungiert mit $D(A + B) = D(A)$.

Definition 3.1.18 *Sei A symmetrisch.*
A heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn $\overline{A}$ selbstadjungiert ist.

3.2 Theorie der Funktionenräume

3.2.1 Die Räume $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$, $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N)$, $H^s_p(\mathbb{R}^N)$

Die hier vorgestellten Räume werden für die Definition von Sobolev–Räumen benötigt. $\mathfrak{S}$ ist der Raum der schnell fallenden Funktionen, sein Dual $\mathfrak{S}'$ ist der Raum der temperierten Distributionen $\mathfrak{S}'$.
Weiterhin ist $\mathfrak{D}$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger und sein Dual $\mathfrak{D}'$ ist der Raum gewisser Distributionen, vgl. [Hör69]. Die Räume $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N)$ und $H^s_p(\mathbb{R}^N)$ sind weitreichende Verallgemeinerungen der Sobolev–Slobodeckij–Räume und werden hier für die Definition gewichteter Sobolev–Räume verwendet, vgl. [Tri78].

Definition 3.2.1 *Die Fouriertransformation einer Funktion $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^N)$ wird definiert durch*

$$Ff(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\, dx,$$

wobei $x = (x_1, \ldots, x_N)$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ *und* $\langle x, \xi\rangle := x_1\xi_1 + \cdots + x_N\xi_N$. *Die Fourierrücktransformation einer Funktion* $g(\xi) \in L_1(\mathbb{R}^N)$ *wird gegeben durch*

$$F^{-1}g(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \xi, x\rangle} g(\xi)\, d\xi.$$

Im folgenden wird die Multiindexschreibweise verwendet, das heißt, für $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$ und $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ sei

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \cdots + \alpha_N, \quad x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}, \\ D_j^{\alpha_j} &:= \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}, \quad D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N}. \end{aligned}$$

Nun wird der Raum der schnell fallenden Funktionen definiert.

Definition 3.2.2 *Der Raum* $\mathfrak{S}$ *besteht aus allen Funktionen* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, *für die*

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$$

gilt.

Bemerkung 3.2.1 *Die Halbnormen* $p_{\alpha,\beta}$ *erzeugen eine Topologie in* $\mathfrak{S}$. *Der Raum* $\mathfrak{S}$ *ist lokalkonvex.*

Es gilt folgender Satz.

Satz 3.2.1 *Die Fouriertransformation ist eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung von* $\mathfrak{S}$ *auf* $\mathfrak{S}$. *Die Fouriertransformierte zu* $D_j^1\varphi$ *(bzw.* $x_j\varphi$*) lautet* $-i\xi_j F\varphi$ *(bzw.* $iD_j^1 F\varphi$*). Für jede Funktion* $\varphi \in \mathfrak{S}$ *gilt* $F^{-1}(F\varphi) = \varphi$.

Weiterhin gelten folgende Gleichungen:

Satz 3.2.2 *Seien* $\varphi, \psi \in \mathfrak{S}$. *Dann ist*

$$\begin{aligned} \int (F\varphi)\psi\, dx &= \int \varphi(F\psi)\, dx, \\ \int \varphi\overline{\psi}\, dx &= \int (F\varphi)\overline{(F\psi)}\, dx, \\ F(\varphi * \psi) &= (F\varphi)(F\psi), \\ F(\varphi\psi) &= (F\varphi) * (F\psi). \end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\overline{\psi}$ *die komplex konjugierte Zahl zu* ψ *und* $(\varphi * \psi)(x) := \int \varphi(y)\psi(x-y)\, dy$ *die Faltung der Funktionen* φ *und* ψ.

Nun wird der Raum $\mathfrak{S}'$ definiert.

Definition 3.2.3 *Der Raum der temperierten Distributionen ist der zu* $\mathfrak{S}$ *duale Raum* $\mathfrak{S}'$. *Dieser lokalkonvexe Raum wird mit der starken Topologie versehen.*

Bemerkung 3.2.2 *Sei* f *eine meßbare Funktion, die höchstens wie ein Polynom wächst:*

$$\exists C_f > 0, n \in \mathbb{N}: \quad |f(x)| \le C_f(1 + |x|)^n \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

Dann ist T_f mit

$$T_f(\varphi) := \int f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathfrak{S}$$

eine temperierte Distribution. Man nennt $\mathfrak{S}'$ auch den Raum der „Distributionen mit schwachem Wachstum".
Im folgenden wird f mit T_f identifiziert.

Mit dieser Konvention gilt:

Satz 3.2.3 *Für jedes $1 \leq p < \infty$ gilt $L_p(\mathbb{R}^N) \subset \mathfrak{S}'$.*

Die Fouriertransformation läßt sich auch für temperierte Distributionen erklären:

Definition 3.2.4 *Die Fouriertransformierte zu $u \in \mathfrak{S}'$ sei*

$$Fu : \varphi \mapsto (Fu)(\varphi) := u(F\varphi).$$

Die Fourierrücktransformierte wird entsprechend definiert.

Diese Fouriertransformation hat folgende Eigenschaften:

Satz 3.2.4 *Die Fouriertransformation bildet $\mathfrak{S}'$ umkehrbar eindeutig und stetig auf $\mathfrak{S}'$ ab. Für jedes $\varphi \in \mathfrak{S}'$ ist $F^{-1}F\varphi = \varphi$.*

Weiterhin gilt

Satz 3.2.5 *Wenn $u \in L_2(\mathbb{R}^N)$, dann ist auch $Fu \in L_2(\mathbb{R}^N)$ und für die L_2–Normen gilt $\|u\|_2 = \|Fu\|_2$.*

Nun werden noch die Räume $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ definiert.

Definition 3.2.5 *Der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ der in Ω unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω wird mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Sei $\mathfrak{D}'$ der Raum der stetigen Linearformen über $\mathfrak{D}$, das heißt:*
Die lineare Abbildung $F : \mathfrak{D} \to \mathbb{R}$ ist Element von $\mathfrak{D}'$, wenn zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ positive Konstanten $C \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ existieren, so daß für jedes $\varphi \in C_0^\infty(K)$ gilt:

$$|F(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Der Raum $\mathfrak{D}'$ wird mit der schwachen Topologie versehen, das heißt, die Topologie wird durch die Halbnormen

$$\{p_\varphi : p_\varphi(F) := |F(\varphi)|, \varphi \in \mathfrak{D}\}$$

erzeugt.

Bemerkung 3.2.3 *Es ist auch möglich, den Raum $\mathfrak{D}'$ als dualen Raum des lokalkonvexen Raumes $\mathfrak{D}$ einzuführen. Dann ist es allerdings erforderlich, den Raum $\mathfrak{D}$ mit geeigneten Halbnormen zu versehen. Diese Halbnormen sind recht kompliziert, vgl. [Hör69].*

Es lassen sich auch Ableitungen für Distributionen definieren:

Definition 3.2.6 *Sei $u \in \mathfrak{D}'$, dann wird die Distribution $D^\alpha u$ definiert durch*

$$(D^\alpha u)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} u(D^\alpha \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}.$$

Jede Funktion $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ kann mit einer Distribution T_f,

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f\varphi\, dx,$$

identifiziert werden. Damit ist folgende Definition motiviert:

Definition 3.2.7 *Sei $f \in L_1^{loc}(\Omega)$ und α ein Multiindex. Die Funktion $g \in L_1^{loc}(\Omega)$ heißt Distributionenableitung $D^\alpha f$ (schwache Ableitung, Ableitung im Sobolev-Sinn), wenn gilt:*

$$\int_\Omega f(D^\alpha\varphi)\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g\varphi\, dx \quad \forall\varphi \in \mathfrak{D}.$$

Falls $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, dann stimmen die klassische (gewöhnliche, starke) Ableitung und schwache Ableitung überein (mit Ausnahme einer Teilmenge von Ω mit dem Maß Null).
Jede starke Ableitung ist also auch schwache Ableitung. Für spezielle Differentialoperatoren gilt auch eine Umkehrung:

Satz 3.2.6 (Weylsches Lemma) *Sei $u \in L_1^{loc}(\Omega)$ und im Distributionensinn sei $\triangle u = 0$, das heißt, für jedes $\varphi \in \mathfrak{D}$ gilt*

$$\int_\Omega u\triangle\varphi\, dx = 0.$$

Dann ist $u \in C^\infty(\Omega)$ (u ist sogar analytisch) und es gilt $\triangle u = 0$.

Ein ausführlicher Beweis (für den Fall $N = 2$) befindet sich in [Tut83], siehe auch [Tri78] und [Hör69].
In dieser Arbeit wird nicht nur das Weylsche Lemma verwendet werden, sondern auch ein weiterer Regularitätssatz. Dafür werden allerdings einige Funktionenräume benötigt. Deshalb ist dieser Regularitätssatz im Abschnitt 3.4 zu finden, vgl. Satz 3.4.1.
Für schwache Ableitungen gilt folgende Kettenregel:

Satz 3.2.7 *Sei $u \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L_\infty(\mathbb{R})$. Dann gilt: $\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u)$ existiert in Ω und es ist*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ u) = (f' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Ein Beweis ist in [Zei90], Abschnitt 21.23 zu finden.
Nun werden die Räume $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N)$ und $H^s_p(\mathbb{R}^N)$ definiert.
Dazu wird der Raum $\mathbb{R}^N$ in ringförmige Mengen zerlegt:

$$\begin{aligned} M_j &:= \left\{\xi \in \mathbb{R}^N : \quad 2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\right\}, \quad j = 1, 2, \dots, \\ M_0 &:= \left\{\xi \in \mathbb{R}^N : \quad |\xi| \le 2\right\}. \end{aligned}$$

Die Bezeichnung $f \overset{\mathfrak{S}'}{=} \sum_{j=0}^\infty f_j$ bedeutet, daß die Reihe auf der rechten Seite in der starken Topologie des Raumes $\mathfrak{S}'$ gegen f konvergiert.
Mit diesen Bezeichnungen wird definiert (vgl. [Tri78], Abschnitt 2.3.1):

Definition 3.2.8 *Für $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ und $1 \le q < \infty$ sei*

$$B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in \mathfrak{S}' : f \overset{\mathfrak{S}'}{=} \sum_{j=0}^\infty a_j(x), \quad \operatorname{supp} Fa_j \subset M_j \quad \forall j, \quad \sum_{j=0}^\infty \left(2^{sj}\left\|a_j(x)\right\|_p\right)^q < \infty \right\}.$$

Für $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$ und $1 < q < \infty$ sei weiterhin

$$F^s_{p,q}(\mathbb{R}^N) := \Big\{ f \in \mathfrak{S}' : f \overset{\mathfrak{S}'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x), \quad \operatorname{supp} F a_j \subset M_j \quad \forall j, \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |a_j(x)|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx < \infty \Big\}.$$

Die Normen in diesen Räumen werden durch

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} := \inf_{f=\sum a_j} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{sj} \left\| a_j(x) \right\|_p \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

und

$$\|f\|_{F^s_{p,q}} := \inf_{f=\sum a_j} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} |a_j(x)|^q \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

definiert. Weiterhin sei für $-\infty < s < \infty$ und $1 < p < \infty$ $H^s_p(\mathbb{R}^N) := F^s_{p,2}(\mathbb{R}^N)$.
Für $1 < p < \infty$ sei

$$W^s_p(\mathbb{R}^N) := \begin{cases} H^s_p(\mathbb{R}^N) & s = 0, 1, 2, \ldots, \\ B^s_{p,p}(\mathbb{R}^N) & 0 < s, s \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bemerkung 3.2.4 *Die Räume $B^s_{p,q}$ heißen Besov–Räume (für $s > 0$); die Räume H^s_p nennt man Bessel–Potential–Räume (falls $s > 0$). Die Räume W^s_p heißen Sobolev–Räume (falls s ganzzahlig) bzw. Sobolev–Slobodeckij–Räume (falls s nicht ganzzahlig).*

Diese Räume haben folgende Eigenschaften:

Satz 3.2.8 *Die Räume $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ sind Banachräume. Die Räume $C^\infty_0(\mathbb{R}^N)$ und $\mathfrak{S}$ liegen in $B^s_{p,q}$ und $F^s_{p,q}$ dicht.*

3.2.2 Die Lebesgue–Räume $L_p(\Omega)$

In diesem Abschnitt werden einige Hilfssätze über die Normen der Lebesgue–Räume bewiesen.

Lemma 3.2.1 *Sei $u \in L_\infty(\Omega)$. Dann gilt* $\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty$.

Beweis Der Beweis besteht aus zwei Teilen.
Erster Teil:
Es ist

$$\limsup_{p\to\infty} \|u\|_p = \limsup_{p\to\infty} \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_\infty \lim_{p\to\infty} \left(\int_\Omega 1 \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \|u\|_\infty ,$$

also $\limsup_{p\to\infty} \|u\|_p \leq \|u\|_\infty$.
Zweiter Teil:
Sei $M_\varepsilon := \{x \in \Omega : |u(x)| \geq \|u\|_\infty - \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|u\|_p &= \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{M_\varepsilon} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{M_\varepsilon} (\|u\|_\infty - \varepsilon)^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\|u\|_\infty - \varepsilon) \left(\int_{M_\varepsilon} 1 \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Daraus folgt $\liminf_{p\to\infty} \|u\|_p \geq \|u\|_\infty - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.
Daraus ergibt sich $\liminf_{p\to\infty} \|u\|_p \geq \|u\|_\infty$. Wegen $\limsup_{p\to\infty} \|u\|_p \leq \|u\|_\infty$ folgt die Behauptung. ■

Lemma 3.2.2 *Sei $u \in L_p(\Omega)$ für alle p mit $1 \leq p < \infty$. Sei weiterhin $\|u\|_p \leq M$ für alle p. Dann ist $u \in L_\infty(\Omega)$ und $\|u\|_\infty \leq M$.*

Beweis Für $R > 0$ sei

$$u^R(x) := \begin{cases} u(x) & |u(x)| \leq R, \\ R\,\mathrm{sign}(u(x)) & |u(x)| > R. \end{cases}$$

Es ist $u^R \in L_\infty(\Omega), \quad |u^R(x)| \leq |u(x)| \quad \forall x \in \Omega$. Daraus folgt $\left\|u^R\right\|_p \leq \|u\|_p \leq M$ für alle p. Nach Lemma 3.2.1 ergibt sich $\left\|u^R\right\|_\infty \leq M$. Sei nun $R > M$ gewählt. Dann folgt $\sup\mathrm{ess}_{x\in\Omega} |u^R(x)| = \left\|u^R\right\|_\infty \leq M$. Fast überall in Ω gilt also $|u^R(x)| \leq M < R$, also auch $u^R(x) = u(x)$. Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

Lemma 3.2.3 *Seien $u, v \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$. Dann ist*

$$\left\||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right\|_{p'} \leq (p-1)\left(\|u\|_p + \|v\|_p\right)^{p-2} \|u-v\|_p .$$

Beweis Es ist

$$\begin{aligned}
\left\||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right\|_{p'} &= \left\|\int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(|su+(1-s)v|^{p-2}\left(su+(1-s)v\right)\right) ds\right\|_{p'} \\
&= \left\|\int_0^1 (p-1)|su+(1-s)v|^{p-2}(u-v)\, ds\right\|_{p'} \\
&\leq (p-1)\left\|(|u|+|v|)^{p-2}\,|u-v|\right\|_{\frac{p}{p-1}} \\
&\leq (p-1)\left(\int_\Omega \underbrace{(|u|+|v|)^{\frac{p(p-2)}{p-1}}}_{\frac{p-1}{p-2}} \underbrace{|u-v|^{\frac{p}{p-1}}}_{p-1} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} .
\end{aligned}$$

Die Höldersche Ungleichung liefert mit diesen Exponenten

$$\left\||u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right\|_{p'} \leq (p-1)\left(\|u\|_p + \|v\|_p\right)^{p-2} \|u-v\|_p .$$

Das ist die Behauptung. ■

3.2.3 Die gewichteten Lebesgue–Räume $L_{pg}(\Omega)$

In diesem Abschnitt werden gewichtete Lebesgue-Räume definiert und untersucht.

Definition 3.2.9 *Die Funktion $g(x)$ heißt Gewichtsfunktion, wenn gilt:*

1. $g \in L_\infty(\Omega)$,
2. $g(x) > 0$ *fast überall in* Ω,

3. $\frac{1}{g(x)} \in L_1(\Omega)$.

Definition 3.2.10 *Für* $1 \leq p < \infty$ *sei*

$$L_{pg}(\Omega) := \left\{ u(x) : \int_\Omega g(x)|u(x)|^p \, dx < \infty, u \text{ meßbar} \right\}.$$

Satz 3.2.9 *Die Menge* $L_{pg}(\Omega)$ *ist ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{p,g} := \left(\int_\Omega g(x)|u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis Zunächst wird gezeigt, daß $L_{pg}(\Omega)$ ein linearer Raum ist.

1. Sei $u \in L_{pg}(\Omega)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist offensichtlich auch $\lambda u \in L_{pg}(\Omega)$.
2. Seien $u_1, u_2 \in L_{pg}(\Omega)$, daraus folgt $u_1 g^{1/p}, u_2 g^{1/p} \in L_p(\Omega)$. Dann folgt $(u_1 + u_2) g^{1/p} \in L_p(\Omega)$, also auch $u_1 + u_2 \in L_{pg}(\Omega)$.

Nun werden die Normeigenschaften nachgewiesen. Es sei hier nur die Dreiecksungleichung gezeigt. Die weiteren Normeigenschaften sind offensichtlich erfüllt.
Seien $u_1, u_2 \in L_{pg}(\Omega)$, dann folgt

$$\|u_1 + u_2\|_{p,g} = \left\| u_1 g^{1/p} + u_2 g^{1/p} \right\|_p \leq \left\| g^{1/p} u_1 \right\|_p + \left\| g^{1/p} u_2 \right\|_p = \|u_1\|_{p,g} + \|u_2\|_{p,g}.$$

Zu zeigen bleibt noch die Vollständigkeit des Raumes $L_{pg}(\Omega)$. Sei $(u_n) \subset L_{pg}(\Omega)$ eine Cauchyfolge, das heißt $\|u_n - u_m\|_{p,g} < \varepsilon \; \forall n, m \geq N_0(\varepsilon)$. Mit $v_n := g^{1/p} u_n$ folgt $\|v_n - v_m\|_p < \varepsilon \; \forall n, m \geq N_0(\varepsilon)$, also ist (v_n) eine Cauchyfolge im Raum $L_p(\Omega)$. Es gibt demnach ein $v \in L_p(\Omega)$, so daß $\|v_n - v\|_p < \varepsilon \; \forall n \geq N_1(\varepsilon)$. Sei $u := v g^{-1/p}$, diese Definition ist fast überall in Ω sinnvoll, offensichtlich gilt $u \in L_{pg}(\Omega)$. Daraus ergibt sich $\left\| g^{\frac{1}{p}} u_n - g^{\frac{1}{p}} u \right\|_p < \varepsilon \; \forall n \geq N_1(\varepsilon)$, also $\|u_n - u\|_{p,g} < \varepsilon \; \forall n \geq N_1(\varepsilon)$.
Damit ist der Satz bewiesen. ■
Jetzt werden einige Einbettungssätze hergeleitet.

Satz 3.2.10 *Sei* $1 \leq q < p$, $u \in L_{pg}(\Omega)$ *und*

$$\left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{q}{p-q}} \in L_1(\Omega).$$

Dann gilt $u \in L_q(\Omega)$ *und es ist*

$$\|u\|_q \leq \left\| g^{-1} \right\|_{\frac{q}{p-q}}^{\frac{1}{p}} \|u\|_{p,g}.$$

Beweis Aus der Hölder–Ungleichung mit den Exponenten $t_1 = p/(p-q)$, $t_2 = p/q$ folgt

$$\int_\Omega |u(x)|^q \, dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{q}{p}} \cdot g^{\frac{q}{p}} |u|^q \, dx \leq \left(\int_\Omega \left(\frac{1}{g} \right)^{\frac{q}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \cdot \left(\int_\Omega g|u|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

Lemma 3.2.4 *Sei $q > p$ und $u \in L_{qg}(\Omega)$. Dann gilt $u \in L_{pg}(\Omega)$ und*

$$\|u\|_{p,g} \leq \|g\|_1^{\frac{q-p}{qp}} \|u\|_{q,g} .$$

Beweis Die Hölder–Ungleichung liefert mit den Exponenten $t_1 = q/(q-p)$, $t_2 = q/p$

$$\int_\Omega g|u|^p \, dx = \int_\Omega g^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(g^{\frac{p}{q}} |u|^p \right) dx \leq \left(\int_\Omega g \, dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int_\Omega g|u|^q \, dx \right)^{\frac{p}{q}}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. ■

3.2.4 Die Sobolev–Räume $W_p^k(\Omega)$

In diesem Abschnitt werden die Sobolev–Räume $W_p^k(\Omega)$ eingeführt und untersucht.

Definition 3.2.11 *(Vgl. [Tri78], Definition 4.2.1/1) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beliebiges Gebiet, $-\infty < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Der Raum $B^s_{p,q}(\Omega)$ sei die Einschränkung des Raumes $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N)$ auf Ω, das heißt*

$$B^s_{p,q}(\Omega) := \left\{ f \in L_p(\Omega) : \exists g \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N) \text{ mit } f(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{B^s_{p,q}(\Omega)} := \inf_{g|_\Omega = f g \in B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{B^s_{p,q}(\mathbb{R}^N)} .$$

Analog ist

$$H^s_p(\Omega) := \left\{ f \in L_p(\Omega) : \exists g \in H^s_p(\mathbb{R}^N) \text{ mit } f(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega \right\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{H^s_p(\Omega)} := \inf_{g|_\Omega = f g \in H^s_p(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{H^s_p(\mathbb{R}^N)} .$$

Weiterhin sei

$$W^s_p(\Omega) := \begin{cases} B^s_{p,p}(\Omega) & : 0 < s, \quad s \notin \mathbb{N}, \\ H^s_p(\Omega) & : s = 0, 1, 2, \ldots . \end{cases}$$

Wenn der Rand des Gebietes eine gewisse Regularitätsbedingung erfüllt (Kegelbedingung), dann lassen sich äquivalente Normen angeben.

Definition 3.2.12 *(Vgl. [Ada78], [Wlo82]) Sei $x \in \mathbb{R}^N$, B_x eine offene Kugel mit Mittelpunkt x und B' eine weitere offene Kugel, die x nicht enthält.*
Dann heißt

$$C_x := B_x \cap \{x + \lambda(y - x) : \quad y \in B', \quad \lambda > 0\}$$

„endlicher Kegel mit Spitze in x“.
Das beschränkte Gebiet Ω erfüllt die Kegelbedingung, falls:

1. *Es existiert ein endlicher Kegel C_0, so daß:*

2. *Zu jedem $x \in \overline{\Omega}$ existiert ein endlicher Kegel C_x mit Spitze in x, so daß $C_x \subset \Omega$ und C_x kongruent zu C_0 ist.*

Als Kongruenzbewegungen sind Drehungen und Verschiebungen zugelassen.

Der nächste Satz gibt eine andere, äquivalente, Definition für den Sobolev–Raum $W_p^s(\Omega)$ an, falls das Gebiet die Kegelbedingung erfüllt, vgl. [Tri78] Theorem 4.4.2/2, Bemerkung 4.4.2/2, Bemerkung 4.2.1/2.

Satz 3.2.11 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet, das die Kegelbedingung erfüllt. Sei weiterhin $1 < p < \infty$ und $s > 0$.*
Dann sind (falls s eine natürliche Zahl ist)

$$\|f\|^{(1)}_{W_p^s(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le s} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\|f\|^{(2)}_{W_p^s(\Omega)} := \left(\|f\|_p^p + \sum_{|\alpha| = s} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

bzw. falls $s = [s] + \{s\}$, $[s] \in \mathbb{N}$, $0 < \{s\} < 1$

$$\|f\|^{(3)}_{W_p^s(\Omega)} := \left(\|f\|_p^p + \sum_{|\alpha| = [s]} \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^p}{|x-y|^{N+\{s\}p}} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

äquivalente Normen im Raum $W_p^s(\Omega)$.

Bemerkung 3.2.5 *Die in Definition 3.2.11 eingeführten Räume stimmen mit den gewöhnlichen Sobolev–Slobodeckij–Räumen überein, falls Ω eine Kegelbedingung erfüllt, vgl. [Tri78], Bemerkung 4.2.1/2, Bemerkung 4.6.2.*
Für eine Definition dieser Räume siehe z.B. [Ada78], [Fri76].

Der nächste Satz gibt an, wann Einbettungen zwischen Sobolev–Räumen bestehen. (Vgl. [Tri78], Theorem 4.6.1, Bemerkung 4.6.2)

Satz 3.2.12 (Einbettungssatz von Sobolev) *Sei Ω ein beschränktes Gebiet, das die Kegelbedingung erfüllt.*

1. *Sei $1 < p < \infty$, $t \ge 0$, $t \in \mathbb{N}$, $s > t + \frac{N}{p}$. Dann ist die Einbettung*

$$W_p^s(\Omega) \subset \overline{C}^{\,t}(\Omega)$$

stetig.

2. *Sei $0 \le t \le s < \infty$, $1 < p \le q < \infty$. Dann ist für*

$$s - \frac{N}{p} \ge t - \frac{N}{q}$$

die Einbettung

$$W_p^s(\Omega) \subset W_q^t(\Omega)$$

stetig.

Hierbei ist $\overline{C}^{\,t}(\Omega)$ der Raum aller t–fach in Ω stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen sich stetig auf den Rand $\partial\Omega$ fortsetzen lassen. Dieser Raum hat die Norm

$$\|f\|_{\overline{C}^{\,t}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|\le t} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|.$$

Bemerkung 3.2.6 *Der erste Teil dieses Satzes gilt in modifizierter Form auch für $t \notin \mathbb{N}$. In diesem Fall besteht der Raum $\overline{C}^{\,t}$ aus geeigneten Hölderstetigen Funktionen, vgl. [Tri78], Abschnitt 4.5. Eine andere Schreibweise ist $C^t(\overline{\Omega})$.*
Es ist für $t \in \mathbb{N}$ $\overline{C}^{\,t}(\Omega) \subset C^t(\Omega)$.

Für die Räume $W_p^k(\Omega)$ gilt folgender Interpolationssatz, siehe [Ada78], Theorem 4.17:

Satz 3.2.13 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet, das die Kegelbedingung erfüllt, $1 \le p < \infty$. Dann existiert eine Konstante C, so daß für $u \in W_p^m(\Omega)$, $0 \le j \le m$ gilt:*

$$\|u\|_{p,j} \le C\, \|u\|_{p,m}^{\frac{j}{m}}\, \|u\|_{p}^{\frac{m-j}{m}}\,.$$

Die folgenden Banachräume sind von besonderer Bedeutung. Sie beschreiben, anschaulich gesprochen, die Menge gewisser schwach differenzierbarer Funktionen, die fast überall auf dem Gebietsrand den Wert Null annehmen.
Eine ausführliche Untersuchung dieser Räume ist z.B. in [Rek84] oder [Wlo82] zu finden.

Definition 3.2.13 *Sei für $1 \le p < \infty$*

$$\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega) := \left\{ u \in W_p^1(\Omega) : \quad \exists (u_n) \subset \mathfrak{D}(\Omega) : \quad \|u_n - u\|_{p,1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \right\}.$$

Der Raum $\overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ ist ein separabler Banachraum und besitzt dieselbe Norm wie $W_p^1(\Omega)$.
Der folgende Satz gestattet die Konstruktion äquivalenter Normen, siehe [Rek84].

Satz 3.2.14 (Friedrichsche Ungleichung) *Es existiert eine Konstante C, so daß für alle $u \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$*

$$\|u\|_2^2 \le C \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2$$

gilt.

Für diesen Raum gilt folgender Interpolationssatz, vgl. [LSU67].

Satz 3.2.15 (Nirenberg–Gagliardo) *Sei $1 \le q \le p \le s$, $\frac{1}{p} < \frac{1}{s} + \frac{1}{N}$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für alle $u \in \overset{o}{W}{}_p^1(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|_s \le c\, \|u\|_{p,1}^{\theta}\, \|u\|_q^{1-\theta},$$

wobei

$$0 \le \overline{\theta} := \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{p} + \frac{1}{N}} \le \theta \le 1.$$

Wenn $q = 1$, dann sei $\overline{\theta} < \theta \le 1$.

Bemerkung 3.2.7 *Die Voraussetzung $1 \le q \le p \le s$ garantiert $0 \le \overline{\theta}$, während die Voraussetzung $\frac{1}{p} < \frac{1}{s} + \frac{1}{N}$ sicherstellt, daß $\overline{\theta} < 1$.*

3.2.5 Die gewichteten Sobolev–Räume $W^1_{pg}(\Omega)$

Die in diesem Abschnitt eingeführten gewichteten Sobolev–Räume werden bei der Untersuchung semilinearer parabolischer Rand–Anfangswertprobleme verwendet.

Definition 3.2.14 *Sei für* $p > 1$

$$W^1_{pg}(\Omega) := \left\{ u \in W^1_1(\Omega) \cap L_p(\Omega) : u_{x_i} \in L_{pg}(\Omega), \quad \forall i = 1, \ldots, N \right\}.$$

Es gilt:

Satz 3.2.16 *Falls*

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{\frac{1}{p-1}} \in L_1(\Omega), \tag{3.1}$$

dann ist $W^1_{pg}(\Omega)$ *ein Banachraum mit der Norm*

$$\|u\|_{p,1,g} := \left(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{p,g}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Beweis
Es ist leicht zu zeigen, daß $W^1_{pg}(\Omega)$ ein linearer Raum ist.
Nun werden die Normeigenschaften nachgewiesen.
Zur Dreiecksungleichung (die anderen Normeigenschaften sind offensichtlich erfüllt):
Seien $u_1, u_2 \in W^1_{pg}(\Omega)$. Dann folgt mit der Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|u_1 + u_2\|_{p,1,g} &= \left(\|u_1 + u_2\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|u_{1x_i} + u_{2x_i}\|_{p,g}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\left(\|u_1\|_p + \|u_2\|_p \right)^p + \sum_{i=1}^N \left(\|u_{1x_i}\|_{p,g} + \|u_{2x_i}\|_{p,g} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\|u_1\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|u_{1x_i}\|_{p,g}^p \right)^{1/p} + \left(\|u_2\|_p^p + \sum_{i=1}^N \|u_{2x_i}\|_{p,g}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|u_1\|_{p,1,g} + \|u_2\|_{p,1,g}\,.
\end{aligned}$$

Es ist noch die Vollständigkeit des $W^1_{pg}(\Omega)$ zu zeigen. Sei $(u_n) \subset W^1_{pg}(\Omega)$ eine Cauchyfolge im Raum $W^1_{pg}(\Omega)$. Dann ist $(u_n) \subset L_p(\Omega)$ eine Cauchyfolge im $L_p(\Omega)$, es gibt also eine Funktion $u \in L_p(\Omega)$, so daß $u_n \to u$ im Sinne des $L_p(\Omega)$. Außerdem sind $(u_{nx_i}) \subset L_{pg}(\Omega)$ Cauchyfolgen im Banachraum $L_{pg}(\Omega)$, demnach existieren $v_i \in L_{pg}(\Omega)$, so daß $u_{nx_i} \to v_i$ im Sinne des $L_{pg}(\Omega)$. Zu zeigen bleibt $v_i = u_{x_i}$.
Dazu sei $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$\left| \int_\Omega (u_{nx_i} - v_i)\varphi\, dx \right| \le C_\varphi \|u_{nx_i} - v_i\|_1 \le C_\varphi C \|u_{nx_i} - v_i\|_{p,g} < \varepsilon,$$

wenn $n \ge N_0(\varepsilon, \varphi)$. Also gilt

$$\int_\Omega u_{nx_i}\varphi\, dx \to \int_\Omega v_i \varphi\, dx.$$

Andererseits ist

$$\int_\Omega u_{nx_i}\varphi\,dx = -\int_\Omega u_n\varphi_{x_i}\,dx \to -\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx.$$

Daraus folgt

$$\int_\Omega v_i\varphi\,dx = -\int_\Omega u\varphi_{x_i}\,dx.$$

Also ist v_i schwache Ableitung von u nach x_i. Demnach gilt $u \in W^1_{pg}(\Omega)$, denn $u_{x_i} = v_i \in L_{pg}(\Omega)$. Es ist $u_n \xrightarrow{W^1_{pg}(\Omega)} u$. Damit ist die Vollständigkeit des Raumes $W^1_{pg}(\Omega)$ gezeigt. ■

Bemerkung 3.2.8 *Die Voraussetzung* (3.1) *ist wesentlich. In [KO84] ist ein Beispiel angegeben für einen unvollständigen Raum* $W^1_{pg}(\Omega)$, *falls* (3.1) *nicht erfüllt ist.*

Es gilt folgendes

Lemma 3.2.5 *Der Raum* $W^1_{2g}(\Omega)$ *ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt*

$$(u,v)_{2,g,1} := (u,v)_{L_2} + \sum_{i=1}^N \int_\Omega g(x)u_{x_i}(x)v_{x_i}(x)\,dx.$$

Der Beweis ist sehr einfach.
Analog zu den Räumen $\overset{o}{W}{}^1_p(\Omega)$ werden nun gewichtete Räume $\overset{o}{W}{}^1_{pg}(\Omega)$ eingeführt:

Definition 3.2.15 *Für* $1 < p < \infty$ *und* $g(x)$ *mit* (3.1) *sei*

$$\overset{o}{W}{}^1_{pg}(\Omega) := \left\{u \in W^1_{pg}(\Omega) : \exists (u_n) \subset \mathfrak{D}(\Omega) : \quad \|u_n - u\|_{p,1,g} \xrightarrow{n\to\infty} 0\right\}.$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 3.2.17 *Der Raum* $\overset{o}{W}{}^1_{pg}(\Omega)$ *ist ein Banachraum mit derselben Norm wie* $W^1_{pg}(\Omega)$.

Beweis Der Raum $\mathfrak{D}$ ist ein Unterraum von $\overset{o}{W}{}^1_{pg}(\Omega)$. Der Abschluß von $\mathfrak{D}$ in der Norm des Raumes $W^1_{pg}(\Omega)$ ergibt einen Banachraum, da $W^1_{pg}(\Omega)$ ein Banachraum ist. ■
Die folgenden Lemmata werden zu Abschätzung von gewissen Normen in den Kapiteln 4,5 verwendet.

Lemma 3.2.6 *Sei* $g^{-1} \in L_{N'}(\Omega)$ *mit* $N' > N$, $N' \in \mathbb{R}$. *Dann sind die Einbettungen*

$$W^1_{2g}(\Omega) \subset W^1_{\frac{2N'}{N'+1}}(\Omega) \subset L_{\frac{2N'}{N'-1}}(\Omega)$$

stetig.

Beweis Es ist $g^{-N'} \in L_1(\Omega)$ und

$$N' = \frac{\frac{2N'}{N'+1}}{2 - \frac{2N'}{N'-1}}.$$

Der Satz 3.2.10 liefert dann die erste Behauptung. Weiterhin ist

$$1 - \frac{N}{\frac{2N'}{N'+1}} > -\frac{N}{\frac{2N'}{N'-1}},$$

denn

$$
\begin{aligned}
1 > \frac{N}{2N'} + \frac{N}{2N'}, &\Longleftrightarrow 1 - \frac{N}{2} - \frac{N}{2N'} > -\frac{N}{2} + \frac{N}{2N'} \\
&\Longleftrightarrow 1 - N\left(\frac{N'+1}{2N'}\right) > -N\left(\frac{N'-1}{2N'}\right).
\end{aligned}
$$

Aus dem Einbettungssatz von Sobolev folgt, daß die Einbettung $W^1_{\frac{2N'}{N'+1}}(\Omega) \subset L_{\frac{2N'}{N'-1}}(\Omega)$ stetig ist. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Bemerkung 3.2.9 *Die Voraussetzung $N' > N$ wurde nur für die zweite Einbettung genutzt.*

Lemma 3.2.7 *Sei $2N' > N$, $N \geq 2$, $N' \geq 1$, $N' \in \mathbb{R}$,*

$$
r_1 := \frac{2N'}{N'+1}, \quad 2 \leq s < \frac{r_1 N}{N - r_1}, \quad 1 \leq q \leq r_1.
$$

Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $C_\varepsilon > 0$, so daß für alle $u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ gilt:

$$
\|u\|_s^{2\alpha} \leq \varepsilon \|u\|_{2,1,g}^2 + C_\varepsilon \|u\|_q^{2\beta}.
$$

Dabei gilt:

1. *Wenn $0 < \alpha < 1$, so ist $0 < \beta \leq \overline{\beta} < \alpha$ und $C_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}}$,*
2. *Wenn $\alpha = 1$, dann ist auch $\beta = 1$ und $C_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\sigma}$, $\overline{\sigma} \leq \sigma < \infty$,*
3. *Wenn $1 < \alpha < \overline{\alpha}$, dann ist $\alpha < \overline{\beta} \leq \beta < \infty$ und $C_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\frac{\beta-\alpha}{\alpha-1}}$,*

wobei

$$
\begin{aligned}
\overline{\theta} &:= \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{s}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{N}}, \\
\overline{\sigma} &:= \frac{\overline{\theta}}{1 - \overline{\theta}}, \\
\overline{\alpha} &:= \frac{1 + \overline{\sigma}}{\overline{\sigma}} = \frac{1}{\overline{\theta}}, \\
\overline{\beta} &:= \frac{\alpha}{1 + (1 - \alpha)\overline{\sigma}}.
\end{aligned}
$$

Wenn $q = 1$, dann ist $\beta \neq \overline{\beta}$ und $\sigma \neq \overline{\sigma}$.

Beweis Es ist $1 \leq r' < 2 \leq N$, also ist $\frac{r_1 N}{N - r_1} > 0$ und wegen $\frac{1}{2N'} < \frac{1}{N}$ gilt $2 < \frac{r_1 N}{N - r_1}$.
Nun wird nachgewiesen, daß die Voraussetzungen für den Interpolationssatz von Nirenberg–Gagliardo erfüllt sind:
Es ist $1 \leq q \leq r_1 < 2 \leq s$.
Wegen $s < \frac{r_1 N}{N - r_1}$ ist auch $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{s} + \frac{1}{N}$.
Also ist $0 < \overline{\theta} < 1$ und mit $\overline{\theta} \leq \theta < 1$ gilt

$$
\|u\|_s \leq C \|u\|_{r_1,1}^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta} \leq C \|u\|_{2,1,g}^{\theta} \|u\|_q^{1-\theta},
$$

vgl. das vorige Lemma.
Sei $\alpha < \overline{\alpha} = \frac{1}{\theta}$ gewählt. Dann ist für $\overline{\theta} \le \theta < \min(\frac{1}{\alpha}, 1)$ die Ungleichung $\alpha\theta < 1$ erfüllt.
Für ein solches θ ist dann

$$\|u\|_s^{2\alpha} \le C \|u\|_{2,1,g}^{2\alpha\theta} \|u\|_q^{2\alpha(1-\theta)} \le \varepsilon \|u\|_{2,1,g}^2 + C_\varepsilon \|u\|_q^{2\frac{\alpha-\alpha\theta}{1-\alpha\theta}}, \quad C_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\frac{\alpha\theta}{1-\alpha\theta}}.$$

Hierbei wurde die Youngsche Ungleichung mit den Exponenten $t_1 = (\alpha\theta)^{-1}$, $t_2 = (1-\alpha\theta)^{-1}$ angewandt.
1.Fall: $\alpha \neq 1$
Sei $\beta = \beta(\theta) = \frac{\alpha-\alpha\theta}{1-\alpha\theta}$.
Es wird gezeigt: Falls $\overline{\theta} \le \theta < \min(\frac{1}{\alpha}, 1)$, dann erfüllen β und C_ε die behaupteten Relationen.
Zunächst ist $\frac{\alpha\theta}{1-\alpha\theta} = \frac{\alpha-\beta}{1-\alpha}$. Damit ist die Behauptung für C_ε gezeigt.
Es ist $\beta'(\theta) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{(1-\alpha\theta)^2}$.
Sei $1 < \alpha < \overline{\alpha}$. Dann ist $\min(\frac{1}{\alpha}, 1) = \frac{1}{\alpha}$. Es ist $\beta(\theta)$ monoton wachsend, also folgt

$$\alpha = \beta(0) < \beta(\overline{\theta}) \le \beta(\theta) < \infty, \text{ falls } 0 < \overline{\theta} \le \theta < \frac{1}{\alpha}.$$

Andererseits ist

$$\beta(\overline{\theta}) = \frac{\alpha - \alpha\overline{\theta}}{1 - \alpha\overline{\theta}} = \frac{\alpha}{1 + (1-\alpha)\overline{\sigma}}. \tag{3.2}$$

Daraus folgt die Behauptung.
Sei nun $0 < \alpha < 1$. Dann ist $\min(\frac{1}{\alpha}, 1) = 1$ und $\beta(\theta)$ ist monoton fallend auf $[0,1]$ mit $\beta(0) = \alpha$ und $\beta(1) = 0$.
Dann folgt für $0 < \overline{\theta} \le \theta < 1$ die Ungleichung

$$0 = \beta(1) < \beta(\theta) \le \beta(\overline{\theta}) < \beta(0) = \alpha.$$

Daraus ergibt sich wegen (3.2) die Behauptung.
Falls $q = 1$, dann ist $\theta = \overline{\theta}$ ausgeschlossen, vgl. Satz 3.2.15. In diesem Fall führt $\theta > \overline{\theta}$ zu $\beta \neq \overline{\beta}$.
2. Fall: $\alpha = 1$
In diesem Fall ist $\beta(\theta) = \frac{\alpha-\alpha\theta}{1-\alpha\theta} = 1$ und es folgt $C_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{\theta}{1-\theta}} = \varepsilon^{-\sigma}$. Aus $\overline{\theta} \le \theta < 1$ folgt dann $\overline{\sigma} \le \sigma < \infty$.
Wenn $q = 1$, dann ist $\overline{\theta} = \theta$ ausgeschlossen, also auch $\overline{\sigma} = \sigma$.
Damit ist der Satz bewiesen. ■

Bemerkung 3.2.10 *Die Aussage dieses Satzes gilt auch für* $N = 1$ *(die Ungleichung* $2 \le s < \frac{r_1 N}{N-r_1}$ *ist hierbei durch* $2 \le s < \infty$ *zu ersetzen). In einem solchen Fall ist wegen* $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{s} + \frac{1}{1}$ *der Interpolationssatz von Nirenberg–Gagliardo anwendbar.*

3.2.6 Die gewichteten Sobolev–Räume $W_p^k(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$

Die im vorigen Abschnitt definierten Sobolev–Räume sind für die Untersuchung quasilinearer Gleichungen nicht verwendbar. Aus diesem Grund werden hier andere gewichtete Sobolev-Räume vorgestellt.

3.2.6.1 Vorbereitungen

Es ist erforderlich, an die Gewichtsfunktion einige Voraussetzungen zu stellen. Diese etwas komplizierten Überlegungen werden in diesem Abschnitt dargelegt.
Die Untersuchungen sind angelehnt an [Tri78], 3.2.3, 6.3.1. Die Darstellung in diesem Buch verwendet die zusätzliche Voraussetzung $\varrho \in C^\infty(\Omega)$, welche für die Definition der Räume $W_p^k(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ allerdings nicht nötig ist. Deshalb wird diese Voraussetzung abgeschwächt zu $\varrho \in C^1(\Omega)$.
Nun wird die Gewichtsfunktion definiert.

Definition 3.2.16 *Die Funktion ϱ heißt Gewichtsfunktion in Ω, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\varrho \in C^1(\Omega)$,
2. $\exists c > 0 : \varrho(x) \geq c$ *in* Ω,
3. $\exists c_\varrho > 0 : \quad |\nabla \varrho(x)| \leq c_\varrho \varrho(x)^2$,
4. $\forall K > 0 \quad \exists \varepsilon_K > 0 \quad \forall x : \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varepsilon_K : \quad \varrho(x) > K$.

Hierbei bedeutet $\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$ *den Abstand des Punktes x vom Gebietsrand $\partial\Omega$.*

Die Funktion ϱ divergiert also am Rand des Gebietes gegen ∞.

Bemerkung 3.2.11 *Ein Beispiel: Es existieren positive Konstanten d_1, d_2 und eine Gewichtsfunktion ϱ, so daß für alle $x \in \Omega$*

$$d_1 \,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq \varrho(x)^{-1} \leq d_2 \,\mathrm{dist}(x, \partial\Omega)$$

gilt.

Für die Definition der Räume $W_p^k(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ wird eine Zerlegung des Gebietes Ω benötigt:

Definition 3.2.17 *Sei*

$$\Omega^j := \{x \in \Omega, \quad \varrho(x) < 2^j\}, \quad j = M, M+1, \ldots.$$

Hierbei sei M so gewählt, daß $\Omega^M \neq \emptyset$ und $\Omega^{M-1} = \emptyset$. Weiterhin sei

$$\begin{aligned} \Omega_j &:= \Omega^{j+2} \backslash \Omega^{j-1} \text{ für } j = M+1, M+2, \ldots, \\ \Omega_M &:= \Omega^{M+2}. \end{aligned}$$

Es sei $\Psi = (\psi(x))_{j=M}^\infty$ eine Familie von Funktionen mit

$$\begin{aligned} & 0 \leq \psi_j(x) \quad \forall j, \\ & \psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j) \quad \forall j, \\ & \sum_{j=M}^\infty \psi_j(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega, \\ & |D^\gamma \psi_j(x)| \leq C_\gamma 2^{j|\gamma|} \quad \forall j = M, M+1, \ldots, \quad \forall |\gamma| \geq 0. \end{aligned}$$

Weiterhin existieren Kugeln

$$K_{l,j} = \{x : |x - x_{j,l}| \leq c_0 2^{-j}\} \quad j = M, M+1, \ldots, l = 1, \ldots, N_j \tag{3.3}$$

mit

$$\Omega_j \subset \cup_{l=1}^{N_j} K_{l,j} \subset \Omega_{j-1} \cup \Omega_{j+1},$$

so daß in jedem Punkt $x \in \Omega$ höchstens L Kugeln einen nichtleeren Durchschnitt haben. Dabei kann in (3.3) die Konstante c_0 beliebig klein gewählt werden. Zu diesen Kugeln existieren Funktionen $\varphi_{j,l}$, $j = M, M+1, \dots$, $l = 1, \dots, N_j$ mit

$$\begin{aligned}
&0 \le \varphi_{j,l}(x), \quad \forall x \in \Omega_j, \forall j, l, \\
&\varphi_{j,l} \in C_0^\infty(K_{l,j}), \quad \forall j, l, \\
&\sum_{l=1}^{N_j} \varphi_{j,l}(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega_j, \forall j, \\
&|D_\gamma \varphi_{j,l}(x)| \le c_\gamma 2^{j|\gamma|} \quad \forall |\gamma| \ge 0, \quad \forall x \in \Omega_j, \forall j, l.
\end{aligned}$$

Bemerkung 3.2.12 *Die Konstanten c_γ hängen von c_0 ab, vgl.* (3.3).

3.2.6.2 Definition der Räume $W_p^k(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$

Nun können die gewichteten Sobolev–Räume definiert werden, vgl. [Tri78], 3.2.3, 3.2.4.

Definition 3.2.18 *Seien ϱ und Ψ wie oben definiert. Seien $1 < p < \infty$, $s \ge 0$, $1 \le q < \infty$, ν, $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\nu \ge \mu + sp$. Dann sei*

$$\begin{aligned}
H_p^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu) &:= \Bigg\{ f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\Omega) : \\
\|f\|_{H_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} &:= \left(\sum_{j=M}^{\infty} 2^{j\mu} \|\psi_j f\|^p_{H_p^s(\mathbb{R}^N)} + 2^{j\nu} \|\psi_j f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Falls $s = 0$, dann sei zusätzlich $\nu = \mu$ und es ist dann $H_p^0(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu) =: L_p(\Omega, \varrho^\mu)$. Wenn $s > 0$, dann sei

$$\begin{aligned}
B_{p,q}^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu) &:= \Bigg\{ f \in L_p^{\mathrm{loc}}(\Omega) : \\
\|f\|_{B_{p,q}^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} &:= \left(\sum_{j=M}^{\infty} 2^{j\mu} \|\psi_j f\|^p_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^N)} + 2^{j\nu} \|\psi_j f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^N)} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Bigg\}.
\end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$W_p^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu) := \begin{cases} H_p^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu) & \textit{falls } s = 0, 1, 2, \dots, \\ B_{p,q}^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu) & \textit{falls } 0 < s, s \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bemerkung 3.2.13 *Es läßt sich zeigen, daß diese Räume nicht von der Familie Ψ abhängen. Das heißt: Seien Ψ und Ψ' zwei Familien gemäß Definition 3.2.17. Die Räume $H_p^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ und $H_p^{s\prime}(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ seien mit diesen Ψ bzw. Ψ' definiert.*
Dann gilt (im Sinne der Gleichheit von Mengen) $H_p^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu) = H_p^{s\prime}(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$.
Weiterhin existieren positive Konstanten c_1, c_2, so daß für alle $f \in H_p^s(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ gilt:

$$c_1 \|f\|_{H_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le \|f\|_{H_p^{s\prime}(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le c_2 \|f\|_{H_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} .$$

Eine analoge Aussage gilt für die Räume $B^s_{p,q}(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$.
Für diese Gleichheit ist die Voraussetzung $\nu \geq \mu + sp$ wesentlich.

Diese Räume besitzen folgende Eigenschaften:

Satz 3.2.18 *Die Räume $B^s_{p,q}(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ und $H^s_p(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ sind Banachräume. Für $q < \infty$ liegt C_0^∞ dicht in $B^s_{p,q}(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ und dicht in $H^s_p(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$.*

Die obigen Normen für die gewichteten Räume sind vergleichsweise unhandlich. Deshalb ist die Suche nach anderen, äquivalenten, Normen von Bedeutung. Es läßt sich zeigen:

Satz 3.2.19 *Für $s \in \mathbb{N}$ sei*

$$\|f\|^*_{W^s_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} := \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=s} \varrho^\mu(x) |D^\alpha f(x)|^p + \varrho^\nu(x) |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Falls $s \notin \mathbb{N}$, $s = [s] + \{s\}$ mit $[s] \in \mathbb{N}$ und $0 < \{s\} < 1$, dann sei

$$\|f\|^*_{W^s_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} := \left(\int\limits_{\Omega\times\Omega} \sum_{|\alpha|=[s]} \frac{\left|\varrho^{\frac{\mu}{p}}(x) D^\alpha f(x) - \varrho^{\frac{\mu}{p}}(y) D^\alpha f(y)\right|^p}{|x-y|^{N+\{s\}p}} \, dx\, dy + \int\limits_\Omega \varrho^\nu(x) |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Dann ist $\|.\|^*_{W^s_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$ eine äquivalente Norm in $W^s_p\,(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$.

Bemerkung 3.2.14 *Der Beweis ist recht aufwendig, er wrd hier nicht wiedergegeben. Aus ihm ergibt sich ein wichtiger Hinweis:*
Der Satz besagt, daß für jede Funktion $f \in L^{\mathrm{loc}}_p(\Omega)$ mit $\|f\|_{W^k_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} < \infty$ (also für jede Funktion $f \in W^k_p\,(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$) gilt:

$$c_1 \, \|f\|^*_{W^k_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \leq \|f\|_{W^k_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \leq c_2 \, \|f\|^*_{W^k_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}.$$

Der Satz macht keine Aussage darüber, ob für jede Funktion $f \in L^{\mathrm{loc}}_p(\Omega)$ mit endlicher Norm $\|f\|^*_{W^k_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$ auch $f \in W^k_p\,(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ gilt.

Der folgende Satz gestattet die Abschätzung gewisser Halbnormen und gibt eine andere Charakterisierung der gewichteten Sobolev–Räume an.

Satz 3.2.20 *Sei $0 \leq t \leq s$ und*

$$\kappa_t := \mu \frac{t}{s} + \nu \frac{s-t}{s}.$$

Dann gilt: Wenn t ganzzahlig ist, dann existiert eine positive Konstante c, so daß für jedes $f \in W^s_p\,(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ gilt:

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=t} \varrho^{\kappa_t}(x) |D^\alpha f(x)|^p \, dx \leq c \, \|f\|^p_{W^s_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}.$$

Wenn t nicht ganzzahlig ist, dann existiert ein positives c, so daß mit $t = [t] + \{t\}$, $[t]$ ganzzahlig, $0 < \{t\} < 1$ und für jedes $f \in W^s_p\,(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega\times\Omega} \sum_{|\alpha|=[t]} \frac{\left|\varrho^{\frac{\kappa_t}{p}}(x) D^\alpha f(x) - \varrho^{\frac{\kappa_t}{p}}(y) D^\alpha f(y)\right|^p}{|x-y|^{N+\{t\}p}} \, dx\, dy \leq c \, \|f\|^p_{W^s_p(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}.$$

Es gilt

$$W_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)=\Big\{f\in\mathfrak{D}'(\Omega):$$
$$\|f\|^{**p}_{W_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}=\|f\|^{*p}_{W_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}+\sum_{|\alpha|\le[s]}\int_\Omega \varrho^{\kappa|\alpha|}(x)|D^\alpha f(x)|^p\,dx<\infty\Big\}.$$

Die Normen $\|.\|^{**}_{W_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$ *und* $\|.\|_{W_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$ *sind im Raum* $W_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)$ *äquivalent.*

Der nächste Satz spielt bei der Herleitung von A-priori-Abschätzungen eine wichtige Rolle, vgl. [Tri78], 6.3.1.

Satz 3.2.21 *Die Norm*

$$\|f\|^{+}_{W_p^k(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}:=\left(\sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j}2^{j\mu}\|\psi_j\varphi_{j,l}f\|^p_{W_p^k(\mathbb{R}^N)}+2^{j\nu}\|\psi_j\varphi_{j,l}f\|^p_{L_p(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

ist eine äquivalente Norm im Raum $W_p^k(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)$.

Bemerkung 3.2.15 *Die Konstanten* c,c' *der Ungleichung*

$$c\|f\|_{W_p^k(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}\le\|f\|^{+}_{W_p^k(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}\le c'\|f\|_{W_p^k(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$$

hängen von c_0 *ab, siehe* (3.3).

3.2.6.3 Interpolations– und Einbettungssätze

Die folgenden Sätze werden bei den späteren Abschätzungen verwendet, siehe [Tri78], 3.4.1, 3.4.2.

Satz 3.2.22 *Seien* $0\le s_1,s_2<\infty$, $1<p_1,p_2<\infty$ *und* $\nu_1\ge\mu_1+s_1p_1$, $\nu_2\ge\mu_2+s_2p_2$ *reelle Zahlen, so daß*

$$(\mu_1-\nu_1)s_2p_2=(\mu_2-\nu_2)s_1p_1.$$

Weiterhin sei $0<\theta<1$ *und*

$$\begin{aligned}
&s=(1-\theta)s_1+\theta s_2,\\
&\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2},\\
&\frac{\nu}{p}=(1-\theta)\frac{\nu_1}{p_1}+\theta\frac{\nu_2}{p_2},\\
&\frac{\mu-\nu}{sp}=\frac{\mu_1-\nu_1}{s_1p_1}=\frac{\mu_2-\nu_2}{s_2p_2}.
\end{aligned}$$

(Falls $s_1=0$, $s_2>0$, *dann sei* $\mu_1=\nu_1$ *und* $\frac{\mu-\nu}{sp}=\frac{\mu_2-\nu_2}{s_2p_2}$. *Falls* $s_1=0$ *und* $s_2=0$, *dann sei* $\mu_1=\nu_1$, $\mu_2=\nu_2$ *und* $\mu=\nu$.)
Dann existiert eine positive Konstante c, *so daß für jedes* $f\in H^{s_1}_{p_1}(\Omega,\varrho^{\mu_1},\varrho^{\nu_1})\cap H^{s_2}_{p_2}(\Omega,\varrho^{\mu_2},\varrho^{\nu_2})$ *gilt:*

$$\|f\|_{H_p^s(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}\le c\|f\|^{1-\theta}_{H^{s_1}_{p_1}(\Omega,\varrho^{\mu_1},\varrho^{\nu_1})}\|f\|^{\theta}_{H^{s_2}_{p_2}(\Omega,\varrho^{\mu_2},\varrho^{\nu_2})}$$

und (falls $s_1\ne s_2$*)*

$$\|f\|_{B^s_{p,p}(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}\le c\|f\|^{1-\theta}_{H^{s_1}_{p_1}(\Omega,\varrho^{\mu_1},\varrho^{\nu_1})}\|f\|^{\theta}_{H^{s_2}_{p_2}(\Omega,\varrho^{\mu_2},\varrho^{\nu_2})}.$$

Für die gewichteten Sobolev–Räume gilt folgender Einbettungssatz, vgl. [Tri78], 3.5.1 :

Satz 3.2.23 *Sei Ω ein beliebiges Gebiet.*
Sei $t \geq 0$, $1 < p \leq q < \infty$, $\nu \geq \mu + sp$ und

$$s - \frac{N}{p} = t - \frac{N}{q}.$$

Sei weiterhin

$$\frac{\kappa}{q} = \frac{\mu}{p},$$
$$\frac{\tau}{q} = \frac{\mu}{p}\frac{s-t}{s} + \frac{\nu}{p}\frac{t}{s}.$$

Dann ist die Einbettung

$$W_p^s\left(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu\right) \subset W_q^t\left(\Omega, \varrho^\kappa, \varrho^\tau\right)$$

stetig und es gilt $\tau \geq \kappa + tq$.

Der folgende Satz beschreibt, wann spezielle gewichtete Sobolev–Räume in gewöhnlichen Sobolev–Slobodeckij–Räumen eingebettet sind.

Satz 3.2.24 *Sei $\mu < 0 < \nu$, $\nu > \mu + 2$, $\mu + \nu \neq 0$ und $1 < p < \infty$. Dann gilt*

$$W_p^2\left(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu}\right) \subset W_p^t(\Omega)$$

mit $t = \frac{2\nu}{\nu - \mu}$.

Beweis Für dieses t gilt $0 < t < 2$, $t \notin \mathbb{N}$ und

$$\kappa_t := p\mu\frac{t}{2} + p\nu\frac{2-t}{2} = 0.$$

Sei $u \in W_p^2\left(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu}\right)$. Der Satz 3.2.20 liefert dann

$$S_t := \int\limits_{\Omega\times\Omega} \sum_{|\alpha|=[t]} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^p}{|x-y|^{N+\{t\}p}}\, dx\, dy \leq c\, \|u\|^p_{W_p^2(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})}.$$

Weiterhin ist

$$S_0 := \int_\Omega |u(x)|^p\, dx \leq c \int_\Omega \varrho^{p\nu}(x) |u(x)|^p\, dx \leq c\, \|u\|^p_{W_p^2(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})}.$$

Für $t > 1$ ist

$$S_1 := \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\, dx \leq c \sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega \varrho^{\frac{p}{2}(\nu+\mu)}(x) |D^\alpha u(x)|^p\, dx \leq c\, \|u\|^p_{W_p^2(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})}.$$

Für $t < 1$ ist dann $\|u\|^p_{p,t} \leq c(S_0 + S_t) \leq c\, \|u\|^p_{W_p^2(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})}$ und für $t > 1$ gilt $\|u\|^p_{p,t} \leq c(S_0 + S_1 + S_t) \leq c\, \|u\|^p_{W_p^2(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})}$. Also ist $u \in W_p^t(\Omega)$. ■

Der nächste Satz untersucht die Einbettung gewisser gewichteter Sobolev–Räume in Räume stetig differenzierbarer Funktionen:

Satz 3.2.25 *Sei $\mu < 0 < \nu$, $\nu > \mu + 2$, $\mu + \nu > 0$. Dann existiert $1 < p_0 < \infty$, so daß für $p \geq p_0$ gilt:*

$$W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu}) \subset C^1(\overline{\Omega}).$$

Beweis Die Konstante $1 < p_0 < \infty$ sei so gewählt, daß

$$\frac{2\nu}{\nu - \mu} > 1 + \frac{N}{p_0}.$$

Dies ist möglich, da wegen $\nu + \mu > 0$ der Term auf der linken Seite größer als 1 ist.
Der Sobolev–Einbettungssatz 3.2.12 liefert zusammen mit Satz 3.2.24 die Behauptung. ■

3.3 Theorie entarteter elliptischer Operatoren

3.3.1 Definition

In diesem Abschnitt werden entartete elliptische Differentialoperatoren definiert. Diese Operatoren werden bei der Untersuchung quasilinearer parabolischer Differentialgleichungen verwendet.
Die Darlegungen in diesem Abschnitt erfolgen in Anlehnung an [Tri78], Kapitel 6.

Definition 3.3.1 *Sei $\varrho(x)$ eine Gewichtsfunktion gemäß Definition 3.2.16. Sei $m \geq 1$ eine natürliche Zahl und ν, μ reelle Zahlen mit $\nu > \mu + 2m$. Weiterhin sei*

$$\kappa_l = \nu \frac{2m - l}{2m} + \mu \frac{l}{2m}, \quad l = 0, 1, \ldots, 2m.$$

Die Menge $\mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(m)}$ besteht aus allen Differentialoperatoren der Gestalt

$$Au = \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2l} \varrho^{\kappa_{2l}}(x) b_\alpha(x) D^\alpha u + \sum_{|\beta|<2m} a_\beta(x) D^\beta u,$$

wobei die folgenden Bedingungen gelten:

$$\begin{aligned}
&b_\alpha \in C^1(\Omega) \text{ mit in } \Omega \text{ beschränkten Ableitungen} \quad \forall \alpha, && (3.4)\\
&\exists C_E > 0: \quad (-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} b_\alpha(x)\xi^\alpha \geq C_E |\xi|^{2m} \quad \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega,\\
&b_{(0,\ldots,0)}(x) \geq C_E \quad \forall x \in \Omega,\\
&(-1)^l \sum_{|\alpha|=2l} b_\alpha(x)\xi^\alpha \geq 0, \quad \forall (\xi, x) \in \mathbb{R}^N \times \Omega, l = 1, \ldots, m-1,\\
&a_\beta \in C(\Omega) \quad \forall \beta, && (3.5)\\
&\forall \varepsilon > 0 \quad \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad |a_\beta(x)| \leq \varepsilon \varrho^{\kappa_{|\beta|}}(x) \quad \forall x \in \Omega \backslash \Omega^{j_\varepsilon} \forall \beta. && (3.6)
\end{aligned}$$

Für einige Hilfsbetrachtungen wird eine modifizierte Definition verwendet:

Definition 3.3.2 *Sei ϱ eine Gewichtsfunktion gemäß Definition 3.2.16, die zusätzlich folgender Bedingung genügt:*

$$\varrho \in C^\infty(\Omega), \tag{3.7}$$

$$|D^\gamma \varrho(x)| \leq C_\gamma \varrho^{1+|\gamma|}(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall \gamma. \tag{3.8}$$

Die Menge $\mathfrak{A}^{(m)'}_{\mu,\nu}$ besteht aus allen $A \in \mathfrak{A}^{(m)}_{\mu,\nu}$, für die anstatt (3.4), (3.5) und (3.6) gilt:

$$\begin{aligned}
&b_\alpha \in C^\infty(\Omega) \quad \forall\alpha, \ \textit{wobei jede Ableitung in } \Omega \textit{ beschränkt ist},\\
&a_\beta \in C^\infty(\Omega) \quad \forall\beta,\\
&\forall\varepsilon > 0 \quad \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad |D^\gamma a_\beta(x)| \le \varepsilon \varrho^{\kappa_{|\beta|}+|\gamma|}(x) \quad \forall x \in \Omega\backslash\Omega^{j_\varepsilon}, \forall\beta\gamma.
\end{aligned}$$

Für spätere Betrachtungen wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma 3.3.1 *Sei $A \in \mathfrak{A}^{(m)'}_{\mu,\nu}$. Dann gilt für jedes $k = 1, 2, \ldots,$ $A^k \in \mathfrak{A}^{(km)\,'}_{k\mu,k\nu}$.*

Der Beweis ist in [Tri78], Lemma 6.2.2 zu finden.

3.3.2 A-priori-Abschätzung

Die in diesem Abschnitt bewiesene A-priori-Abschätzung wird später oft verwendet werden.

Satz 3.3.1 *Sei $A \in \mathfrak{A}^{(m)}_{\mu,\nu}$, $\nu \ge 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$.*
Dann existiert eine Konstante $\lambda_0 \le 0$, so daß für jedes $\lambda \le \lambda_0$ Konstanten $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ existieren, so daß für jedes $u \in W^{2m}_p(\Omega, \varrho^{\tau+p\mu}, \varrho^{\tau+p\nu})$ gilt:

$$C_1 \|u\|_{W^{2m}_p(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} \le \|Au - \lambda u\|_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \le C_2 \|u\|_{W^{2m}_p(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})}.$$

Beweis Die rechte Ungleichung ist leicht zu zeigen. Hierfür ist die Voraussetzung $\nu \ge 0$ wichtig.
Nun wird die linke Ungleichung gezeigt.
Vorübergehend wird $\operatorname{supp} u \in K_{k,j}$ angenommen, vgl. (3.3). Die Funktion u wird außerhalb von $K_{k,j}$ durch 0 fortgesetzt.
Es sei

$$\begin{aligned}
A_1 u &= \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2l} \varrho^{\kappa_{2l}}(x_{j,k}) b_\alpha(x_{j,k}) D^\alpha u - \lambda u,\\
A_2 u &= \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2l} \left(\varrho^{\kappa_{2l}}(x) b_\alpha(x) - \varrho^{\kappa_{2l}}(x_{j,k}) b_\alpha(x_{j,k})\right) D^\alpha u,\\
A_3 u &= \sum_{|\beta|<2m} a_\beta(x) D^\beta u,
\end{aligned}$$

es gilt $Au - \lambda u = A_1 u + A_2 u + A_3 u$.
Nun ist

$$\begin{aligned}
\|A_1 u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \varrho^\tau(x) \, |A_1 u(x)|^p \, dx\\
&\ge c\varrho^\tau(x_{j,k}) \int_{\mathbb{R}^N} \left| \sum_{l=0}^{m} \sum_{|\alpha|=2l} \varrho^{\kappa_{2l}}(x_{j,k}) b_\alpha(x_{j,k}) D^\alpha u - \lambda u \right|^p dx,
\end{aligned}$$

wobei die Konstante c nicht von j, k, A abhängt.
Die Koordinatentransformation

$$y := \varrho^{\frac{\nu-\mu}{2m}}(x_{j,k}) x, \quad v(y) := u(x)$$

liefert

$$D_x^\alpha u = \left(\varrho^{\frac{\nu-\mu}{2m}}(x_{j,k})\right)^{|\alpha|} D_y^\alpha v, \quad dx = \left(\varrho^{-\frac{\nu-\mu}{2m}}(x_{j,k})\right)^N dy.$$

Für die Fouriertransformierte von $D^\alpha v$ gilt

$$F(D^\alpha v) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha Fv = (-1)^l \xi^\alpha Fv.$$

Weiterhin ist $\kappa_{2l} + \frac{2l}{2m}(\nu - \mu) = \nu$.
Dann folgt

$$\|A_1 u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \geq c\varrho^{\tau - \frac{N}{2m}(\nu-\mu)}(x_{j,k}) \int_{\mathbb{R}^N} \left| F^{-1}F\left(\sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l} \varrho^\nu(x_{j,k}) b_\alpha(x_{j,k}) D^\alpha v - \lambda v\right)\right|^p dy$$

$$\geq c\varrho^{\tau+\nu p - \frac{N}{2m}(\nu-\mu)}(x_{j,k}) \int_{\mathbb{R}^N} \left| F^{-1}\left(\left(\sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l} (-1)^l b_\alpha(x_{j,k})\xi^\alpha - \lambda\varrho^{-\nu}(x_{j,k})\right) Fv\right)\right|^p dy,$$

wobei c nicht von j, k oder A abhängt.
Nun wird das Multiplier-Theorem (vgl. 3.4.2) auf die beiden Multiplier

$$T_1(\xi) = \frac{(1+|\xi|^2)^m}{\sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l}(-1)^l b_\alpha(x_{j,k})\xi^\alpha - \lambda\varrho^{-\nu}(x_{j,k})},$$

$$T_2(\xi) = \frac{\lambda\varrho^{-\nu}(x_{j,k})}{\sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l}(-1)^l b_\alpha(x_{j,k})\xi^\alpha - \lambda\varrho^{-\nu}(x_{j,k})}$$

angewandt. T_1 und T_2 erfüllen für $\lambda < 0$ die Voraussetzungen des Multiplier-Theorems, denn die Nenner lassen sich nach unten durch

$$C_E|\xi|^{2m} + C_E - \lambda\varrho^{-\nu}(x_{j,k}) \geq C_E\left(1 + |\xi|^{2m}\right)$$

abschätzen und der Grad der Zähler ist höchstens $2m$, siehe Lemma 3.4.4. Die Konstante B aus dem Multiplier-Theorem hängt hierbei weder von j, k noch von λ ab, aber von C_E.
In der Ungleichung $\left\|F^{-1}TFf\right\|_p \leq C\|f\|_p$ sei $T = T_1$ bzw. $T = T_2$ und

$$f = F^{-1}\left(\left(\sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l} (-1)^l b_\alpha(x_{j,k})\xi^\alpha - \lambda\varrho^{-\nu}(x_{j,k})\right) Fv\right).$$

Dann folgt

$$\left\| F^{-1}\left(\left(\sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l} (-1)^l b_\alpha(x_{j,k})\xi^\alpha - \lambda\varrho^{-\nu}(x_{j,k})\right) Fv\right)\right\|_p$$

$$\geq c\left(\left\|F^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^m Fv\right\|_p + |\lambda|\varrho^{-\nu}(x_{j,k})\|v\|_p\right),$$

wobei auch hier c nicht von λ, j, k abhängt.
Das Multiplier–Theorem wird ein weiteres Mal angewendet, mit den Multipliern

$$T_3(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^m}, \quad T_4(\xi) = \frac{1}{(1+|\xi|^2)^m}$$

und mit $f = F^{-1}(1+|\xi|^2)^m Fv$. Dann folgt

$$\left\| F^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^m Fv \right\|_p \geq c \left(\sum_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha v\|_p + \|v\|_p \right).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|A_1 u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} &\geq c\varrho^{\tau+\nu p-\frac{N}{2m}(\nu-\mu)}(x_{j,k}) \left(\sum_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha v\|^p_p + \|v\|^p_p + |\lambda|^p \varrho^{-\nu p}(x_{j,k}) \|v\|^p_p \right) \\
&\geq c\varrho^\tau(x_{j,k}) \left(\sum_{|\alpha|=2m} \|D^\alpha u\|^p_p \varrho^{p\mu}(x_{j,k}) + \|u\|^p_p \varrho^{p\nu}(x_{j,k}) + |\lambda|^p \|u\|^p_p \right) \\
&\geq c_1 \|u\|^p_{W^{2m}_p(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + c_2|\lambda|^p \|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)},
\end{aligned}$$

wobei die positiven Konstanten c_1, c_2 von C_E abhängen, nicht aber von j, k, λ.
Nun wird $A_2 u$ abgeschätzt.
Wegen $b_\alpha \in C^1(\Omega)$ und $|\nabla \varrho^{\kappa_{2l}}(x)| \leq c\varrho^{\kappa_{2l}+1}(x)$ folgt für $x \in K_{k,j}$ die Abschätzung

$$|\varrho^{\kappa_{2l}}(x_{j,k})b_\alpha(x_{j,k}) - \varrho^{\kappa_{2l}}(x)b_\alpha(x)| \leq c2^{j(\kappa_{2l}+1)}|x - x_{j,k}| \leq \varepsilon 2^{j\kappa_{2l}},$$

da in (3.3) die Konstante c_0 beliebig klein gewählt werden kann. Die Konstante c_0 hängt also von $\|b_\alpha\|_{C^1}$ ab.
Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\|A_2 u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} &\leq \varepsilon^p \sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l} \int_\Omega \varrho^\tau(x) 2^{j\kappa_{2l}p} |D^\alpha u(x)|^p \, dx \\
&\leq \varepsilon' \sum_{l=0}^m \sum_{|\alpha|=2l} \int_\Omega \varrho^{\tau+\kappa_{2l}p}(x) |D^\alpha u(x)|^p \, dx \\
&= \varepsilon' \|u\|^p_{W^{2m}_p(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})}.
\end{aligned}$$

Hierbei sei ε', also c_0, hinreichend klein gewählt.
Nun ist noch $A_3 u$ abzuschätzen.
Dazu sei $\omega \subset \Omega$ ein beliebiges Gebiet mit $\overline{\omega} \subset \Omega$. Dann gilt mit einem geeigneten $0 < \theta < 1$ (vgl. Satz 3.2.13)

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{2m-1}_p(\omega)} &\leq c \|u\|^\theta_{W^{2m}_p(\omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L_p(\omega)} \\
&\leq c(\omega) \|u\|^\theta_{W^{2m}_p(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})} \|u\|^{1-\theta}_p \\
&\leq \varepsilon \|u\|_{W^{2m}_p(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})} + c(\varepsilon,\omega,\theta) \|u\|_p.
\end{aligned}$$

Die positive Konstante ε kann beliebig klein gewählt werden.

Dann folgt wegen (3.6) (ε sei generische positive Konstante)

$$\begin{aligned}
\|A_3u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} &\le c\int\limits_{\omega}\sum_{|\beta|<2m}\left|a_\beta(x)D^\beta u(x)\right|^p\varrho^\tau(x)\,dx + c\int\limits_{\Omega\backslash\omega}\sum_{|\beta|<2m}\left|a_\beta(x)D^\beta u(x)\right|^p\varrho^\tau(x)\,dx\\
&\le c(\omega)\int\limits_{\omega}\sum_{|\beta|<2m}\left|D^\beta u(x)\right|^p\varrho^\tau(x)\,dx + \varepsilon\int\limits_{\Omega\backslash\omega}\sum_{|\beta|<2m}\varrho^{p\kappa_{|\beta|}}(x)\left|D^\beta u(x)\right|^p\varrho^\tau(x)\,dx\\
&\le c(\omega)\int_\omega\sum_{|\beta|<2m}\left|D^\beta 2^{j\tau/p}u(x)\right|^p\,dx + \varepsilon\,\|u\|^p_{W_p^{2m-1}(\Omega\backslash\omega,\varrho^{\tau+p\kappa_{2m-1}},\varrho^{\tau+p\nu})}\\
&\le c(\omega)\left\|2^{j\tau/p}u\right\|^p_{W_p^{2m-1}(\omega)} + \varepsilon\,\|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega\backslash\omega,\varrho^{\tau+p\kappa_{2m}},\varrho^{\tau+p\nu})}\\
&\le \varepsilon\,\|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + c(\varepsilon,\omega)\,\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)}\,,
\end{aligned}$$

falls $\Omega\backslash\omega\subset\Omega\backslash\Omega^{j_\varepsilon}$ für ein geeignetes $j_\varepsilon\in\mathbb{N}$.
Wenn ε' und ε hinreichend klein gewählt werden, folgt

$$\|Au-\lambda u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \ge c_1'\,\|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + (c_2|\lambda|^p - c_3)\,\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)}\,.$$

Dabei ist $\lambda\le 0$, c_1', c_2 hängen nur von C_E ab, c_3 hängt von den Abschätzungskonstanten für b_α, $c = c_0(\|b_\alpha\|$, a_β ab.
Die Konstante λ_0 kann so gewählt werden, daß für $\lambda\le\lambda_0$ gilt: $c_2|\lambda|^p - c_3 > 0$.
Nun sei $u\in W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})$ mit $\operatorname{supp} u\in\Omega$. Sei ab jetzt $c_2|\lambda|^p - c_3 > 0$. Nach Definition 3.2.17 gilt

$$u(x) = \sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j}\psi_j(x)\varphi_{j,l}(x)u(x).$$

Es folgt

$$c_1'\,\|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + (c_2|\lambda|^p - c_3)\,\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \le c\sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j}\|\psi_j\varphi_{j,l}u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})}\,.$$

Diese Ungleichung folgt aus Satz 3.2.21 und

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^{\tau+p\nu})} &= \int_\Omega\varrho^{\tau+p\nu}(x)\Big|\sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j}\underbrace{\psi_j(x)\varphi_{j,l}(x)u(x)}_{\substack{\text{höchstens}\\ L\neq 0}}\Big|^p\,dx\\
&\le C_{L,p}\int_\Omega\varrho^{\tau+p\nu}(x)\sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j}|\psi_j(x)\varphi_{j,l}(x)u(x)|^p\,dx
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&c_1'\,\|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + (c_2|\lambda|^p - c_3)\,\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)}\\
&\qquad\le c\sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j}\|A(\psi_j\varphi_{j,l}u) - \lambda\psi_j\varphi_{j,l}u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)}\,.
\end{aligned}$$

Es ist

$$A(\psi_j\varphi_{j,l}u) - \lambda\psi_j\varphi_{j,l}u = \psi_j\varphi_{j,l}(Au - \lambda u) + \sum_{1\le|\alpha|\le 2m-|\beta|}^{|\beta|<2m} c_{\beta,\alpha}(x) D^\alpha(\psi_j\varphi_{j,l}) D^\beta u,$$

wobei $c_{\beta,\alpha} = O(\varrho^{|\alpha|+|\beta|})$ und $D^\alpha(\psi_j\varphi_{j,l}) = O(\varrho^{|\alpha|})$. Wegen $\kappa_{|\alpha|+|\beta|} + |\alpha| < \kappa_{|\beta|}$ $(|\alpha| \ge 1)$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$c_{\beta,\alpha}(x) D^\alpha(\psi_j\varphi_{j,l}) = O(\varrho^{\kappa_{|\beta|}-\delta}).$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j} \|A(\psi_j\varphi_{j,l}u) - \lambda\psi_j\varphi_{j,l}u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \\
&\le c \sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j} \int_\Omega \varrho^\tau(x)|\psi_j(x)\varphi_{j,l}(x)(Au(x) - \lambda u(x))|^p dx \\
&+ c \sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j}\sum_{|\alpha|,|\beta|} \int_\Omega \varrho^\tau \left|c_{\beta,\alpha} D^\alpha \psi_j\varphi_{j,l}\right|^p \left|D^\beta u\right|^p dx \\
&\le C_{L,p} \int_\Omega \varrho^\tau \Big| \sum_{j=M}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_j} \psi_j\varphi_{j,l}|Au - \lambda u|\Big|^p dx + c \sum_{|\beta|\le 2m-1} \int_\Omega \varrho^{\tau+p\kappa_{|\beta|}-p\delta} \left|D^\beta u\right|^p dx \\
&\le C_{L,p} \|Au - \lambda u\|_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} + \varepsilon \|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + c(\varepsilon,\omega)\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde das zweite Integral ähnlich wie A_3u abgeschätzt.
Wenn ε hinreichend klein ist, folgt

$$c_1'' \|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + (c_2|\lambda|^p - c_3)\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \le c\|Au - \lambda u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} + c(\varepsilon)\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)},$$

also

$$c_1'' \|u\|^p_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})} + (c_2|\lambda|^p - c_3')\|u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \le c\|Au - \lambda u\|^p_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)}.$$

Nun wird λ_0 so gewählt, daß für $\lambda \le \lambda_0$ gilt: $c_2|\lambda|^p - c_3' > 0$.
Mit $C_1 := c_1''/c$ folgt dann die Behauptung. ■

Bemerkung 3.3.1 *Die Konstanten C_1, λ hängen nur von der Elliptizitätskonstanten C_E, der Partitionskonstanten c_0 und den Abschätzungskonstanten für b_α, ∇b_α, a_β ab.*

Diese A-priori-Abschätzung läßt sich etwas verallgemeinern:

Folgerung 3.3.1 *Sei $A \in \mathfrak{A}^{(m)}_{\mu,\nu}$, $\sigma \le \nu$. Dann gilt $Au - \lambda\varrho^\sigma u = \varrho^\sigma(\tilde{A}u - \lambda u)$, wobei $\tilde{A}$ aus A durch die Ersetzungen $\mu \mapsto \mu - \sigma$, $\nu \mapsto \nu - \sigma$ hervorgeht. Sei λ_0 die zu $\tilde{A}$ gehörige Konstante aus Satz 3.3.1.*
Falls $\lambda \le \lambda_0$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\|Au - \lambda\varrho^\sigma u\|_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} &= \left\|\varrho^\sigma(\tilde{A}u - \lambda u)\right\|_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} = \left\|\tilde{A}u - \lambda u\right\|_{L_p(\Omega,\varrho^{\tau+p\sigma})} \\
&\ge C_1 \|u\|_{W_p^{2m}\left(\Omega,\varrho^{\tau+p\sigma+p(\mu-\sigma)},\varrho^{\tau+p\sigma+p(\nu-\sigma)}\right)} = C_1\|u\|_{W_p^{2m}(\Omega,\varrho^{\tau+p\mu},\varrho^{\tau+p\nu})}.
\end{aligned}$$

Es gilt also auch für $Au - \lambda\varrho^\sigma u$ eine A-priori-Abschätzung.

3.3.3 Isomorphiesätze

In diesem Abschnitt wird nachgewiesen, daß die entartete elliptische Differentialgleichung

$$Au - \lambda u = f \tag{3.9}$$

unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen genau eine Lösung $u \in W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$ besitzt, falls $f \in L_p(\Omega)$ und $A \in \mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(2)}$.
Dieser Nachweis wird in mehreren Schritten geführt:

1. Zunächst wird nachgewiesen, daß
$$-\triangle u + \varrho^\nu u - \lambda \varrho^\sigma u = f, \quad (\nu > 2, \nu > \sigma, \lambda \leq 0) \tag{3.10}$$
genau eine Lösung $u \in W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$ besitzt, falls $f \in W_2^{2(k-1)}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2(k-1)\nu}\right)$.
Dieser Beweis verwendet die Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren, vgl. Abschnitt 3.1.2.
In diesem Schritt werden die zusätzlichen Voraussetzungen (3.7), (3.8) benötigt.

2. Anschließend werden Einbettungssätze verwendet, um nachzuweisen, daß (3.10) eine Lösung $u \in W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$ besitzt, falls $f \in L_p(\Omega)$.

3. In diesem Schritt werden die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen (3.7), (3.8) an ϱ abgeschwächt. Hierbei wird eine sogenannte Homotopietechnik genutzt. Diese Technik verwendet als wichtige Voraussetzung die A-priori-Abschätzung aus Abschnitt 3.3.2.

4. Die Homotopietechnik wird ein weiteres Mal genutzt, um die Lösbarkeit von (3.9) zu zeigen.

Damit ist der Beweis erbracht.

3.3.3.1 Erster Schritt

In diesem Abschnitt wird folgender Satz bewiesen:

Satz 3.3.2 *Sei ϱ eine Gewichtsfunktion gemäß Definition 3.2.16, die zusätzlich* (3.7) *und* (3.8) *erfüllt.*
Sei weiterhin $\nu > 2$, $\sigma < \nu$,$\lambda \leq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.
Dann besitzt für jedes $f \in W_2^{2(k-1)}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2(k-1)\nu}\right)$ die Gleichung

$$-\triangle u + \varrho^\nu u - \lambda \varrho^\sigma u = f$$

genau eine Lösung $u \in W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$.

Der Beweis gründet sich auf mehrere Hilfssätze.

Lemma 3.3.2 *Der Operator*

$$Au = -\triangle u + \varrho^\nu u, \quad D(A) = C_0^\infty(\Omega)$$

ist wesentlich selbstadjungiert im Hilbertraum $L_2(\Omega)$.

Beweis Für $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist $(Au, v) = (u, Av)$ und

$$(Au, u) = \sum_{i=1}^{N} (u_{x_i}, u_{x_i}) + (\varrho^\nu u, u) \geq c\,(u, u)\,, \quad c > 0.$$

Also ist A symmetrisch und positiv definit.
Es wird bewiesen:
Es existiert ein $\alpha > 0$, so daß $N(A^* + \alpha E) = \{0\}$.
Wegen $L_2(\Omega) = H = \overline{R(A + \alpha E)} \oplus N(A^* + \alpha E)$ folgt dann $H = \overline{R(A + \alpha E)}$.
Es ist $\overline{R(\overline{A} + \alpha E)} \supset \overline{R(A + \alpha E)}$, also $\overline{R(\overline{A} + \alpha E)} = H$.
Nach Satz 3.1.19 ist dann $R(\overline{A} + \alpha E) = H$.
Der Satz 3.1.17 liefert dann die Behauptung.
Es genügt also, $N(A^* + \alpha E) = \{0\}$ zu zeigen, falls α hinreichend groß gewählt wird.
Sei $A^* v + \alpha v = 0$, $\alpha > 0$, $v \in L_2(\Omega)$. Das heißt: Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ist $(A\varphi, v) = (\varphi, A^* v)$.
Dies bedeutet im Distributionensinn

$$-\triangle v + \varrho^\nu v + \alpha v = 0.$$

Sei $\omega \subset \Omega$ ein Gebiet, so daß $\overline{\omega} \subset \Omega$. Untersucht wird das Hilfsproblem

$$\begin{aligned} -\triangle w &= -\varrho^\nu v - \alpha v && \text{in } \omega, \\ w &= 0 && \text{auf } \partial\omega. \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Lax–Milgram und der Friedrichschen Ungleichung folgt, daß dieses elliptische Hilfsproblem eine Lösung $w \in \overset{o}{W}{}_2^1(\omega)$ besitzt. Der Satz 3.4.1 liefert dann $u \in W^2_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$.
In ω gilt $\triangle(v - w) = 0$ und $v - w \in \mathfrak{D}'(\omega)$, also ist nach dem Weylschen Lemma $v - w$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Daraus folgt $v \in W^2_{2,\mathrm{loc}}(\omega)$.
Mittels vollständiger Induktion läßt sich $v \in W^{2k}_{2,\mathrm{loc}}(\omega)$ zeigen:
Es sei $v \in W^{2(k-1)}_{2,\mathrm{loc}}(\omega)$, $k \geq 2$. Dann ist $-\varrho^\nu v - \alpha v \in W^{2(k-1)}_{2,\mathrm{loc}}(\omega)$, da die Ableitungen von ϱ auf $\overline{\omega}$ beschränkt sind. Dann folgt aus Satz 3.4.1 $w \in W^{2k}_{2,\mathrm{loc}}(\omega)$. Mit Hilfe des Weylschen Lemmas folgt dann $v \in W^{2k}_{2,\mathrm{loc}}(\omega)$.
Da ω in Ω beliebig gewählt werden kann, folgt $v \in C^\infty(\Omega)$.
Sei $\Psi = (\psi_l)_{l=M}^\infty$ eine Zerlegung der Eins gemäß Definition 3.2.17. Sei

$$\varphi_j(x) := \frac{\sum_{l=M}^{j} \psi_l(x)}{\sqrt{\varrho^\nu(x) + \alpha}}, \quad j = M, M+1, \ldots.$$

Es gilt $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$.
Die Greensche Formel liefert

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-\triangle(\varphi_j v) + \varrho^\nu \varphi_j v + \alpha \varphi_j v)\, \varphi_j v\, dx &= \int_\Omega |\nabla(\varphi_j v)|^2 + (\varrho^\nu + \alpha)\,(\varphi_j v)^2\, dx \\ &\geq \int_\Omega (\varrho^\nu + \alpha)\, \varphi_j^2 v^2\, dx = \int_\Omega \left(\sum_{l=M}^{j} \psi_l(x) \right)^2 v^2(x)\, dx. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Da v und φ_j im klassischen Sinne differenzierbar sind, gilt

$$2(\nabla\varphi_j)(\nabla v)\varphi_j v = 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} \varphi_j v = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial(\varphi_j^2)}{\partial x_k} \frac{\partial(v^2)}{\partial x_k}. \tag{3.12}$$

Es ist

$$\begin{aligned}-\triangle(\varphi_j v) &= -(\triangle\varphi_j)v - 2(\nabla\varphi_j)(\nabla v) - \varphi_j \triangle v \\ &= -(\triangle\varphi_j)v - 2(\nabla\varphi_j)(\nabla v) - (\varrho^\nu + \alpha)\varphi_j v.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Aus (3.11), (3.12), (3.13) folgt dann

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\sum_{l=M}^{j} \psi_l\right)^2 v^2\,dx &\le \int_\Omega \left(-\triangle(\varphi_j v) + \varrho^\nu \varphi_j v + \alpha\varphi_j v\right)\varphi_j v\,dx \\ &= \int_\Omega -(\triangle\varphi_j)\varphi_j v^2 - \frac{1}{2}\left(\nabla\varphi_j^2\right)\left(\nabla v^2\right)\,dx.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Die Greensche Formel und die Produktregel liefern

$$\begin{aligned}\int_\Omega -(\triangle\varphi_j)\varphi_j v^2\,dx = \int_\Omega (\nabla\varphi_j)(\nabla(\varphi_j v^2))\,dx &= \int_\Omega (\nabla\varphi_j)^2 v^2\,dx + \int_\Omega (\nabla\varphi_j)\varphi_j(\nabla v^2)\,dx \\ &= \int_\Omega (\nabla\varphi_j)^2 v^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\varphi_j^2)(\nabla v^2)\,dx.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Aus (3.14) und (3.15) ergibt sich

$$\int_\Omega \left(\sum_{l=M}^{j} \psi_l(x)\right)^2 v^2\,dx \le \int_\Omega (\nabla\varphi_j)^2\, v^2\,dx. \tag{3.16}$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=M}^{j}\psi_l\right)\sqrt{\varrho^\nu+\alpha} - \left(\sum_{l=M}^{j}\psi_l\right)\frac{1}{2}\frac{\nu\varrho^{\nu-1}\frac{\partial}{\partial x_k}\varrho}{\sqrt{\varrho^\nu+\alpha}}}{\varrho^\nu+\alpha},$$

wegen $|\nabla\varrho(x)| \le C\varrho^2(x)$ also

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j\right| \le \frac{\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=M}^{j}\psi_l\right|}{\sqrt{\varrho^\nu+\alpha}} + c\left(\sum_{l=M}^{j}\psi_l\right)\frac{\varrho^{\nu+1}(x)}{(\varrho^\nu(x)+\alpha)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.17}$$

Gemäß Definition 3.2.17 ist

$$\operatorname{supp}\psi_l \subset \Omega_l = \left\{x \in \Omega : 2^{l-1} \le \varrho(x) < 2^{l+2}\right\}.$$

Falls $x \in \Omega^{j-1}$, also $\varrho(x) \le 2^{j-1}$, dann ist $\sum_{l=M}^{j}\psi_l(x) = 1$ und $\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=M}^{j}\psi_l(x) = 0$. Der erste Bruch in (3.17) kann also nur für $\varrho(x) \ge 2^{j-1}$ einen positiven Wert annehmen.
Für diese x ist $\psi_l(x) = 0$, falls $M \le l \le j-3$. Dann ist

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l=M}^{j}\psi_l(x)\right| \le c2^j$$

c unabhängig von j, vgl. Definition 3.2.17. Andererseits ist dann

$$\sqrt{\varrho^\nu(x)+\alpha} \ge \varrho^{\frac{\nu}{2}}(x) \ge 2^{(j-1)\frac{\nu}{2}} \ge c2^{j\frac{\nu}{2}}.$$

Dann ergibt sich mit positiven (von j und x unabhängigen) Konstanten c_1, c_2

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi_j(x)\right|^2 \leq c_1 2^{2j-\nu j} + c_2 \left(\sum_{l=M}^{j} \psi_l(x)\right)^2 \frac{\varrho^{2\nu+2}(x)}{\left(\varrho^\nu(x)+\alpha\right)^3} \quad \text{für alle } x \in \Omega. \tag{3.18}$$

Wegen $\nu > 2$ ist auch $2\nu + 2 < 3\nu$. Folglich ist

$$\lim_{x\to\partial\Omega} \frac{\varrho^{2\nu+2}(x)}{\left(\varrho^\nu(x)+\alpha\right)^3} = 0,$$

also auch

$$\frac{\varrho^{2\nu+2}(x)}{\left(\varrho^\nu(x)+\alpha\right)^3} \leq C \quad \forall x \in \Omega.$$

Sei nun $\alpha > 0$ so groß gewählt, daß für ein beliebiges (aber festes) $1 > \varepsilon > 0$

$$N c_2 \frac{\varrho^{2\nu+2}(x)}{\left(\varrho^\nu(x)+\alpha\right)^3} \leq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega \tag{3.19}$$

gilt. Dann folgt aus (3.16), (3.18), (3.19)

$$(1-\varepsilon)\int_\Omega \left(\sum_{l=M}^{j} \psi_l(x)\right)^2 v^2(x)\,dx \leq N c_1 2^{2j-\nu j} \int_\Omega v^2(x)\,dx.$$

Für $j \to \infty$ strebt die linke Seite gegen $(1-\varepsilon)\int v^2(x)\,dx$ (Konvergenzsatz von Lebesgue) und die rechte Seite gegen 0, da $\nu > 2$.
Also folgt $v(x) = 0$ fast überall in Ω.
Dann ist $\overline{A}$ selbstadjungiert im Hilbertraum $L_2(\Omega)$. ■
Wie aus einem Gegenbeispiel in [Tri67] folgt, ist die Aussage dieses Lemmas für $\nu = 2$ im Allgemeinen falsch.

Lemma 3.3.3 *Es gilt* $D(\overline{A}) = W_2^2\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2\nu}\right)$.

Beweis Der Raum $D(\overline{A})$ ist der Abschluß des Raumes $D(A)$ in der Norm

$$\|u\|_A = \sqrt{(u,u)_H + (Au, Au)_H}.$$

Weiterhin ist $D(\overline{A}) = D(\overline{A} - \lambda_1 E)$. Sei $\lambda_0 < 0$ so gewählt, daß für jedes $\lambda_1 \leq \lambda_0$ Konstanten c_1, c_2 existieren, so daß für alle $u \in W_2^2\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2\nu}\right)$

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega,\varrho^0,\varrho^{2\nu})} \leq c_1 \|Au - \lambda_1 u\|_2 \leq c_2 \|u\|_{W_2^2(\Omega,\varrho^0,\varrho^{2\nu})}$$

gilt. Dies ist auf Grund des Satzes 3.3.1 möglich. Der Raum $W_2^2\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2\nu}\right)$ ist in der $\|.\|_A$–Norm abgeschlossen und enthält den Raum $C_0^\infty(\Omega)$ als dichte Teilmenge. Dann folgt $D(\overline{A}) \subset W_2^2\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2\nu}\right)$. Die andere Inklusion ergibt sich unmitelbar aus den Ungleichungen

$$\begin{aligned}\|u-u'\|_{W_2^2(\Omega,\varrho^0,\varrho^{2\nu})} &\leq c\,\|A(u-u') - \lambda_1(u-u')\|_2 \leq c'\,\|u-u'\|_A \\ &\leq c''(\|A(u-u') - \lambda_1(u-u')\|_2 + \|u-u'\|_2) \leq c'''\,\|u-u'\|_{W_2^2(\Omega,\varrho^0,\varrho^{2\nu})}\end{aligned}$$

für $u, u' \in C_0^\infty(\Omega)$. ■.

Lemma 3.3.4 *Es ist* $H_A = W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right)$.

Beweis Für die Norm $\|u\|_\gamma = \sqrt{(Au,u) + \gamma\,(u,u)}$ $(\gamma > 0)$ gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|_\gamma^2 &= (Au,u) + \gamma\,(u,u) \\
&= \int_\Omega -(\triangle u) u\,dx + \int_\Omega \varrho^\nu u^2\,dx + \gamma \int_\Omega u^2\,dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \left\|\varrho^{\frac{\nu}{2}} u\right\|_2^2 + \gamma\,\|u\|_2^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$c_1\,\|u\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^0,\varrho^\nu)} \leq \|u\|_\gamma \leq c_2\,\|u\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^0,\varrho^\nu)} \quad \forall u \in W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right). \tag{3.20}$$

Die Behauptung wird in 2 Schritten bewiesen.
1. Schritt
Sei $u \in W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right)$.
Wegen Satz 3.2.18 existiert eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$u_n \xrightarrow{W_2^1(\Omega,\varrho^0,\varrho^\nu)} u.$$

Dann gilt wegen (3.20) auch $\|u_n - u\|_\gamma \to 0$, also $\|u_n - u\|_2 \to 0$ und $\|u_n - u_m\|_\gamma \to 0$. Dann ist $u \in H_A$, daraus folgt $W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right) \subset H_A$.
2. Schritt
Sei $u \in H_A$.
Dann existiert eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u_n - u\|_2 \to 0$ und $\|u_n - u_m\|_\gamma \to 0$. Dann ist auch $\|u_n - u_m\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^0,\varrho^\nu)} \to 0$. Also ist (u_n) im Banachraum $W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right)$ eine Cauchyfolge und besitzt deshalb ein Grenzelement $v \in W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right)$.
Aus $\|u_n - v\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^0,\varrho^\nu)} \to 0$ folgt $\|u_n - v\|_2 \to 0$, also $u = v$.
Daraus ergibt sich $H_A \subset W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right)$. ■

Lemma 3.3.5 *Der Operator* $\overline{A}$ *ist ein Operator mit reinem Punktspektrum.*

Beweis Nach dem Kriterium von Rellich genügt es zu zeigen, daß der Einbettungsoperator $E(H_{\overline{A}} \to H)$ kompakt ist.
Es ist

$$H_{\overline{A}} = H_A = W_2^1\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^\nu\right) \overset{\text{stetig}}{\subset} W_2^1(\Omega) \overset{\text{kompakt}}{\subset} L_2(\Omega) = H.$$

Also ist die Einbettung $H_{\overline{A}} \subset H$ kompakt. ■
Das folgende Lemma ist für die weiteren Untersuchungen von besonderer Bedeutung.

Lemma 3.3.6 *Die Menge der endlichen Linearkombinationen der Eigenelemente von* $\overline{A}$ *liegt in* $L_2(\Omega)$ *dicht.*

Beweis Nach Satz 3.1.20 bilden die orthonormierten Eigenelemente $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein vollständiges System im Raum $L_2(\Omega)$, das heißt, für jedes $u \in L_2(\Omega)$ konvergiert die Folge

$$\left(\sum_{j=1}^n (u_j, u)\,u_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen u. Daraus folgt die Behauptung. ■
Das nächste Lemma ist eine erste Lösbarkeitsaussage.

Lemma 3.3.7 *Für jedes $f \in L_2(\Omega)$ existiert genau ein $u \in W_2^2\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2\nu}\right)$ mit*

$$Au = f.$$

Beweis Der Beweis ergibt sich sofort aus Satz 3.1.21. ∎
Das folgende Lemma beschreibt die Eigenfunktionen genauer.

Lemma 3.3.8 *Jede Eigenfunktion von $\overline{A}$ liegt in $\cap_{k=1}^{\infty} W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$.*

Der Beweis kann in [Tri78], Abschnitt 6.4.2 nachgelesen werden.
In [Tri67] ist ein Beispiel angegeben, daß die Aussage dieses Lemmas für $\nu = 2$ im Allgemeinen falsch ist.

Lemma 3.3.9 *Sei $k = 1, 2, \ldots$ und $A_0 := -\triangle + \varrho^\nu$, $\nu > 2$. Dann ist der Operator $\overline{A_0^k} = \overline{A_0}^k$ selbstadjungiert im $L_2(\Omega)$ und es gilt $L_2(\Omega) = R(\overline{A_0^k})$.*

Beweis Die Menge der endlichen Linearkombinationen von Eigenfunktionen von $\overline{A_0}$ liegt dicht im $L_2(\Omega)$. Jede Eigenfunktion von $\overline{A_0}$ ist auch Eigenfunktion von $\overline{A_0}^k$. Dann folgt $\overline{L_2(\Omega) = R(A_0^k)}$. Weil $\overline{A_0^k}$ positiv definit ist, gilt nach Satz 3.1.19 $L_2(\Omega) = R(\overline{A_0^k})$. Dann ist $\overline{A_0^k}$ selbstadjungiert. ∎

Lemma 3.3.10 *Sei $A = A_0 - \lambda\varrho^\sigma$, $\lambda \leq 0$ und $\sigma < \nu$. Dann sind $\overline{A^k}$, $k = 1, 2, \ldots$ selbstadjungiert.*

Beweis Sei D der Differentialoperator mit $A^k = A_0^k + D$. Dann gilt für $u \in W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$

$$\|Du\|_2 \leq \varepsilon \|u\|_{W_2^{2k}(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu})} + c(\varepsilon)\|u\|_2 \leq \varepsilon' \left\|A_0^k u\right\|_2 + c'(\varepsilon')\|u\|_2 .$$

Hierbei wurde Du in gleicher Weise abgeschätzt wie der Term $A_3 u$ im Beweis zu Satz 3.3.1. Die Konstanten ε, ε' können beliebig klein gewählt werden. Das Kriterium von Kato liefert die Behauptung. ∎
Folglich gilt $R(\overline{A}^k) = L_2(\Omega)$.
Nun stehen alle Hilfsmittel zum Beweis des zentralen Satzes dieses Unterabschnittes bereit.

Satz 3.3.3 *Seien $k = 1, 2, 3, \ldots$ und $\lambda \leq 0$ gewählt. Dann existiert zu jedem $f \in W_2^{2(k-1)}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2(k-1)\nu}\right)$ genau ein $u \in W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$ mit*

$$Au = -\triangle u + \varrho^\nu u - \lambda\varrho^\sigma u = f.$$

Beweis Es ist $A^{k-1} f \in L_2(\Omega)$. Also existiert genau ein $u \in W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$ mit $A^k u = A^{k-1} f$. Offensichtlich gilt $A^{k-1}(Au - f) = 0$. Da A^{k-1} positiv definit ist, folgt $Au - f = 0$.
∎

3.3.3.2 2. Schritt

In diesem Unterabschnitt wird folgender Satz bewiesen:

Satz 3.3.4 *Zu jedem $\tau \leq 0$, p, $1 < p < \infty$ existiert eine Konstante $\lambda_0 < 0$, so daß für $\lambda \leq \lambda_0$ gilt:*
Zu jedem $f \in L_p(\Omega, \varrho^\tau)$ existiert genau ein $u \in W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$ mit

$$Au = -\triangle u + \varrho^\nu u - \lambda\varrho^\sigma u = f.$$

Für den Beweis wird ein Lemma benötigt:

Lemma 3.3.11 *Sei $1 < p < \infty$. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so daß der Raum $W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$ stetig in $W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$ eingebettet ist.*

Beweis Sei k eine natürliche Zahl mit

$$t := 2k + \frac{N}{p} - \frac{N}{2} \geq 2.$$

Dann ist $t - \frac{N}{p} = 2k - \frac{N}{2}$ und nach Einbettungssatz 3.2.23 ist die Einbettung

$$W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right) \subset W_p^t\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{p\nu\frac{t}{2}}\right)$$

stetig, denn

$$\frac{0}{p} = \frac{0}{2}, \quad \frac{p\nu\frac{t}{2}}{p} = \frac{0}{2}\frac{2k-t}{2k} + \frac{2k\nu}{2}\frac{t}{2k}.$$

Falls $u \in W_p^t\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{p\nu\frac{t}{2}}\right)$, dann gilt (vgl. Satz 3.2.20)

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=r} \varrho^{\kappa_r}(x)\, |D^\alpha u(x)|^p \, dx \leq c\, \|u\|_{W_p^t\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{p\nu\frac{t}{2}}\right)}$$

mit $\kappa_r = 0\frac{r}{t} + p\nu\frac{t}{2}\frac{t-r}{t}$, $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq t$.
Es ist

$$\kappa_0 = p\nu\frac{t}{2} \geq p\nu + \tau, \quad \kappa_1 = p\nu\frac{t}{2}\frac{t-1}{t} \geq \frac{p\nu}{2} + \tau, \quad \kappa_2 = p\nu\frac{t}{2}\frac{t-2}{t} \geq \tau.$$

Also ist $\|u\|_{W_p^2(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu})} \leq c\, \|u\|_{W_p^t\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{p\nu\frac{t}{2}}\right)}$. Damit folgt

$$W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right) \overset{\text{stetig}}{\subset} W_p^t\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{p\nu\frac{t}{2}}\right) \overset{\text{stetig}}{\subset} W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Zum Beweis des Satzes

Zu festem p sei k so gewählt, daß $W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right) \subset W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$. Es existiert eine Konstante $\lambda_0 = \lambda_0(p)$, so daß für alle $\lambda \leq \lambda_0$ gilt:

$$c_1\, \|u\|_{W_p^2(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu})} \leq \|Au\|_p \leq c_2\, \|u\|_{W_p^2(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu})}. \tag{3.21}$$

Sei $f \in L_p(\Omega, \varrho^\tau)$ gegeben. Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L_p(\Omega, \varrho^\tau)$ liegt, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $f_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_p(\Omega, \varrho^\tau)} < \varepsilon.$$

Es ist $f_\varepsilon \in W_2^{2(k-1)}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2(k-1)\nu}\right)$, also existiert $u_\varepsilon \in W_2^{2k}\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2k\nu}\right)$ mit $Au_\varepsilon = f_\varepsilon$.
Es gilt aufgrund der Wahl von k $u_\varepsilon \in W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$.
Wenn (ε_n) eine Nullfolge positiver Zahlen ist, dann ist (u_{ε_n}) eine Cauchyfolge im Banachraum $W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$, besitzt also ein Grenzelement $u \in W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$.
Mit Hilfe der A-priori-Abschätzung läßt sich $Au = f$ zeigen.
Die Eindeutigkeit ergibt sich ebenfalls aus der A-priori-Abschätzung (3.21). ■

3.3.3.3 3. Schritt

In diesem Unterabschnitt wird folgender Satz bewiesen:

Satz 3.3.5 *Sei ϱ eine Gewichtsfunktion, die die Bedingungen in Definition 3.2.16 erfüllt. Zusätzlich wird vorausgesetzt:*
Es existiert eine Funktion $\varrho_0(x)$ und Konstanten $0 < c_1 < 1 < c_2$ mit

1. $c_1\varrho(x) \leq \varrho_0(x) \leq c_2\varrho(x) \quad \forall x \in \Omega$,
2. *ϱ_0 ist Gewichtsfunktion im Sinne von Definition 3.3.2, es gilt also*

$$|D^\gamma \varrho_0(x)| \leq C_{|\gamma|}\varrho_0^{1+|\gamma|}(x) \quad \forall x \in \Omega, \forall \gamma. \tag{3.22}$$

Sei $\tau \leq 0, 1 < p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $\lambda_0 < 0$, so daß für jedes $\lambda \leq \lambda_0$ der Operator

$$A = -\triangle + (\varrho^\nu - \lambda\varrho^\sigma)\, E$$

den Raum $W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$ umkehrbar eindeutig auf $L_p(\Omega, \varrho^\tau)$ abbildet.

Beweis Aus den Bedingungen an ϱ_0 folgt unmittelbar, daß eine positive Konstante M mit $|\varrho_0^\nu(x) - \varrho^\nu(x)| \leq M\varrho^\nu(x)\ \forall x \in \Omega$ existiert. Es gilt $W_p^2(\Omega, \varrho_\alpha^\tau, \varrho_\alpha^{\tau+p\nu}) = W_p^2(\Omega, \varrho_0^\tau, \varrho_0^{\tau+p\nu})$ (im Sinne der Gleichheit der Mengen und Äquivalenz der Normen), wobei

$$\varrho_\alpha^\nu(x) := \alpha\varrho^\nu(x) + (1-\alpha)\varrho_0^\nu, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Die Konstanten für die Normäquivalenz sind hierbei von α unabhängig.
Die Konstante λ_0 wird wie im Satz 3.3.4 gewählt und hängt nicht von α ab.
Nun wird der Operator

$$A_\alpha u := -\triangle u + (\alpha\varrho^\nu + (1-\alpha)\varrho_0^\nu)\, u - \lambda\, (\alpha\varrho^\sigma + (1-\alpha)\varrho_0^\sigma)\, u$$

untersucht. Es ist

$$\|u\|_{W_p^2(\Omega,\varrho^\tau,\varrho^{\tau+p\nu})} \leq c_0\, \|A_\alpha u\|_{L_p(\Omega,\varrho^\tau)} \quad \forall \alpha \in [0,1], \quad \forall u \in W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right).$$

Der Operator A_0 beschreibt eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Raumes $R_1 = W_p^2\left(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu}\right)$ auf den Raum $R_2 = L_p(\Omega, \varrho^\tau)$, vgl. Satz 3.3.4, und es gilt

$$\left\|A_0^{-1}\right\| \leq c_0.$$

Es sei nun vorausgesetzt, daß der Operator A_{α_0}, $0 \leq \alpha_0 < 1$, den Raum R_1 umkehrbar eindeutig auf R_2 abbildet.
Sei $\alpha_0 < \alpha \leq 1$ gewählt. Nun wird die Gleichung

$$A_\alpha u = f \in L_p(\Omega, \varrho^\tau)$$

untersucht. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$u + A_{\alpha_0}^{-1}\left(A_\alpha - A_{\alpha_0}\right) u = A_{\alpha_0}^{-1} f. \tag{3.23}$$

Sei $T : R_1 \to R_1$ der stetige Operator

$$Tv := A_{\alpha_0}^{-1} f - A_{\alpha_0}^{-1}\left(A_\alpha - A_{\alpha_0}\right) v.$$

Dann kann (3.23) als $u = Tu$ geschrieben werden. Es ist

$$\begin{aligned}\|Tu - Tv\|_{R_1} &\le c_0 \left\|(A_\alpha - A_{\alpha_0})(u-v)\right\|_{R_2} \\ &\le c_0|\alpha_0 - \alpha| \left(\|(\varrho^\nu - \varrho_0^\nu)(u-v)\|_{R_2} + \|\lambda(\varrho^\sigma - \varrho_0^\sigma)(u-v)\|_{R_2}\right) \\ &\le c_0|\alpha_0-\alpha| CM \|u-v\|_{R_1},\end{aligned}$$

C unabhängig von α, α_0, u, v. Also existiert eine Konstante $d > 0$ (unabhängig von α_0, α), so daß für $|\alpha_0 - \alpha| \le d$ der Operator T kontrahierend ist.

Der Fixpunktsatz von Banach liefert dann eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in W_p^2(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu})$ der Gleichung (3.23).

Diese Argumentation läßt sich nun mit $\alpha_0 := \alpha$ anstatt des bisherigen α_0 wiederholen.

Nach endlich vielen Schritten folgt, daß A_1 den Raum $W_p^2(\Omega, \varrho^\tau, \varrho^{\tau+p\nu})$ umkehrbar eindeutig auf $L_p(\Omega, \varrho^\tau)$ abbildet. ■.

Es stellt sich die Frage, ob nicht vielleicht zu jeder C^1–Gewichtsfunktion ϱ im Sinne der Definition 3.2.16 eine solche Funktion ϱ_0 mit den obigen Eigenschaften existiert. Diese Frage soll hier allerdings nicht weiter verfolgt werden.

3.3.3.4 4. Schritt

In diesem Abschnitt wird bewiesen:

Satz 3.3.6 *Sei $A \in \mathfrak{A}_{\mu,\nu}^{(2)}$, $\nu \ge 0$.*
Dann existiert eine Konstante $\lambda_0 < 0$, so daß für $\lambda \le \lambda_0$ und $\sigma \le \nu$ der Operator $A - \lambda\varrho^\sigma E$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Raumes $W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$ auf den Raum $L_p(\Omega)$ beschreibt.

Dem Beweis wird folgendes Lemma vorausgeschickt:

Lemma 3.3.12 *Sei $\beta > \alpha + 2p$ und $u \in W_p^2\left(\Omega, \varrho^\alpha, \varrho^\beta\right)$.*
Dann gilt $\varrho^\mu u \in W_p^2\left(\Omega, \varrho^{\alpha - p\mu}, \varrho^{\beta - p\mu}\right)$.

Beweis Es ist

$$\sum_{|\gamma|=2} \int_\Omega \varrho^\alpha |D^\gamma u|^p \, dx + \sum_{|\gamma|=1} \int_\Omega \varrho^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} |D^\gamma u|^p \, dx + \int_\Omega \varrho^\beta |u|^p \, dx < \infty.$$

Für $\varrho^\mu u$ gilt dann ($|\gamma| = 2, 1$)

$$|D^\gamma(\varrho^\mu u)| \le c\left(|D^\gamma \varrho^\mu|\,|u| + |\nabla\varrho^\mu|\,|\nabla u| + \varrho^\mu\,|D^\gamma u|\right) \le c\left(\varrho^{\mu+2}|u| + \varrho^{\mu+1}|\nabla u| + \varrho^\mu\,|D^\gamma u|\right)$$

und $|D^\gamma(\varrho^\mu u)| \le c\left(\varrho^{\mu+1}|u| + \varrho^\mu |D^\gamma u|\right)$. Also folgt

$$
\begin{aligned}
&\|\varrho^\nu u\|_{W_p^2(\Omega,\varrho^{\alpha-p\mu},\varrho^{\beta-p\mu})} \\
&\le c\sum_{|\gamma|=2}\int_\Omega \varrho^{\alpha-p\mu}|D^\gamma(\varrho^\mu u)|^p dx + c\sum_{|\gamma|=1}\int_\Omega \varrho^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-p\mu}|D^\gamma(\varrho^\mu u)|^p dx + c\int_\Omega \varrho^{\beta-p\mu}|\varrho^\mu u|^p dx \\
&\le c\int_\Omega \varrho^{\alpha-p\mu}\varrho^{p(\mu+2)}|u|^p\,dx + c\sum_{|\gamma|=1}\int_\Omega \varrho^{\alpha-p\mu}\varrho^{p(\mu+1)}|D^\gamma u|^p\,dx + c\sum_{|\gamma|=2}\int_\Omega \varrho^{\alpha-p\mu}\varrho^{p\mu}|D^\gamma u|^p\,dx \\
&+ c\int_\Omega \varrho^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-p\mu}\varrho^{p(\mu+1)}|u|^p\,dx + c\sum_{|\gamma|=1}\int_\Omega \varrho^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-p\mu}\varrho^{p\mu}|D^\gamma u|^p\,dx \\
&+ c\int_\Omega \varrho^{\beta-p\mu}\varrho^{p\mu}|u|^p\,dx \\
&\le c\,\|u\|_{W_p^2(\Omega,\varrho^{p\alpha},\varrho^{p\beta})}.
\end{aligned}
$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Zum Beweis des Satzes Sei λ_0 die Konstante der A-priori-Abschätzung.
Der Operator

$$B_0 := -\triangle + \left(\varrho^{\nu-\mu} - \lambda\varrho^{\sigma-\mu}\right)E$$

bildet für jedes $\kappa \le 0$ den Raum $W_p^2\left(\Omega, \varrho^\kappa, \varrho^{\kappa+p(\nu-\mu)}\right)$ umkehrbar eindeutig auf den Raum $L_p(\Omega, \varrho^\kappa)$ ab. Sei $B = \varrho^\mu B_0$ und

$$A_\alpha := \alpha\,(A - \lambda\varrho^\sigma) + (1-\alpha)B = \alpha A + (1-\alpha)(-\varrho^\mu\triangle + \varrho^\nu E) - \lambda\varrho^\sigma E, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Es ist $A_\alpha \in \mathfrak{A}^{(2)}_{\mu,\nu}$ für jedes $0 \le \alpha \le 1$, die Konstanten C_1, λ_0 aus der A-priori-Abschätzung hängen nicht von α ab, vgl. Bemerkung 3.3.1.

Es ist $A_0 = \varrho^\mu B_0$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Raumes $R_1 = W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$ auf den Raum $R_2 = L_p(\Omega)$.

Denn: Falls $u \in R_1$, dann ist offensichtlich $\varrho^\mu B_0 \in R_2$. Falls $f \in L_p(\Omega)$, dann ist $\varrho^{-\mu}f \in L_p(\Omega, \varrho^{p\mu})$ und $B_0^{-1}(\varrho^{-\mu}f) \in W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$.

Angenommen, A_{α_0} $(0 \le \alpha_0 < 1)$ erzeugt eine umkehrbar eindeutige Abbildung von R_1 auf R_2.

Dann gilt (vgl. die A-priori-Abschätzung)

$$\left\|A_{\alpha_0}^{-1}\right\| \le \frac{1}{C_1}.$$

Nun wird die Gleichung $A_\alpha u = f \in R_2$, $\alpha_0 < \alpha \le 1$ untersucht. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$u + A_{\alpha_0}^{-1}(A_\alpha - A_{\alpha_0})u = A_{\alpha_0}^{-1}f \in R_1.$$

Es ist

$$A_\alpha - A_{\alpha_0} = (\alpha - \alpha_0)(A - B - \lambda\varrho^\sigma),$$

also $\|A_\alpha - A_{\alpha_0}\| \le c|\alpha - \alpha_0|$. Dann folgt

$$\left\|A_{\alpha_0}^{-1}(A_\alpha - A_{\alpha_0})\right\| \le \frac{c}{C_1}|\alpha - \alpha_0| < 1,$$

falls $|\alpha - \alpha_0| < \frac{C_1}{c}$. Der Fixpunktsatz von Banach garantiert die Existenz einer Lösung $u \in R_1$ für $A_\alpha u = f$.

Nach endlich vielen Schritten ist bewiesen, daß $A - \lambda\varrho^\sigma E$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$ auf $L_p(\Omega)$ erzeugt. ■
Für dieses Existenzresultat ist die Voraussetzung $\nu > \mu + 2$ wesentlich, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt, vgl. [Tri67].
Gegenbeispiel Sei $\Omega = (-1, 1)$, $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1}$, $\nu = 2$, $\mu = 0$. Dann hat die Gleichung

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + 3\varrho^\nu\right) u = 6(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

die Lösung $u(x) = (1-x^2)^{\frac{3}{2}}$. Es gilt jedoch $u \notin W_2^2\left(\Omega, \varrho^0, \varrho^{2\nu}\right)$, da $u_{xx} \notin L_2(\Omega)$ und $\varrho^\nu u \notin L_2(\Omega)$.

3.4 Weitere Hilfsmittel

Im Abschnitt 3.2.1 wurde ein Regularitätssatz angekündigt. Dieses Resultat wird jetzt nachgeholt.
Dafür ist ein weiterer Lösungsbegriff erforderlich:

Definition 3.4.1 *Die Funktion $u \in W_2^1(\Omega)$ heißt schwache Lösung von*

$$-\triangle u = f \in L_2(\Omega),$$

wenn für jedes $\varphi \in \mathfrak{D}$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

gilt.

Dann gilt folgender Satz:

Satz 3.4.1 *Sei $u \in W_2^1(\Omega)$ schwache Lösung von*

$$-\triangle u = f$$

und sei $f \in W_2^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes Gebiet Ω_0 mit $\overline{\Omega_0} \subset \Omega$ $u \in W_2^{k+2}(\Omega_0)$.

Dieser Satz ist ein Spezialfall des Theorems 16.5 in [Fri76].
Das folgende Lemma wird oft verwendet, ein Beweis findet sich in [Kač85].

Lemma 3.4.1 (Gronwall) *Seien (a_i), (A_i) Folgen positiver reeller Zahlen und $L > 0$. Die Folge (A_i) sei monoton nichtfallend und es sei $0 < h < \frac{1}{L}$ eine beliebige reelle Zahl. Wenn für jedes $i = 1, 2, \ldots$ die Ungleichung*

$$a_i \leq A_i + L \sum_{j=1}^{i} a_j h$$

erfüllt ist, dann gilt

$$a_i \leq \frac{A_i}{1 - Lh} e^{\frac{(i-1)hL}{1-Lh}}$$

für alle $i = 1, 2, \ldots$.

Es gibt auch eine stetige Version dieses Lemmas:

Lemma 3.4.2 (Gronwall) *Sei $h(t) \in C([a,b])$ eine monoton nichtfallende Funktion mit $h(t) \geq 0$ in $[a,b]$.*
Sei $y(t)$ eine stetige Funktion mit

$$y(t) \leq h(t) + C_0 \int_a^t y(\tau)\, d\tau \quad \forall a \leq t \leq b, C_0 > 0.$$

Dann gilt für jedes $a \leq t \leq b$ die Ungleichung

$$y(t) \leq h(t) e^{C_0(t-a)}.$$

Für spätere Abschätzungen wird das folgende, vergleichsweise technische, Lemma benötigt. Dieses Lemma ist eine Modifikation eines ähnlichen Resultats in [Plu93].
Dazu ist eine Definition vonnöten.

Definition 3.4.2 *Seien $\lambda_1, \lambda_2 > 0$.*
Dann sei

$$Q_{\lambda_1,\lambda_2}(t) := \begin{cases} t^{\lambda_1} & : 0 \leq t \leq 1, \\ t^{\lambda_2} & : t > 1. \end{cases}$$

Lemma 3.4.3 *Seien $(m_\nu), (\beta_{1,\nu}), (\beta_{2,\nu}), (p_\nu)$ Folgen nichtnegativer Zahlen mit*

$$\begin{aligned} &0 < \beta_{1,\nu} \leq \beta_{2,\nu} \leq 1, \\ &\prod_{\nu=1}^{\infty} \beta_{1,\nu} = \beta_1 > 0, \quad \prod_{\nu=1}^{\infty} \beta_{2,\nu} = \beta_2 > 0, \\ &p_\nu = p_0 \lambda^\nu, \quad \lambda > 1, \quad p_0 \geq 1 \end{aligned}$$

Sei weiterhin

$$m_\nu^{p_\nu} \leq C_0 p_\nu^{C_1} t \left(m_{\nu-1}^{p_\nu} + m_{\nu-1}^{\beta_{1,\nu} p_\nu} + m_{\nu-1}^{\beta_{2,\nu} p_\nu} \right), \quad \forall \nu = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann gilt

$$\limsup_{\nu \to \infty} m_\nu \leq c Q_{\lambda_1,\lambda_2}(t) m_0^{\tilde{\beta}},$$

wobei $\tilde{\beta} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \tilde{\beta}_\nu$,

$$\tilde{\beta}_\nu := \begin{cases} \beta_{1,\nu} & : m_{\nu-1} < 1, \\ 1 & : m_{\nu-1} \geq 1, \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{p_0(\lambda - 1)}, \quad \gamma_1 = \beta_1 \gamma_2.$$

Beweis Es ist $m_{\nu-1}^{p_\nu} + m_{\nu-1}^{\beta_{1,\nu} p_\nu} + m_{\nu-1}^{\beta_{2,\nu} p_\nu} \leq 3 m_{\nu-1}^{\tilde{\beta}_\nu p_\nu}$ und somit

$$\begin{aligned} m_\nu &\leq \left(3 C_0 p_\nu^{C_1} t\right)^{\frac{1}{p_\nu}} m_{\nu-1}^{\tilde{\beta}_\nu} \\ &\leq \prod_{i=1}^{\nu} \left(3 C_0 p_i^{C_1} t\right)^{\tilde{\beta}_\nu \cdots \tilde{\beta}_{i+1}/p_i} m_0^{\tilde{\beta}_\nu \cdots \tilde{\beta}_1} \\ &\leq \prod_{i=1}^{\nu} \left(3 C_0 p_i^{C_1}\right)^{\tilde{\beta}_\nu \cdots \tilde{\beta}_{i+1}/p_i} t^{S(i,\nu)} m_0^{\tilde{\beta}_\nu \cdots \tilde{\beta}_1} \\ &\leq \prod_{i=1}^{\nu} \left(3 C_0' p_i^{C_1}\right)^{\frac{1}{p_i}} t^{S(i,\nu)} m_0^{\tilde{\beta}_\nu \cdots \tilde{\beta}_1}, \end{aligned}$$

wobei $C_0' = \max(C_0, \frac{1}{3})$ und $S(i,\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} \tilde{\beta}_\nu \dots \tilde{\beta}_{i+1}/p_i$.
Es ist

$$\prod_{i=1}^{\nu} (3C_0')^{\frac{1}{p_i}} = (3C_0')^{\sum_{i=1}^{\nu} 1/p_i} \le (3C_0')^{\gamma_2} =: K_1 < \infty,$$

$$\prod_{i=1}^{\nu} p_i^{\frac{C_1}{p_i}} = \prod_{i=1}^{\nu} (p_0\lambda^i)^{\frac{C_1}{p_0\lambda^i}} = \prod_{i=1}^{\nu} p_0^{\frac{C_1}{p_i}} \prod_{i=1}^{\nu} \lambda^{\frac{iC_1}{p_0\lambda^i}} \le p_0^{C_1\gamma_2} \prod_{i=1}^{\nu} \lambda^{\frac{iC_1}{p_0\lambda^i}} \le K_2 < \infty,$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \tilde{\beta}_\nu \dots \tilde{\beta_{i+1}}/p_i \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = \gamma_2,$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} \tilde{\beta}_\nu \dots \tilde{\beta_{i+1}}/p_i \ge \sum_{i=1}^{\nu} \left(\prod_{j=1}^{\infty} \tilde{\beta}_j \right) \frac{1}{p_i} \ge \beta_1 \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{p_i}.$$

Für $t \ge 1$ folgt dann

$$m_\nu \le K_1 K_2 t^{\gamma_2} m_0^{\tilde{\beta}_\nu \dots \tilde{\beta}_1},$$

$$\limsup_{\nu\to\infty} m_\nu \le K_1 K_2 t^{\gamma_2} m_0^{\tilde{\beta}}.$$

Für $t \le 1$ ergibt sich

$$m_\nu \le K_1 K_2 t^{\beta_1 \sum_{i=1}^{\nu} 1/p_i} m_0^{\tilde{\beta}_\nu \dots \tilde{\beta}_1},$$

$$\limsup_{\nu\to\infty} m_\nu \le K_1 K_2 t^{\gamma_1} m_0^{\tilde{\beta}}.$$

Das ist die Behauptung. ■
Der folgende Satz ist hilfreich bei der Abschätzung von Lösungen elliptischer Probleme mit konstanten Koeffizienten. Für einen Beweis siehe [Hör60].

Satz 3.4.2 (Multipliertheorem) *Sei $T \in L_\infty(\mathbb{R}^N)$. Für jedes $R \ge 0$ und $|\alpha| \le \left[\frac{N}{2}\right] + 1$ sei*

$$\int\limits_{\frac{R}{2} \le |\xi| \le 2R} |D^\alpha T|^2 \, d\xi \le B R^{N-2|\alpha|}.$$

Dann existiert eine Konstante C, so daß für alle $\varphi \in \mathfrak{S}$ gilt:

$$\left\| F^{-1} T F \varphi \right\|_{L_p(\mathbb{R}^N)} \le C \left\| \varphi \right\|_{L_p(\mathbb{R}^N)}.$$

Folgerung 3.4.1 *Sei $T(\xi) = \frac{P(\xi)}{Q(\xi)}$, P, Q Polynome, $\deg Q = 2m$, $Q(\xi) \ge C(1 + |\xi|^2)^m$, $(C > 0)$, $\deg P \le 2m$. Dann gilt für T die Behauptung des Multipliertheorems.*

Folgerung 3.4.2 *Die Voraussetzungen des Multipliertheorems sind erfüllt, falls*

$$|D^\alpha T(\xi)| \le \frac{\tilde{B}}{|\xi|^{|\alpha|}} \tag{3.24}$$

für alle $\xi \ne 0$ und alle $|\alpha| \le \left[\frac{N}{2}\right] + 1$.

Lemma 3.4.4 *Sei*

$$T(\xi) = \frac{K}{P(\xi) + K},$$

wobei K eine positive Konstante ist und $P(\xi)$ ein Polynom vom Grade $2m$ ist $(m \ge 1)$ mit $P(\xi) \ge C_E(1 + |\xi|^{2m})$, $C_E > 0$. Dann gilt für T die Abschätzung (3.24), wobei $\tilde{B}$ nicht von K abhängt.

Beweis Es gilt für $|\alpha| \geq 1$

$$D^\alpha T(\xi) = \sum_{j=2}^{|\alpha|+1} \frac{K}{(P(\xi)+K)^j} P_{2m(j-1)-|\alpha|}(\xi),$$

wobei $P_l(\xi)$ ein Polynom vom Grade l ist; $P_l(\xi) \equiv 0$, falls $l < 0$. Es ist

$$\frac{K}{(P(\xi)+K)^j} P_{2m(j-1)-|\alpha|}(\xi) \leq C_{j,m,|\alpha|} \frac{K}{(1+|\xi|^{2m}+K)^j} |\xi|^{2m(j-1)-|\alpha|}.$$

Die Funktion

$$B(r) := \frac{K}{(1+r^{2m}+K)^j} r^{2m(j-1)}, \quad 2m(j-1) - |\alpha| \geq 0$$

wird nun auf Maxima untersucht. Es gilt $B(0) = 0$, $\lim_{r\to\infty} B(r) = 0$ und $B(r) \geq 0$ für $r \geq 0$. Also besitzt B ein Maximum. Dieses wird angenommen für $r_{\max}^{2m} = (1+K)D$, wobei D eine gewisse von $|\alpha|$ abhängige Konstante ist. Dann gilt

$$B(r_{\max}) = \frac{K}{(1+K)^j} (1+K)^{j-1} D' = \frac{K}{1+K} D' \leq D''.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Kapitel 4

Semilineare schwach parabolische Differentialgleichungen

4.1 Problemstellung

Es sei das folgende semilineare schwach parabolische Rand-Anfangswertproblem gegeben:

$$u_t(x,t) + A_t u(x,t) = f(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q, \tag{4.1}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \forall (x,t) \in \Gamma, \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = U_0(x) \quad \forall x \in \Omega. \tag{4.3}$$

Hierbei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein beschränktes Gebiet, das die Kegelbedingung erfüllt, $T > 0$, $I = [0,T]$, $Q = \Omega \times I$, $\Gamma = \partial\Omega \times I$,

$$A_t u = -\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g(x) a_{ik}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{N} a_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{4.4}$$

$$g(x) \text{ ist Gewichtsfunktion im Sinne von Definition 3.2.9 }, \tag{4.5}$$

$$g^{-N'} \in L_1(\Omega) \text{ für ein } 1 \le N < N' \in \mathbb{R}, \tag{4.6}$$

$$a_{ik} \in C^{0,1}(I, L_\infty(\Omega)), \tag{4.7}$$

$$\sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k \ge C_E|\xi|^2 \quad C_E > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ fast überall in } Q, \tag{4.8}$$

$$a_i \in C^{0,1}(I, L_\infty(\Omega)), \tag{4.9}$$

$$U_0 \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega), \quad A_0 U_0 \in L_2(\Omega), \quad U_0 \in W_r^2(\Omega) \text{ für ein } r > N, r \ge 2, \tag{4.10}$$

Für gegebenes $R > 0$ sei $B_R(U_0) = \{u \in L_\infty(\Omega) : \|u - U_0\|_\infty \le R\}$.

Dann sei $f(.,t,u) : I \times B_R(U_0) \to L_r(\Omega)$ mit

$$\|f(x,t,u(x)) - f(x,t',u'(x))\|_2 \le C_f(|t-t'| + \|u-u'\|_2) \tag{4.11}$$

Diese Problem wird mit Hilfe der Rothe-Methode untersucht. Hierfür finden die Hilfsmittel aus den Abschnitten 3.1.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 und 3.4 Anwendung.
Die Rothe-Methode ist im Kapitel 2 bereits skizziert worden.
Es wird folgender Satz bewiesen:

Satz 4.1.1 *Es existiert $T^* > 0$, so daß das Problem (4.1), (4.2), (4.3) unter den Bedingungen (4.4), ..., (4.11) eine eindeutig bestimmte schwache Lösung $u \in C^{0,1}(I^*, L_2(\Omega)) \cap W_2^1(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega))$, $u_t \in L_\infty(I^*, L_2(\Omega)) \cap L_2(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega))$ besitzt.*

Diese Lösung erfüllt für jedes $v \in L_2(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega))$ die Gleichung

$$\int_{I^*} (u_t(x,t), v(x,t))\, dt + \int_{I^*} a_t(u(x,t), v(x,t))\, dt = \int_{I^*} (f(x,t,u(x,t)), v(x,t))\, dt, \tag{4.12}$$

wobei

$$a_t(u,x) = \sum_{i,k=1}^{N} \int_\Omega g(x) a_{ik}(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega a_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx.$$

Dieser Satz wird ähnlich wie im Kapitel 2 bewiesen. Die Darlegungen in diesem Kapitel müssen allerdings etwas abgewandelt werden, aus folgenden Gründen:

1. Es treten Terme mit ersten Ortsableitungen auf.
2. Die Koeffizienten $a_{i,k}, a_i$ hängen jetzt auch von der Zeitvariablen ab.
3. Der Hauptteil ist schwach parabolisch. Die Entartung tritt in den Punkten $x \in \Omega$ auf, für die $g(x) = 0$. Dies erfordert die Einführung gewichteter Sobolev-Räume.
4. Die rechte Seite ist nichtlinear. Deshalb ist es nötig, $L_\infty(\Omega)$-Abschätzungen für $u - U_0$ zu gewinnen.

Die Rothe-Methode verwendet eine Diskretisierung der Zeitvariablen. Sei also $n \in \mathbb{N}$, $h = \frac{T}{n}$, $t_j = jh$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$,

$$\begin{aligned}
&a_j(u,v) = a_{t_j}(u,v),\\
&f_j(x) = f(x, t_j, u_{j-1}(x)), \quad j \geq 1, \quad f_0(x) = f(x, 0, U_0(x)),\\
&\delta u_j = \frac{1}{h}(u_j - u_{j-1}),\\
&u^n(x,t) = u_{i-1}(x) + (t - t_{i-1})\delta u_i(x), \quad (t_{i-1} < t \leq t_i, \quad i = 1, \ldots, n),\\
&\overline{u}^n(x,t) = u_i(x) \quad (t_{i-1} < t \leq t_i, \quad i = 1, \ldots, n).
\end{aligned}$$

4.2 A-priori-Abschätzungen

Gesucht wird eine Familie von Funktionen $u_0, u_1, \ldots u_i \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ mit

$$(\delta u_j, v) + a_j(u_j, v) = (f_j, v) \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega), j = 1, \ldots, i \tag{4.13}$$

und $u_0 = U_0$ sowie $u_0, u_1, \ldots u_i \in B_R(U_0)$.
Der folgende Satz gibt eine Existenzaussage für diese u_j:

Satz 4.2.1 *Es existiert eine Konstante $h_0 > 0$, so daß für $h \leq h_0$ gilt:*
Seien $u_0, \ldots u_{i-1} \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$, so daß (4.13) erfüllt ist und $u_0, \ldots, u_{i-1} \in B_R(U_0)$. Dann existiert genau ein $u_i \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$, so daß (4.13) gilt.

Beweis (4.13) ist äquivalent zu

$$A_{h,i}(u_i, v) = \left(f_i + \frac{1}{h} u_{i-1}, v \right) \qquad \forall v \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega),$$

wobei $A_{h,i}(u,v) := \frac{1}{h}(u,v) + a_i(u,v)$.
Nun wird geprüft, ob sich der Satz von Lax-Milgram anwenden läßt:
Es gilt (siehe Lemma 3.2.6)

$$\begin{aligned} a_t(u,u) &= \int_\Omega \sum_{i,k=1}^N g(x) a_{ik}(x,t) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} u(x)\, dx \\ &\geq C_E \int_\Omega \sum_{i=1}^N g(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx - C \sum_{i=1}^N \int_\Omega \underbrace{\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}_{\frac{2N'}{N'+1}} \underbrace{|u|}_{\frac{2N'}{N'-1}} dx \\ &\geq C_E \|u\|_{2,1,g}^2 - C \|u\|_2^2 - C \|u\|_{\frac{2N'}{N'+1},1} \|u\|_{\frac{2N'}{N'-1}} \\ &\geq C_E \|u\|_{2,1,g}^2 - C \|u\|_2^2 - C \|u\|_{2,1,g} \|u\|_{\frac{2N'}{N'-1}}\,. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\frac{1}{\frac{2N'}{N'+1}} < \frac{1}{\frac{2N'}{N'-1}} + \frac{1}{N},$$

also existiert (vgl. Satz 3.2.15) ein $0 < \theta < 1$ mit

$$\|u\|_{\frac{2N'}{N'-1}} \leq c \|u\|_{\frac{2N'}{N'+1},1}^{\theta} \|u\|_1^{1-\theta} \leq c \underbrace{\|u\|_{2,1,g}^{\theta}}_{\frac{1}{\theta}} \underbrace{\|u\|_2^{1-\theta}}_{\frac{1}{1-\theta}} \leq \varepsilon \|u\|_{2,1,g} + C_\varepsilon \|u\|_2\,.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} a_t(u,u) &\geq C \|u\|_{2,1,g}^2 - C \|u\|_{2,1,g} \|u\|_2 - C \|u\|_2^2 \\ &\geq C \|u\|_{2,1,g}^2 - (\delta \|u\|_{2,1,g}^2 + C_\delta \|u\|_2^2) - C \|u\|_2^2 \\ &\geq C \|u\|_{2,1,g}^2 - C_0 \|u\|_2^2\,. \end{aligned}$$

Falls $\frac{1}{h} > C_0$, dann ist

$$A_{hi} \geq C \|u\|_{2,1,g}^2\,, \quad C > 0.$$

Weiterhin ist (vgl. Satz 3.2.6)

$$\begin{aligned} |a_t(u,v)| &\leq \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega |a_{ik}| g \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right| dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega |a_i| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |v|\, dx \\ &\leq c \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega \underbrace{\sqrt{g} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}_{2} \underbrace{\sqrt{g} \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right|}_{2} dx + c \sum_{i=1}^N \int_\Omega \underbrace{\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|}_{\frac{2N'}{N'+1}} \underbrace{|v|}_{\frac{2N'}{N'-1}} dx \\ &\leq c \|u\|_{2,1,g} \|v\|_{2,1,g} + c \|u\|_{\frac{2N'}{N'+1},1} \|v\|_{\frac{2N'}{N'-1}} \\ &\leq c \|u\|_{2,1,g} \|v\|_{2,1,g}\,, \end{aligned}$$

also auch $|A_{h,i}(u,v)| \le c\,\|u\|_{2,1,g}\,\|v\|_{2,1,g}$.
Daraus folgt: $A_{h,i}(.,.)$ ist eine positiv definite beschränkte Bilinearform für den Hilbertraum $\overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 4.2.1 *Dieser Satz macht keine Aussage, ob $u_i \in B_R(U_0)$. Für eine solche Aussage werden $L_\infty(\Omega)$-Abschätzungen für die Funktionen u_i benötigt. Diese $L_\infty(\Omega)$-Abschätzungen werden auf folgendem Wege gewonnen:*

1. *Seien $u_0, \dots u_{i-1} \in B_R(U_0)$*
2. *Man zeigt zunächst $u_i \in L_\infty(\Omega)$.*
3. *Dann wird $\|u_j\|_2 \le C$ bewiesen, $j = 0, \dots, i$.*
4. *Für $p > 2$ zeigt man dann eine rekursive Abschätzung*

   $$\|u_i - U_0\|_p^p \le c t_i p^c \max_{1\le j\le i}(\|u_j - U_0\|_{\alpha p}^p + \|u_j - U_0\|_{\alpha p}^{\beta_1 p} + \|u_j - U_0\|_{\alpha p}^{\beta_2 p}),$$

   wobei $0 < \beta_1, \beta_2, \alpha < 1$.
5. *Für $p \to \infty$ läßt sich dann eine Abschätzung der Gestalt*

   $$\|u_i - U_0\|_\infty \le M(t_i)$$

   gewinnen, wobei $M(t)$ eine stetige, von h unabhängige monoton wachsende Funktion ist mit $M(0) = 0$.

Also existiert ein $T^* > 0$, so daß für $t \le T^*$ gilt: $M(t) \le R$.

Die folgenden Sätze beweisen die einzelnen Aussagen der Bemerkung. Dazu werden einige Hilfsaussagen benötigt.
Die nächsten Lemmata beweisen:
Falls $u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$, dann ist auch $u^R(x) := \max(u(x) - R, 0) \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ für jedes $R > 0$ und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u^R = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_k} u & : u(x) > R, \\ 0 & : u(x) \le R. \end{cases}$$

Diese Aussage ist deshalb erforderlich, weil eine solche Funktion u^R als Testfunktion verwendet werden wird.

Lemma 4.2.1 *Sei $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon(u) = \sqrt{u^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon$ und $u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$. Dann ist auch $f_\varepsilon(u) \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$.*

Beweis Es existiert eine Folge $(\varphi_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $\varphi_n \xrightarrow{\overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)} u$. Es gilt offensichtlich $f_\varepsilon(\varphi_n) \in C_0^\infty(\Omega)$.
Nun ist (Übergang zu geeigneter Teilfolge φ_n^* und Konvergenzsatz von Lebesgue)

$$\|f_\varepsilon(\varphi_n^*) - f_\varepsilon(u)\|_2^2 = \int_\Omega |\sqrt{u^2+\varepsilon^2} - \sqrt{\varphi_n^{*2} + \varepsilon^2}|^2\, dx = \int_\Omega \left| \frac{u^2 - \varphi_n^{*2}}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2} + \sqrt{\varphi_n^{*2}+\varepsilon^2}} \right|^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es ist $f(.) \in C^1(\mathbb{R})$, $f'(.) \in L_\infty(\mathbb{R})$, also ist die Kettenregel für verallgemeinerte Ableitungen anwendbar. Dann folgt

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_k} \left(f_\varepsilon(\varphi_n^*) - f_\varepsilon(u)\right) \right\|_{2,g}^2 = \int_\Omega g(x) \left| \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} \frac{\partial}{\partial x_k} u - \frac{\varphi_n^*}{\sqrt{\varphi_n^{*2}+\varepsilon^2}} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_n^* \right|^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega g(x) \left| \frac{\varphi_n^*}{\sqrt{\varphi_n^{*2}+\varepsilon^2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_n^*}{\partial x_k} \right) \right|^2 dx + \int_\Omega g(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 \left| \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} - \frac{\varphi_n^*}{\sqrt{\varphi_n^{*2}+\varepsilon^2}} \right|^2 dx$$

$$\leq \int_\Omega g(x) \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (u - \varphi_n^*) \right|^2 dx + \int_\Omega g(x) \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u \right|^2 \left| \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} - \frac{\varphi_n^*}{\sqrt{\varphi_n^{*2}+\varepsilon^2}} \right|^2 dx \to 0$$

wegen $\varphi_n \xrightarrow{\overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)} u$ und dem Konvergenzsatz von Lebesgue. Dieser ist anwendbar, weil $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ und $\frac{\partial \varphi_n^*}{\partial x_k}$ Funktionen des $L_{2g}(\Omega)$ sind und $|u| \leq \sqrt{u^2+\varepsilon^2}$ bzw. $|\varphi_n^*| \leq \sqrt{\varphi_n^* + \varepsilon^2}$.

Da der Raum $\overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ vollständig ist, folgt die Behauptung. ■.

Es gilt ein weiteres Hilfslemma:

Lemma 4.2.2 *Falls* $u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$, *dann gilt auch* $|u| \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ *und* $\nabla|u| = \operatorname{sign} u(x) \nabla u$. *Hierbei gilt*

$$\operatorname{sign} y = \begin{cases} \frac{y}{|y|} & : y \neq 0, \\ 0 & : y = 0. \end{cases}$$

Beweis Es ist $f_\varepsilon(u(x)) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} |u(x)|$, $|f_\varepsilon(u(x))| \leq |u(x)|$. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue gilt also für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{array}{ccc} \int_\Omega f_\varepsilon(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx & = & -\int_\Omega \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} \frac{\partial u}{\partial x_k} \varphi\, dx \\ {\scriptstyle \varepsilon \to 0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon \to 0} \\ \int_\Omega |u| \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx & = & -\int_\Omega \operatorname{sign} u \frac{\partial u}{\partial x_k} \varphi\, dx \end{array}$$

Also besitzt $|u|$ die schwache Ableitung $\operatorname{sign}(u)\nabla u$. Zu zeigen bleibt $|u| \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$.
Es ist (Konvergenzsatz von Lebesgue)

$$\int_\Omega |f_\varepsilon(u) - |u||^2\, dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$$

und

$$\int_\Omega g \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (f_\varepsilon(u) - |u|) \right|^2 dx = \int_\Omega g \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 \left| \frac{u}{\sqrt{u^2+\varepsilon^2}} - \operatorname{sign} u \right|^2 dx \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Also ist tatsächlich $|u| \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$. ■.

Nun wird das angekündigte Lemma bewiesen.

Lemma 4.2.3 *Sei* $R > 0$, $u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$. *Dann ist auch* $\max(u - R, 0) \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$.

Beweis Es ist $\max(u - R, 0) = |u - R| + u - R \in W^1_{2g}(\Omega)$. Wenn $\varphi_n \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi_n \xrightarrow{W^1_{2g}(\Omega)} u$, so ist $\operatorname{supp}(\max(\varphi_n - R, 0)) \subset \Omega$, also $\max(\varphi_n - R, 0) \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$. Ein Dichteschluß ähnlich wie in den obigen Lemmata zeigt $\max(u - R, 0) \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$. ■.

Nun stehen alle Hilfsmittel für den Nachweis von $u_i \in L_\infty(\Omega)$ bereit. Dabei wird ein Satz von Ladyshenskaja verwendet, vgl. [LSU67], Theorem 5.1

Satz 4.2.2 *Sei $u(x) \in W^1_m(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, so daß eine Konstante K_0 existiert, daß $\sup\operatorname{ess}_{\partial\Omega} u(x) \leq K_0$. Für $K \geq K_0$ sei*

$$\int_{A_K} |\nabla u|^m \, dx \leq \gamma \left(\int_{A_K} (u-K)^l \, dx \right)^{\frac{m}{l}} + \gamma K^\alpha \left(\operatorname{meas} A_K\right)^{1-\frac{m}{N}+\varepsilon},$$

wobei $l < \frac{Nm}{N-m}$, $\varepsilon > 0$, $m \leq \alpha \leq \varepsilon q + m$. Dann ist $u \in L_\infty(\Omega)$.
Hierbei ist $A_K = \{x \in \Omega : u(x) \geq K\}$.

Satz 4.2.3 *Sei*

$$\frac{1}{h}(u - u_{j-1}, v) + a_j(u,v) = (f_j, v) \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega). \tag{4.14}$$

Dann ist $u \in L_\infty(\Omega)$, falls $h \leq h_0$ für ein geeignetes $h_0 > 0$.

Beweis (4.14) wird in der Form

$$\frac{1}{h}(u,v) + \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega g(x) a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = \left(\tilde{f}_j, v\right) - \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx$$

geschrieben. Dabei ist $\tilde{f}_j = f_j + \frac{1}{h} u_{j-1}$. Sei $v = \max(u-K, 0)$, $A_K = \{x \in \Omega : u(x) > K\}$, $K > 0$, $m = \frac{2N'}{N'+1}$ und $l = \frac{m}{m-1}$, also $m^{-1} + l^{-1} = 1$.
Dann folgt

$$\frac{1}{h}(u, u-K)_{A_K} + \sum_{i,k=1}^N \int_{A_K} g a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx = \left(\tilde{f}_j, u-K\right)_{A_K} - \sum_{i,k=1}^N \int_{A_K} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(u-K) \, dx,$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h} \|u-K\|^2_{2,A_K} + c \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|^2_{2,A_K,g} \\
&\leq \left\|\tilde{f}_j\right\|_{m,A_K} \|u-K\|_{l,A_K} + C \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|_{m,A_K} \|u-K\|_{l,A_K} - \frac{1}{h}(K, u-K)_{A_K} \\
&\leq \left\|\tilde{f}_j\right\|^2_{m,A_K} + \|u-K\|^2_{l,A_K} + \varepsilon \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|^2_{m,A_K} + C_\varepsilon \|u-K\|^2_{l,A_K}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\left\|\tilde{f}_j\right\|^m_{m,A_K} = \int_{A_K} \underbrace{|\tilde{f}_j|^m}_{\frac{r}{m}} \underbrace{1}_{\frac{r}{r-m}} \, dx \leq \left\|\tilde{f}_j\right\|^m_{r,A_K} \left(\operatorname{meas} A_K\right)^{\frac{r-m}{r}},$$

also

$$\frac{1}{h} \|u-K\|^2_{2,A_K} + c \sum_{i=1}^N \|u_{x_i}\|^2_{2,A_K,g} \leq C \|u-K\|^2_{l,A_K} + C \left(\operatorname{meas} A_K\right)^{\frac{2}{m}\frac{r-m}{r}},$$

daraus folgt wegen $L_{2g}(A_K) \subset L_m(A_K)$

$$\int_{A_K} |\nabla u|^m \, dx \leq C \left(\|u - K\|_{l,A_K}^m + (\operatorname{meas} A_K)^{\frac{r-m}{r}} \right).$$

Wegen $r > N$ existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\frac{r-m}{r} > 1 - \frac{m}{N} + \varepsilon \text{ und } 0 < \varepsilon \leq \frac{m}{N}.$$

Sei o.B.d.A. $\operatorname{meas} A_K < 1$. Dies ist für hinreichend große K erfüllt, da $u \in L_1(\Omega)$. Dann ist

$$(\operatorname{meas} A_K)^{\frac{r-m}{r}} \leq (\operatorname{meas} A_K)^{1-\frac{m}{N}+\varepsilon},$$

es folgt

$$\int_{A_K} |\nabla u|^m \, dx \leq C \left(\|u - K\|_{l,A_K}^m + K^m \, (\operatorname{meas} A_K)^{1-\frac{m}{N}+\varepsilon} \right).$$

Da $l = \frac{m}{m-1}$ und $N' > N$, also $\frac{2N}{N+1} < m$, folgt $l < \frac{Nm}{N-m}$.
Dann sind die Voraussetzungen des Satzes von Ladyshenskaja erfüllt und es gilt

$$\sup_{\Omega} \operatorname{ess} u(x) \leq C.$$

Eine analoge Argumentation läßt sich für $\tilde{u} = -u$ führen, es folgt $\inf \operatorname{ess}_{\Omega} u(x) \leq C$.
Dann folgt $u \in L_\infty(\Omega)$. ■
Nun wird eine Abschätzung für $\|\delta u_j\|_2$ und $\|u_j\|_2$ hergeleitet. Eine Abschätzung für $\|u_j\|_p$ läßt sich zeigen, wenn in (4.13) die Testfunktion $|u_j|^{p-2}u_j$ verwendet wird.[1] Zunächst ist allerdings die Zulässigkeit dieser Testfunktion nachzuweisen. Das geschieht im folgenden Lemma.

Lemma 4.2.4 *Sei* $u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ *und* $p > 2$. *Dann ist auch* $|u|^{p-2}u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ *und es gilt*

$$\nabla |u|^{p-2}u = (p-1)|u|^{p-2}\nabla u.$$

Beweis Wegen $u \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ existiert eine Folge $(u_n) \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_n \xrightarrow{\overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)} u$. Sei $M > \|u\|_\infty$ gewählt. Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ eine Funktion mit

$$f(v) = \begin{cases} |v|^{p-2}v & : |v| \leq M, \\ (M+1)^{p-1} \operatorname{sign} v & : |v| \geq M+1. \end{cases}$$

Wegen $p > 2$ ist f stetig differenzierbar für $v = 0$. Für $|v| \leq M$ ist $f'(v) = (p-1)|v|^{p-2}$. Dann gilt

$$\|f(u_n)\|_\infty \leq k = k(M), \quad \forall n, \tag{4.15}$$
$$\|f'(u_n)\|_\infty \leq k = k(M), \quad \forall n. \tag{4.16}$$

Für diese u_n gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(u_n) = f'(u_n) \frac{\partial}{\partial x_k} u_n.$$

[1] Die Verwendung dieser Testfunktionen geht auf Alikakos [Ali79] und Moser [Mos60] zurück.

Es existiert eine Teilfolge u_n^*, so daß

$$u_n^* \xrightarrow{\text{f.ü.}} u \text{ und } \frac{\partial}{\partial x_k} u_n^* \xrightarrow{\text{f.ü.}} \frac{\partial}{\partial x_k} u.$$

Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt dann $\|f(u_n^*) - f(u)\|_2^2 \to 0$ (wegen (4.15) ist der Konvergensatz anwendbar).
Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&\left\| f'(u_n^*) \frac{\partial u_n^*}{\partial x_k} - f'(u) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{2,g}^2 \\
&\leq \int_\Omega g \left| f'(u_n^*) \frac{\partial u_n^*}{\partial x_k} - f'(u_n^*) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx + \int_\Omega g |f'(u_n^*) - f'(u)|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx \\
&\leq k^2 \int_\Omega g \left| \frac{\partial u_n^*}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx + \int_\Omega g |f'(u_n^*) - f'(u)|^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Das erste Integral konvergiert wegen $u_n^* \xrightarrow{W_{2g}^1(\Omega)} u$ gegen Null, das zweite Integral konvergiert gegen Null nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue (dieser ist anwendbar wegen (4.16) und $u \in W_{2g}^1(\Omega)$).

Daraus folgt, daß $f(u_n^*)$ eine Cauchyfolge im Banachraum $\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega)$ ist. Diese Folge besitzt also einen Grenzwert, dieser muß $f(u)$ sein. Daraus ergibt sich $f(u) \in \overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega)$ und

$$\nabla f(u) = f'(u) \nabla u.$$

Wegen $|u| < M$ (f.ü.) folgt die Behauptung. ■
Für die Abschätzung von $\|u_j\|_p$ sind folgende Abschätzungen der Bilinearform wichtig:

Lemma 4.2.5 *Sei $u, v \in \overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $p > 2$. Dann gilt mit $w := |u|^{\frac{p-2}{2}} u$*

$$a_t(u, |u|^{p-2}u) \geq \frac{c_1}{p} \|w\|_{2,1,g}^2 - \frac{c_2}{p} \|w\|_2^2, \tag{4.17}$$

$$|a_t(u,v) - a_{t'}(u,v)| \leq C|t - t'| \, \|u\|_{2,1,g} \|v\|_{2,1,g}. \tag{4.18}$$

Beweis Es ist $|w| = |u|^{\frac{p}{2}}$, also $\|w\|_2^2 = \|u\|_p^p$ und $\nabla w = \frac{p}{2} |u|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u$,

$$\nabla \left(|u|^{p-2} u \right) = (p-1)|u|^{p-2} \nabla u = \frac{2(p-1)}{p} |w|^{\frac{p-2}{p}} \nabla w.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,k=1}^N \int_\Omega g a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(|u|^{p-2} u \right) dx = (p-1) \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega g a_{ik} |u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx \\
&\geq c(p-1) \sum_{i=1}^N \int_\Omega g |u|^{p-2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx = \frac{4c(p-1)}{p^2} \int_\Omega g |\nabla w|^2 dx \\
&\geq \frac{c}{p} \|w\|_{2,1,g}^2,
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega |a_i| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |u|^{p-1} dx \leq \frac{c}{p} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right| |w| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{p} \|w\|_{2,1,g}^2 + \frac{C_\varepsilon}{p} \|w\|_2^2,$$

vgl. Beweis zu Satz 4.2.1. Daraus folgt die erste Behauptung.
Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
&|a_t(u,v) - a_{t'}(u,v)| \\
&\quad \le \sum_{i,k=1}^{N} \int_\Omega g(x)|a_{ik}(x,t) - a_{ik}(x,t')| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right| dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |a_i(x,t) - a_i(x,t')| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |v|\, dx \\
&\quad \le c|t-t'| \sum_{i,k=1}^{N} \int_\Omega g(x) \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right| dx + c|t-t'| \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |v|\, dx \\
&\quad \le c|t-t'|\, \|u\|_{2,1,g}\, \|v\|_{2,1,g}\,.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde ähnlich abgeschätzt wie im Beweis zu Satz 4.2.1. ■
Nun wird eine erste A-priori-Abschätzung bewiesen.

Lemma 4.2.6 *Falls $h \le h_0$, dann existiert eine von h unabhängige Konstante C, so daß gilt:*
Falls $u_0, u_1, \ldots, u_i \in B_R(U_0)$, dann ist

$$\|\delta u_j\|_2 \le C, \quad \|u_j\|_{2,1,g} \le C, \quad h \sum_{l=1}^{j} \|\delta u_l\|_{2,1,g}^2 \le C \tag{4.19}$$

für alle $1 \le j \le i$.

Beweis Es ist

$$\begin{aligned}
(\delta u_j, v) + a_j(u_j, v) &= (f_j, v)\,, \\
(\delta u_{j-1}, v) + a_{j-1}(u_{j-1}, v) &= (f_{j-1}, v)\,.
\end{aligned}$$

Mit $v = \delta u_j$ folgt nach Subtraktion

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j) + h a_j(\delta u_j, \delta u_j) = h\,(\delta f_j, \delta u_j) - (a_j(u_{j-1}, \delta u_j) - a_{j-1}(u_{j-1}, \delta u_j)).$$

Aus $(p-q)p = \frac{1}{2}(p^2 - q^2 + (p-q)^2)$ und den Äbschätzungen für die Bilinearform folgt dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|\delta u_j\|_2^2 - \|\delta u_{j-1}\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\|\delta u_j - \delta u_{j-1}\|_2^2 + ch\,\|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 \\
&\le C_f(h + \|u_{j-1} - u_{j-2}\|_2)\,\|\delta u_j\|_2 + h\,\|u_{j-1}\|_{2,1,g}\,\|\delta u_j\|_{2,1,g} + Ch\,\|\delta u_j\|_2^2 \\
&\le C_\varepsilon h\left(1 + \|\delta u_{j-1}\|_2^2\right) + 2\varepsilon h\,\|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 + C_\varepsilon h\,\|_{j-1}\|_{2,1,g}^2 + Ch\,\|\delta u_j\|_2^2\,,
\end{aligned}$$

also

$$\|\delta u_j\|_2^2 - \|\delta u_{j-1}\|_2^2 + ch\,\|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 \le Ch\left(1 + \|\delta u_{j-1}\|_2^2 + \|\delta u_j\|_2^2 + \|u_{j-1}\|_{2,1,g}^2\right).$$

Summation $(j = 2, \ldots, l)$ liefert

$$\|\delta u_l\|_2^2 - \|\delta u_1\|_2^2 + ch\sum_{j=2}^{l} \|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 \le Ct_l + Ch\sum_{j=1}^{l} \|\delta u_j\|_2^2 + Ch\sum_{j=1}^{l-1} \|u_j\|_{2,1,g}^2\,.$$

Nun sind noch $\|\delta u_1\|_2$ und $h\,\|\delta u_1\|_{2,1,g}^2$ abzuschätzen. Dazu wird in (4.13) die Testfunktion $v = \delta u_1$ gewählt. Es folgt:

$$\begin{aligned}(\delta u_1, \delta u_1) + a_1(u_1, \delta u_1) &= (f_1, \delta u_1)\,,\\ \|\delta u_1\|_2^2 + h a_1(\delta u_1, \delta u_1) &= (f_1, \delta u_1) - a_1(U_0, \delta u_1)\\ &= (f_0, \delta u_1) - a_0(U_0, \delta u_1) + h\,(\delta f_1, \delta u_1) + (a_0(U_0, \delta u_1) - a_1(U_0, \delta u_1)).\end{aligned}$$

Wegen $A_0U_0 \in L_2(\Omega)$ ist $a_0(U_0, \delta u_1) = (A_0U_0, \delta u_1)$ und somit

$$\begin{aligned}&\|\delta u_1\|_2^2 + ch\,\|\delta u_1\|_{2,1,g}^2\\ &\le \|f_0 - A_0U_0\|_2\,\|\delta u_1\|_2 + Ch\,\|\delta u_1\|_2 + Ch\,\|U_0\|_{2,1,g}\,\|\delta u_1\|_{2,1,g} + Ch\,\|\delta u_1\|_2^2\\ &\le C_\varepsilon\,\|f_0 - A_0U_0\|_2^2 + \varepsilon\,\|\delta u_1\|_2^2 + C_\varepsilon h + C_\varepsilon h\,\|U_0\|_{2,1,g}^2 + 2\varepsilon h\,\|\delta u_1\|_{2,1,g}^2 + Ch\,\|\delta u_1\|_2^2\,,\end{aligned}$$

also

$$(1 - Ch - \varepsilon)\,\|\delta u_1\|_2^2 + ch\,\|\delta u_1\|_{2,1,g}^2 \le C(\|f_0 - A_0U_0\|_2^2 + \|U_0\|_{2,1,g}^2 + 1).$$

Dann folgt

$$\|\delta u_l\|_2^2 + ch\sum_{j=1}^{l}\|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 \le C + Ct_l + Ch\sum_{j=1}^{l}\|\delta u_j\|_2^2 + Ch\sum_{j=1}^{l-1}\|u_j\|_{2,1,g}^2\,.$$

Das Gronwall-Lemma mit $a_l = \|\delta u_l\|_2^2$ und $A_l = C + Ct_l + Ch\sum_{j=1}^{l-1}\|u_j\|_{2,1,g}^2$ liefert

$$\|\delta u_l\|_2^2 \le C(T)A_l \le C\Big(1 + h\sum_{j=1}^{l-1}\|u_j\|_{2,1,g}^2\Big),$$

also

$$h\sum_{j=1}^{l}\|\delta u_j\|_2^2 \le lhC\Big(1 + h\sum_{j=1}^{l-1}\|u_j\|_{2,1,g}^2\Big) \le t_lC\Big(1 + h\sum_{j=1}^{l-1}\|u_j\|_{2,1,g}^2\Big)$$

und somit

$$\|\delta u_l\|_2^2 + ch\sum_{j=1}^{l}\|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 \le C\Big(1 + h\sum_{j=1}^{l-1}\|u_j\|_{2,1,g}^2\Big). \tag{4.20}$$

Nun ist noch die Summe auf der rechten Seite abzuschätzen. Dazu wählt man als Testfunktion $v = u_j$ und erhält

$$(u_j - u_{j-1}, u_j) + h a_j(u_j, u_j) = h\,(f_j, u_j)\,,$$

also

$$\frac{1}{2}\Big(\|u_j\|_2^2 - \|u_{j-1}\|_2^2\Big) + ch\,\|u_j\|_{2,1,g}^2 \le h\,\|f_j\|_2\,\|u_j\|_2 + Ch\,\|u_j\|_2^2 \le Ch\,\|f_j\|_2^2 + Ch\,\|u_j\|_2^2\,.$$

Summation $(j = 1, \ldots, l)$ liefert

$$\|u_l\|_2^2 + ch\sum_{j=1}^{l}\|u_j\|_{2,1,g}^2 \le Ch\sum_{j=1}^{l}\Big(\|f_j\|_2^2 + \|u_j\|_2^2\Big) + \|U_0\|_2^2\,.$$

Das Gronwall-Lemma liefert dann

$$\|u_l\|_2^2 \leq C\Big(Ch\sum_{j=1}^{l}\|f_j\|_2^2 + \|U_0\|_2^2\Big)e^{Ct_l} \leq C,$$

also gilt

$$\|u_l\|_2^2 + ch\sum_{j=1}^{l}\|u_j\|_{2,1,g}^2 \leq C. \tag{4.21}$$

Aus (4.20) und (4.21) folgt die Behauptung. ■

Nun kann eine $L_\infty(\Omega)$-Abschätzung für $u_j - U_0$ hergeleitet werden. Diese Abschätzung garantiert, daß $u_j \in B_R(U_0)$, falls $t_j \leq T^*$. Hierbei ist T^* nicht von der Unterteilungsschrittweite abhängig. Dies ergibt sich aus dem folgenden Satz:

Satz 4.2.4 *Es existieren Konstanten $h_0 > 0$, $0 < T^* \leq T$ und eine monoton wachsende Funktion $M(t) \in C([0,T^*])$ mit $M(0) = 0$, so daß für $h \leq h_0$ gilt:*
Falls $t_j \leq T^*$, dann ist $\|u_j - U_0\|_\infty \leq M(t_j) \leq R$.

Beweis Der Beweis ist recht lang, deshalb wird hier zunächst das Beweisprinzip dargelegt. Es sei eine Schrittweite h vorgegeben.
Unter der Voraussetzung $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1} \in B_R(U_0)$ wird eine Abschätzung $\|u_i - U_0\|_\infty \leq C_i$ hergeleitet. Es läßt sich zeigen, daß diese Konstanten C_j, $(j = 0, \ldots, i)$, zu einer monoton wachsenden stetigen Funktion M fortgesetzt werden können mit $M(0) = 0$ und $C_j = M(t_j)$. Diese Funktion ist von h unabhängig.
Es sei $0 \leq j \leq i$, $z_j = u_j - U_0$, dann folgt $\delta z_j = \delta u_j$ und

$$(\delta z_j, v) + a_j(z_j, v) = (f_j, v) - a_j(U_0, v) \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}_{2g}^{1}(\Omega).$$

Es ist $u_j \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_{2g}^{1}(\Omega)$, also auch $z_j \in L_\infty(\Omega) \cap \overset{o}{W}{}_{2g}^{1}(\Omega)$. Für $p > 2$ sei $v = |z_j|^{p-2}z_j$ und $w_j = |z_j|^{\frac{p-2}{2}}z_j$. Diese Wahl der Testfunktionen ist wegen $v \in \overset{o}{W}{}_{2g}^{1}(\Omega)$ zulässig. Dann folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(z_j, |z_j|^{p-2}z_j\right) - \frac{1}{h}\left(z_{j-1}, |z_j|^{p-2}z_j\right) + \frac{c_1}{p}\|w_j\|_{2,1,g}^2 \\ \leq \|f_j\|_r \left\||z_j|^{p-1}\right\|_{r'} + |a_j(U_0, |z_j|^{p-2}z_j)| + \frac{c_2}{p}\|w_j\|_2^2,\end{aligned}$$

$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Nun ist mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

- $$\left(z_j, |z_j|^{p-2}z_j\right) = \|z_j\|_p^p = \|w_j\|_2^2,$$

- $$\begin{aligned}\left(z_{j-1}, |z_j|^{p-2}z_j\right) &\leq \|z_{j-1}\|_p \left\||z_j|^{p-1}\right\|_{p'} = \|z_{j-1}\|_p \left(\int_\Omega |z_j|^{p'(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \underbrace{\|z_{j-1}\|_p}_{p}\underbrace{\|z_j\|_p^{p-1}}_{\frac{p}{p-1}} \\ &\leq \frac{1}{p}\|z_{j-1}\|_p^p + \frac{p-1}{p}\|z_j\|_p^p = \frac{1}{p}\|w_{j-1}\|_2^2 + \frac{p-1}{p}\|w_j\|_2^2,\end{aligned}$$

•

$$\left\| |z_j|^{p-1} \right\|_{r'}^{r'} = \int_\Omega \underbrace{1}_{p} \underbrace{|z_j|^{(p-1)r'}}_{\frac{p}{p-1}} \, dx \le (\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |z_j|^{pr'} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}}$$
$$\le c \left(\int_\Omega |w_j|^{2r'} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} = c \left\| w_j \right\|_{2r'}^{2r' \frac{p-1}{p}},$$

also $\left\| |z_j|^{p-1} \right\|_{r'} \le c \left\| w_j \right\|_{2r'}^{2\frac{p-1}{p}}$,

- Wegen $U_0 \in W_r^2(\Omega)$ gilt $\frac{\partial U_0}{\partial x_k} \in W_r^1(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$, da $r > N$. Dann folgt

$$|a_j(U_0, |z_j|^{p-2} z_j)| \le C \frac{p-1}{p} \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega \underbrace{\sqrt{g} \left| \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right|}_{\infty} \underbrace{|w_j|^{\frac{p-2}{p}}}_{2} \underbrace{\sqrt{g} \left| \frac{\partial w_j}{\partial x_k} \right|}_{2} dx$$
$$+ C \sum_{i=1}^N \int_\Omega \underbrace{\left| \frac{\partial U_0}{\partial x_i} \right|}_{r} \underbrace{|z_j|^{p-1}}_{r'} dx$$
$$\le C \left\| w_j \right\|_{2\frac{p-2}{p}}^{\frac{p-2}{p}} \left\| w_j \right\|_{2,1,g} + C \left\| |z_j|^{p-1} \right\|_{r'}$$
$$\le C \frac{p}{\varepsilon} \left\| w_j \right\|_{2\frac{p-2}{p}}^{2\frac{p-2}{p}} + \frac{\varepsilon}{p} \left\| w_j \right\|_{2,1,g}^2 + C \left\| w_j \right\|_{2r'}^{2\frac{p-1}{p}}.$$

Weiterhin ist

$$\left\| w_j \right\|_{2\frac{p-2}{p}}^{2\frac{p-2}{p}} = \int_\Omega \underbrace{|w_j|^{2\frac{p-2}{p}}}_{\frac{p}{p-2}} \underbrace{1}_{\frac{p}{2}} \, dx \le \left\| w_j \right\|_2^{2\frac{p-2}{p}} (\operatorname{meas}\Omega)^{\frac{2}{p}} \le C \left\| w_j \right\|_2^{2\frac{p-2}{p}}.$$

Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse liefert

$$\frac{1}{ph} \left(\left\| w_j \right\|_2^2 - \left\| w_{j-1} \right\|_2^2 \right) + \frac{c_1}{p} \left\| w_j \right\|_{2,1,g}^2$$
$$\le \left\| f_j \right\|_r \left\| w_j \right\|_{2r'}^{2\frac{p-1}{p}} + \frac{\varepsilon}{p} \left\| w_j \right\|_{2,1,g}^2 + C \frac{p}{\varepsilon} \left\| w_j \right\|_2^{2\frac{p-2}{p}} + C \left\| w_j \right\|_{2r'}^{2\frac{p-1}{p}} + \frac{C_2}{p} \left\| w_j \right\|_2^2$$

Also ist

$$\frac{1}{h} \left(\left\| w_j \right\|_2^2 - \left\| w_{j-1} \right\|_2^2 \right) + c \left\| w_j \right\|_{2,1,g}^2$$
$$\le Cp(\left\| f_j \right\|_r + 1) \left\| w_j \right\|_{2r'}^{2\frac{p-1}{p}} + Cp^2 \left\| w_j \right\|_2^{2\frac{p-2}{p}} + C \left\| w_j \right\|_2^2$$
$$\le C \left(p \left\| w_j \right\|_{2r'}^{2\frac{p-1}{p}} + p^2 \left\| w_j \right\|_2^{2\frac{p-2}{p}} + C \left\| w_j \right\|_2^2 \right),$$

da wegen $u_{j-1} \in B_R(U_0)$ $\left\| f_j \right\|_r \le C$ gilt.
Nun sind noch die Normen auf der rechten Seite abzuschätzen. Dabei wird Lemma 3.2.7 genutzt.

1. Abschätzung von $\left\| w_j \right\|_{2r'}^{2\frac{p-1}{p}}$

Es ist $2 \le 2r' < \frac{r_1 N}{N - r_1}$, denn $r' > 1$, $N' > N$ und

$$\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} > \frac{1}{2r} + \frac{1}{2N'} \Longleftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{2r} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2N'} - \frac{1}{N} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{N}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{r-1}{2r} > \frac{N-1}{r_1 N} \Longleftrightarrow 2r' < \frac{r_1 N}{N - r_1}.$$

Also ist Lemma 3.2.7 anwendbar.
Es sei $\alpha = \frac{p-1}{p}$, $1 < q < r_1$ (unabhängig von p),

$$\overline{\theta} = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{2r'}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{N}}, \quad \overline{\sigma} = \frac{\overline{\theta}}{1 - \overline{\theta}},$$
$$\overline{\beta} = \frac{\alpha}{1 + (1-\alpha)\overline{\sigma}} = \frac{p-1}{p + \overline{\sigma}},$$

wobei $\overline{\sigma}$ unabhängig von p ist. Es wird $\beta = \beta_1(p) := \overline{\beta}$ gewählt.
Dann ist

$$\|w_j\|_{2r'}^{2\alpha} \le \varepsilon \|w_j\|_{2,1,g}^2 + C_\varepsilon \|w_j\|_q^{2\beta}, \quad C_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\sigma}, \quad \sigma = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha}.$$

Es ist

$$\frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha} = \frac{(p-1)\overline{\sigma}}{p + \overline{\sigma}} \le \sigma_1, \text{ falls } p \to \infty.$$

Also gilt

$$\|w_j\|_{2r'}^{2\alpha} \le \varepsilon \|w_j\|_{2,1,g}^2 + C\varepsilon^{-\sigma_1} \|w_j\|_q^{2\beta_1}, \quad C \text{ unabhängig von } p \text{ und } h.$$

Dann folgt mit $\varepsilon = \frac{\delta}{p}$, δ unabhängig von p hinreichend klein gewählt:

$$p \|w_j\|_{2r'}^{2\alpha} \le \delta \|w_j\|_{2,1,g}^2 + C_\delta p^{\sigma_1} \|w_j\|_q^{2\beta_1}.$$

2. Abschätzung von $\|w_j\|_2^{2\frac{p-2}{p}}$
Es ist offensichtlich $2 \le 2 < \frac{r_1 N}{N - r_1}$, also sind die Voraussetzungen von Lemma 3.2.7 erfüllt.
Es ist $\alpha = \frac{p-2}{p}$, $1 < q < r_1$ (wie oben),

$$\overline{\theta} = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{N}}, \quad \overline{\sigma} = \frac{\overline{\theta}}{1 - \overline{\theta}},$$
$$\overline{\beta} = \frac{\alpha}{1 + (1-\alpha)\overline{\sigma}} = \frac{p-2}{p + 2\overline{\sigma}},$$

$\overline{\sigma}$ unabhängig von p. Es sei $\beta = \beta_2(p) := \overline{\beta}$.
Dann folgt

$$\|w_j\|_2^{2\alpha} \le \varepsilon \|w_j\|_{2,1,g}^2 + C_\varepsilon \|w_j\|_q^{2\beta_2}, \quad C_\varepsilon \sim \varepsilon^{-\sigma}, \quad \sigma = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha},$$

$$\frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha} = \frac{(p-2)\overline{\sigma}}{2(p + \overline{\sigma})} \le \sigma_2, \text{ falls } p \to \infty.$$

Also gilt

$$\|w_j\|_2^{2\alpha} \le \varepsilon \|w_j\|_{2,1,g}^2 + C\varepsilon^{-\sigma_2} \|w_j\|_q^{2\beta_2},$$

Sei nun $\varepsilon = \frac{\delta}{p^2}$, δ unabhängig von p hinreichend klein gewählt. Dann ergibt sich

$$p^2 \|w_j\|_2^{2\alpha} \leq \delta \|w_j\|_{2,1,g}^2 + C_\delta p^{2\sigma_2} \|w_j\|_q^{2\beta_2}.$$

3. Abschätzung von $\|w_j\|_2^2$
Es ist $\alpha = 1$, also auch $\beta = 1$. Die Konstanten $\overline{\theta}$, $\overline{\sigma}$ haben den gleichen Wert wie in der 2. Abschätzung. Mit $\sigma_3 = \overline{\sigma}$ folgt

$$\|w_j\|_2^2 \leq \delta \|w_j\|_{2,1,g}^2 + C\delta^{-\sigma_3} \|w_j\|_q^2.$$

Falls δ hinreichend klein ist, folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left(\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2\right) + c\|w_j\|_{2,1,g}^2 &\leq C_\delta \left(p^{\sigma_1} \|w_j\|_q^{2\beta_1} + p^{\sigma_2} \|w_j\|_q^{2\beta_2} + \|w_j\|_q^2\right) \\ &\leq C_\delta p^{\sigma_M} \left(\|w_j\|_q^{2\beta_1} + \|w_j\|_q^{2\beta_2} + \|w_j\|_q^2\right),\end{aligned}$$

$\sigma_M = \max(\sigma_1, 2\sigma_2, 1)$. Hierbei hängt C_δ nicht von h oder p ab.
Summation $(j = 1, \dots, i)$ liefert

$$\|w_i\|_2^2 - \|w_0\|_2^2 \leq Chp^{\sigma_M} \sum_{j=1}^{i} \left(\|w_j\|_q^{2\beta_1} + \|w_j\|_q^{2\beta_2} + \|w_j\|_q^2\right).$$

Es ist $w_0 = |u_0 - U_0|^{\frac{p-2}{2}}(u_0 - U_0) = 0$ und $\|w_j\|_q = \|z_j\|_{pq/2}^{\frac{p}{2}}$ und somit

$$\|z_i\|_p^p \leq ct_i p^{\sigma_M} \max_{1\leq j\leq i} \left(\|z_j\|_{pq/2}^{p\beta_1} + \|z_j\|_{pq/2}^{p\beta_2} + \|z_j\|_{pq/2}^p\right).$$

Es sei nun für $\nu = 0, 1, 2\dots$ $p_\nu = 2\left(\frac{2}{q}\right)^\nu$, $\beta_{1,\nu} = \beta_1(p_\nu) = \frac{p_\nu - 1}{p_\nu + \overline{\sigma}}$, $\beta_{2,\nu} = \beta_2(p_\nu) = \frac{p_\nu - 2}{p_\nu + 2\overline{\sigma}}$ und $m_{i,\nu} = \max_{1\leq j\leq i} \|z_j\|_{p_\nu}$.
Dann folgt

$$\|z_i\|_{p_\nu}^{p_\nu} \leq ct_i p_\nu^{\sigma_M} \left(m_{i,\nu-1}^{p_\nu\beta_{1,\nu}} + m_{i,\nu-1}^{p_\nu\beta_{2,\nu}} + m_{i,\nu-1}^{p_\nu}\right),$$

also

$$m_{i,\nu} \leq \left(ct_i p_\nu^{\sigma_M} \left(m_{i,\nu-1}^{p_\nu\beta_{1,\nu}} + m_{i,\nu-1}^{p_\nu\beta_{2,\nu}} + m_{i,\nu-1}^{p_\nu}\right)\right)^{\frac{1}{p_\nu}}.$$

Es ist $\prod_{\nu=1}^\infty \beta_{1,\nu} = \prod_{\nu=1}^\infty \frac{p_\nu - 1}{p_\nu + \overline{\sigma}} > 0$, da

$$\sum_{\nu=1}^\infty \left|1 - \frac{p_\nu - 1}{p_\nu + \overline{\sigma}}\right| = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\overline{\sigma} + 1}{p_\nu + \overline{\sigma}} \leq (\overline{\sigma} + 1) \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{p_\nu} < \infty,$$

da $p_\nu = 2\left(\frac{2}{q}\right)^\nu$.
Also ist das Lemma 3.4.3 anwendbar, es existieren Konstanten $\gamma_1, \gamma_2, \beta_0 > 0$ mit

$$\limsup_{\nu\to\infty} m_{i,\nu} \leq cQ_{\gamma_1,\gamma_2}(t_i) m_{i,0}^{\beta_0}.$$

Nun ist $m_{i,0} = \max_{1\leq j\leq i} \|u_j - U_0\|_2 \leq \max_{1\leq j\leq i} \|u_j\|_2 + \|U_0\|_2 \leq C(t_i) \leq C$.
Nach Lemma 3.2.2 gilt dann

$$\|u_i - U_0\|_\infty \leq CQ_{\gamma_1,\gamma_2}(t_i) =: M(t_i).$$

Diese Funktion M ist stetig, von h unabhängig und es gilt $M(0) = 0$.
Sei $0 < T^* \leq T$ so gewählt, daß $M(t) \leq R$ für $t \leq T^*$.
Dann ergibt sich die Behauptung. ■.
Die A-priori-Abschätzungen (4.19) lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 4.2.5 *Es existieren Konstanten $N_0 \in \mathbb{N}$, $C > 0$, $0 < T^* \leq T$, so daß für alle $n \geq N_0$, $t \leq T^*$ gilt:*

$$\begin{aligned}
&\|\overline{u}^n(t)\|_{2,1,g} \leq C, \\
&\left\| \frac{d}{dt} u^n(t) \right\|_2 \leq C, \\
&\left\| \frac{d}{dt} u^n \right\|_{L_2(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega))} \leq C, \\
&\|u^n(t) - U_0\|_\infty \leq M(t+h), \\
&\|\overline{u}^n(t) - U_0\|_\infty \leq M(t).
\end{aligned}$$

Folgerung 4.2.1 *Sei $t_{j-1} < t \leq t_j$. Dann ist*

$$\begin{aligned}
u^n(t) = u_{j-1} + (t - t_{j-1})\delta u_j &= u_{j-1} + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(u_j - u_{j-1}) \\
&= \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} u_j + \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}} u_{j-1},
\end{aligned}$$

also $\|u^n(t)\|_{2,1,g} \leq C$.

Diese Näherungsfunktionen $u^n, \overline{u}^n$ erfüllen die Gleichung

$$\left(\frac{du^n(t)}{dt}, v \right) + a_i(\overline{u}^n(t), v) = \left(\overline{f}^n(t), v \right) \quad \forall t \in I^* = [0, T^*], \forall v \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega), t_{i-1} < t \leq t_i,$$

wobei $\overline{f}^n(t) := f(., t_i, u_{i-1}(.))$.

4.3 Konvergenzeigenschaften

Es ist zu zeigen, daß die Folgen der Funktionen (u^n), $(\overline{u}^n)$ in geeigneten Banachräumen gegen eine Funktion u konvergieren. Es wird gezeigt werden, daß diese Funktion u Lösung der Gleichung (4.12) ist. Weiterhin wird gezeigt werden, daß keine weitere Lösung der Gleichung (4.12) existieren kann.
Zunächst werden einige Hilfsabschätzungen bereitgestellt.
Sei $h = \frac{T}{n}$, $t_{j-1} < t \leq t_j$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\|\overline{u}^n(t-h) - \overline{u}^n(t)\|_2 \leq \|u_{j-1} - u_j\|_2 = \|\delta u_j\|_2 h \leq \frac{C}{n}, \\
&\|\overline{u}^n(t) - u^n(t)\|_2 \leq \|\delta u_j\|_2 h \leq \frac{C}{n}, \\
&u^n(t) - \overline{u}^n(t) = (t - t_{j-1})\delta u_j, \text{ also } \|u^n(t) - \overline{u}^n(t)\|_{2,1,g} \leq \int_{t_{j-1}}^t 1 \, \|\delta u_j\|_{2,1,g} \, d\tau \\
&\leq \sqrt{t - t_{j-1}} \left(\int_{t_{j-1}}^t \|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \left(\int_0^T \|\delta u_j\|_{2,1,g}^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Sei nun $h_n = \frac{T}{n}$, $h_m = \frac{T}{m}$, $t_{i-1,n} < t \le t_{i,n}$, $t_{j-1,m} < t \le t_{j,m}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&\left\|\overline{f}^n(t) - \overline{f}^m(t)\right\|_2 = \|f(.,t_{i,n},\overline{u}^n(t-h_n)) - f(.,t_{j,m},\overline{u}^m(t-h_m))\|_2 \\
&\le C(|t_{i,n} - t_{j,m}| + \|\overline{u}^n(t-h_n) - \overline{u}^m(t-h_m)\|_2) \\
&\le C(h_n + h_m + \|\overline{u}^n(t-h_n) - \overline{u}^n(t)\|_2 + \|\overline{u}^n(t) - \overline{u}^m(t)\|_2) + \|\overline{u}^m(t) - \overline{u}^m(t-h_m)\|_2) \\
&\le C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \|\overline{u}^n(t) - \overline{u}^m(t)\|_2\right).
\end{aligned}
$$

Der folgende Konvergenzsatz wird auf ähnliche Weise wie Lemma 2.3 bewiesen.

Satz 4.3.1 *Es existiert eine Funktion* $u \in W_2^1(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega))$ *mit* $u_t \in L_\infty(I^*, L_2(\Omega))$, *so daß folgende Konvergenzaussagen gelten:*

$$
\begin{aligned}
&u^n \to u \textit{ in } L_\infty(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)), \\
&u^n \rightharpoonup u \textit{ in } W_2^1(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)), \\
&u_t^n \to u_t \textit{ in } L_2(I^*, L_2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Beweis Sei $t_{i-1,n} < t \le t_{i,n}$ und $t_{j-1,m} < t \le t_{j,m}$. Es gilt

$$
\left(\frac{du^n(t)}{dt}, v\right) + a_{i,n}(\overline{u}^n(t), v) = \left(\overline{f}^n(t), v\right) \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega),
$$

$$
\left(\frac{du^m(t)}{dt}, v\right) + a_{j,m}(\overline{u}^m(t), v) = \left(\overline{f}^m(t), v\right) \quad \forall v \in \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega).
$$

Sei $v = \overline{u}^n(t) - \overline{u}^m(t)$. Nach Subtraktion folgt

$$
\begin{aligned}
((u^n - u^m)_t, u^n - u^m) + a_{i,n}(\overline{u}^n - \overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m) &= \left(\overline{f}^n - \overline{f}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m\right) \\
&- (a_{i,n}(\overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m) - a_{j,m}(\overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m)) \\
&+ ((u^n - u^m)_t, u^n - \overline{u}^n) + ((u^n - u^m)_t, \overline{u}^m - u^m).
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
&a_{i,n}(\overline{u}^n - \overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m) \ge C_1 \|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_{2,1,g}^2 - C_2 \|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_2^2, \\
&\left(\overline{f}^n - \overline{f}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m\right) \le C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)^2 + C\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_2^2 \le C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + C\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_2^2, \\
&|a_{i,n}(\overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m) - a_{j,m}(\overline{u}^m, \overline{u}^n - \overline{u}^m)| \le C(h_n + h_m)\|\overline{u}^m\|_{2,1,g}\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_{2,1,g} \\
&\le C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right), \\
&((u^n - u^m)_t, u^n - \overline{u}^n) \le (\|u_t^n\|_2 + \|u_t^m\|_2)\|u^n - \overline{u}^n\|_2 \le \frac{C}{n},
\end{aligned}
$$

also

$$
((u^n - u^m)_t, u^n - u^m) + c\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_{2,1,g}^2 \le C\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + C\|\overline{u}^n - \overline{u}^m\|_2^2. \tag{4.22}
$$

Integration dieser Gleichung über $[0,t]$ liefert

$$\|u^n(t)-u^m(t)\|_2^2+c\int\limits_0^t \|\overline{u}^n(\tau)-\overline{u}^m(\tau)\|_{2,1,g}^2\,d\tau \le C_1\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+C_2\int\limits_0^t \|\overline{u}^n(\tau)-\overline{u}^m(\tau)\|_2^2\,d\tau,$$

vgl. Satz 3.1.10. Nach Anwendung des Gronwall-Lemmas 3.4.2 ergibt sich

$$\|u^n(t)-u^m(t)\|_2^2 \le C_1\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)e^{C_2 t} \le C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right), \text{ also}$$

$$\|u^n(t)-u^m(t)\|_2^2 + c\int_0^t \|\overline{u}^n(\tau)-\overline{u}^m(\tau)\|_{2,1,g}^2\,d\tau \le C_1\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+Ct\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right).$$

Dann sind $(u^n), (\overline{u}^n)$ Cauchyfolgen in den Banachräumen $C(I^*,L_2(\Omega))$ bzw. $L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))$ mit $u^n \xrightarrow{C(I^*,L_2(\Omega))} u, \quad \overline{u}^n \xrightarrow{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))} \tilde{u}$.
Ähnlich wie in Lemma 2.3 zeigt man $u=\tilde{u}$. Wegen $\|u^n-\overline{u}^n\|_2 \le \frac{C}{n}$ gilt auch

$$\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_2^2 \le C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \text{ und } \overline{u}^n \xrightarrow{L_\infty(I^*,L_2(\Omega))} u.$$

Aus (4.22), $\|u_t^n\|_2 \le C$, $\|u_t^m\|_2 \le C$ folgt dann $\overline{u}^n \xrightarrow{L_\infty(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))} u$.

Wegen $\|u^n-\overline{u}^n\|_{2,1,g} \le Cn^{-\frac{1}{2}}$ gilt $u^n \xrightarrow{L_\infty(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))} u$. Es ist

$$\begin{aligned}((u^n-u^m)_t,(u^n-u^m)_t) &= \left(\overline{f}^n-\overline{f}^m,(u^n-u^m)_t\right) - a_{i,n}(\overline{u}^n-\overline{u}^m,(u^n-u^m)_t)\\ &\quad - (a_{i,n}(\overline{u}^m,(u^n-u^m)_t)-a_{j,m}(\overline{u}^m,(u^n-u^m)_t)).\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}&\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}^2 \le C\int_{I^*}\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_{2,1,g}\|(u^n-u^m)_t\|_{2,1,g}\,dt\\ &+\left\|\overline{f}^n-\overline{f}^m\right\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}\\ &+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\|\overline{u}^m\|_{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))}\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))}\\ &\le C\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))}\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))}+C_\varepsilon\left\|\overline{f}^n-\overline{f}^m\right\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}^2\\ &+\varepsilon\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}^2+C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}&\|(u^n-u^m)_t\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}^2\\ &\le C\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))}+C_\varepsilon\left\|\overline{f}^n-\overline{f}^m\right\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}^2+C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\\ &\le C\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))}+C\left(\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^2+\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_{L_2(I^*,L_2(\Omega))}^2\right)+C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\\ &\le C\|\overline{u}^n-\overline{u}^m\|_{L_2(I^*,\overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega))}+C\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right).\end{aligned}$$

Deshalb ist die Folge (u_t^n) eine Cauchyfolge im Banachraum $L_2(I^*, L_2(\Omega))$ mit Grenzwert v. Man beweist wie in Lemma 2.3 $v = u_t$.
Ebenfalls analog zu Lemma 2.3 läßt sich

$$u_t^n \rightharpoonup u_t \text{ in } L_2(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega))$$

und $u_t \in L_\infty(I^*, L_2(\Omega))$ zeigen. ■
Nun wird gezeigt, daß die Funktion u Lösung von (4.12) ist.

Lemma 4.3.1 *Die Funktion u ist Lösung von* (4.12).

Beweis Es gilt

$$\int_{I^*} (u_t^n, v)\, dt + \int_{I^*} a(\overline{u}^n, v)\, dt = \int_{I^*} \left(\overline{f}^n, v\right) dt \quad \forall n, \quad \forall v \in L_2(I, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)).$$

Es ist

$$\left\|\overline{f}^n - f(.,.,u(.,.))\right\|_{L_2(I^*, L_2(\Omega))} \leq C \int_{I^*} h_n + \|\overline{u}^n(t) - u(t)\|_2 \, dt \leq \frac{C}{\sqrt{n}},$$

also gilt

$$\int_{I^*} \left(\overline{f}^n, v\right) dt \xrightarrow{n\to\infty} \int_{I^*} (f(.,t,u(.,t)), v)\, dt.$$

Der Konvergenzsatz von Lebesgue liefert dann ähnlich wie im Beweis zu Lemma 2.4 die Behauptung. ■
Nun ist noch die Eindeutigkeit der Lösung u nachzuweisen.

Lemma 4.3.2 *Es existiert höchstens eine Lösung von* (4.12) *im Raum* $L_2(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)) \cap W_2^1(I^*, L_2(\Omega))$.

Beweis Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (4.12). Für $w := u_1 - u_2$ gilt dann mit $v \in L_2(I^*, \overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega))$

$$\int_{I^*} (w_t(x,t), v(x,t))\, dt + \int_{I^*} a(w(x,t), v(x,t))\, dt = \int_{I^*} (f(.,t,u_1(.,t)) - f(.,t,u_2(.,t)), v)\, dt.$$

Für $0 < t_0 \leq T^*$ sei

$$v(t) = \begin{cases} w(t) & : t \leq t_0, \\ 0 & : \text{sonst} . \end{cases}$$

Es gilt $\|f(.,t,u_1(.,t)) - f(.,t,u_2(.,t))\|_2 \leq C \|w(t)\|_2$. Dann folgt

$$\|w(t_0)\|_2^2 + C_1 \int_0^{t_0} \|w(t)\|_{2,1,g}^2 \, dt \leq C \int_0^{t_0} \|w(t)\|_2^2 \, dt, \text{ also } \|w(t_0)\|_2^2 \leq C_0 \int_0^{t_0} \|w(t)\|_2^2 \, dt \quad \forall t_0.$$

Das Gronwall-Lemma liefert dann

$$\|w(t_0)\|_2^2 \leq 0 e^{C_0 t} = 0.$$

Daraus ergibt sich die Eindeutigkeit. ■

Kapitel 5

Quasilineare schwach parabolische Differentialgleichungen

5.1 Einführung

Das Ziel dieses Kapitels besteht in der Untersuchung von Rand–Anfangswertproblemen der Form

$$\begin{aligned} u_t - A(x,t,u)u &= f(x,t,u), \\ u(x,0) &= U_0(x), \\ u(x,t) &= 0 \quad \text{in} \quad \Gamma, \end{aligned}$$

wobei z.B.

$$A(x,t,v)u := -\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g(x) a_{i,k}(x,t,v) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^{N} a_i(x,t,v) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Die Behandlung solcher Gleichungen ist wesentlich schwieriger als die Untersuchung semilinearer Gleichungen, vgl. voriges Kapitel. Dies liegt daran, daß sich nicht alle Abschätzungen auf den quasilinearen Fall übertragen lassen.
Vor allem die Abschätzung von $\|\delta u_j\|_2$ bereitet Schwierigkeiten: Dazu sei $a_{t,w}(u,v)$ die durch $a_{t,w}(u,v) = (A(x,t,w)u, v)$ über dem Hilbertraum $\overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ erzeugte Bilinearform. Bei der Abschätzung von $\|\delta u_j\|_2$ treten Terme

$$a_{t,w}(u,v) - a_{t',w'}(u,v)$$

auf, die abzuschätzen sind. Nun ist (bei geeigneten Voraussetzungen an die Koeffizienten)

$$\begin{aligned} |a_{t,w}(u,v) - a_{t',w'}(u,v)| \le{} & C \sum_{i,k=1}^{N} \int_\Omega (|t-t'| + |w(x) - w'(x)|) \sqrt{g} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \sqrt{g} \left| \frac{\partial v}{\partial x_k} \right| dx \\ & + C \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega (|t-t'| + |w(x) - w'(x)|) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| |v|\, dx. \end{aligned}$$

Die Integrale sind mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung abzuschätzen. Es ist $\sqrt{g}|u_{x_i}|$, $\sqrt{g}|v_{x_k}| \in L_2(\Omega)$. Dann wäre für $|w - w'|$ nur noch die $L_\infty(\Omega)$–Norm möglich, so daß folgen würde:

$$|a_{t,w} - a_{t',w'}| \leq C \, \|w - w'\|_\infty \, \|u\|_{2,1,g} \, \|v\|_{2,1,g} \, .$$

Allerdings gelingt es nicht, die Norm $\|w - w'\|_\infty$ mit Hilfe von z.B. Interpolationsungleichungen weiter abzuschätzen.
Also gelangt auf die rechte Seite der Ungleichung ein Term, für den sich keine obere Schranke angeben läßt.
Die Theorie der Hilberträume $\overset{o}{W}{}^1_{2g}(\Omega)$ ist also ungeeignet, falls der elliptische Operator nichtlinear ist.
Demnach werden Aussagen im Rahmen der Theorie der $L_p(\Omega)$–Räume benötigt. Dabei sind für lineare elliptische Probleme der Form

$$Au = f \in L_p(\Omega), \quad A \quad \text{linear}, \tag{5.1}$$

zwei Typen von Resultaten wichtig:

A–priori–Abschätzung Falls u in einem geeignet zu definierenden gewichteten Sobolev–Raum $W^k_{pg}(\Omega)$ $(k = 1, 2)$ liegt und Lösung von (5.1) ist, dann gilt (unter geeigneten Voraussetzungen insbesondere an das Absolutglied von A) eine Abschätzung der Form

$$\|u\|_{p,g,k} \leq C \, \|f\|_p \, .$$

Existenzresultat Falls $f \in L_p(\Omega)$ und die Koeffizienten von A geeignete Bedingungen erfüllen, dann existiert genau eine Lösung $u \in W^k_{pg}(\Omega)$, $k = 1$ oder $k = 2$.

Für den nichtentarten Fall sind sehr viele solcher Resultate bekannt, siehe z.B. [Sim72] oder [Mir70], während der Fall entarteter elliptischer Operatoren noch nicht in solchem Umfang studiert wurde. In [KS87] werden gewichtete Sobolev–Räume untersucht. Die dort vorgestellten Methoden lassen sich allerdings nur für Hilberträume (also für $p = 2$) anwenden.
Lediglich in [Tri78] konnten die erforderlichen Resultate für $p > 2$ gefunden werden. Die Voraussetzungen in diesem Buch liefern eine Reihe von Einschränkungen an die schwach parabolischen Probleme.
Gegenüber den Voraussetzungen im vorigen Kapitel ergeben sich folgende Unterschiede:

1. Die für den elliptischen Hauptteil parabolische Operatoren übliche Voraussetzung

$$\sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}\xi_i\xi_k > 0, \quad \xi \neq 0$$

   darf nur am Rand von Ω verletzt sein.

2. Der Koeffizient des Absolutgliedes muß am Gebietsrand gegen Unendlich divergieren.

3. An die Gewichtsfunktion sind einige Regularitätsvoraussetzungen zu stellen.

Die zweite Bedingung ist überraschend. Ein Gegenbeispiel wird diese Bedingung motivieren.
Die verwendeten Aussagen aus der $L_p(\Omega)$–Theorie entarteter elliptischer Operatoren lassen sich wie folgt zusammenfassen:

1. Falls $A \in \mathfrak{A}^{(2)}_{\mu,\nu}$ und ϱ die Bedingungen aus Satz 3.3.5 erfüllt und $\lambda \leq \lambda_0 < 0$ gilt, dann besitzt die Gleichung
$$Au - \lambda u = f \in L_p(\Omega)$$
genau eine Lösung $u \in W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$.

2. Dann gilt zusätzlich
$$\|u\|_{W_p^2(\Omega,\varrho^{p\mu},\varrho^{p\nu})} \leq C\,\|f\|_p\,. \tag{5.2}$$

3. Falls p hinreichend groß gewählt wurde, gilt $u \in C^1(\Omega)$.

Diese Ergebnisse gestatten es, die Existenz der Funktionen u_j auf andere Weise als in den Kapiteln 2 und 4 zu beweisen. In diesen Kapiteln wurde das elliptische Problem in die Variationsformulierung überführt und anschließend wurde mit Hilfe des Satzes von Lax–Milgram eine schwache Lösung $u \in \overset{o}{W}{}_2^1(\Omega)$ bzw. $u \in \overset{o}{W}{}_{2g}^1(\Omega)$ nachgewiesen.
Jetzt kann auf direktem Wege (ohne zur Variationsformulierung überzugehen) die Existenz von $u_j \in W_p^2(\Omega, \varrho^{p\mu}, \varrho^{p\nu})$ nachgewiesen werden, falls $-h^{-1} \leq \lambda_0$.
Die Wahl von p garantiert dann $u_j \in C^1(\Omega)$.
Allerdings genügt eine Abschätzung der Form (5.2) nicht, um die Konvergenz der Funktionen u^n nachzuweisen. Hierfür ist die Variationsformulierung notwendig. Deshalb wird anschließend eine im Hilbertraum $W_2^1(\Omega, \varrho^{\mu}, \varrho^{\nu})$ elliptische Bilinearform konstruiert und untersucht. Die weiteren Abschätzungen verlaufen ähnlich wie im Kapitel 4.

5.2 Problemstellung

Folgendes quasilineares Rand–Anfangswertproblem wird untersucht:

$$\begin{aligned} u_t - \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varrho^{\mu}(x) b_{ik}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{N} \varrho^{(\mu+\nu)/2}(x) a_i(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} & \\ + \varrho^{\nu}(x) b_0(x,t,u) u = f(x,t,u), & \quad (5.3) \\ u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Gamma, & \quad (5.4) \\ u(x,0) = U_0(x), \quad x \in \Omega. & \quad (5.5) \end{aligned}$$

Für die Untersuchung werden einige Voraussetzungen benötigt.
Für ein festes $R > 0$ sei

$$\begin{aligned} M_R(U_0) &:= \{(x,t,u) \in \mathbb{R}^{N+2} : (x,t) \in \Omega \times [0,T], |u - U_0(x)| \leq R\}, \\ B_R(U_0) &:= \{u \in L_\infty(\Omega) : \|u - U_0\|_\infty \leq R\}. \end{aligned}$$

Die folgenden Voraussetzungen seien erfüllt:

1. Es sei
$$\nu > \mu + 2, \quad \mu < 0 < \nu, \quad \nu + \mu > 0, \tag{5.6}$$

2. Die Funktion ϱ sei Gewichtsfunktion im Sinne der Definition 3.2.16 und erfülle die Voraussetzungen des Satzes 3.3.5. Mit einem festen $N' > N$ sei dann
$$\varrho^{-\mu} \in L_{N'}(\Omega), \quad \varrho^{\nu} \notin L_1(\Omega). \tag{5.7}$$

3. Es sei $U_0 \in W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$, wobei $p_0 \geq 2$ und
$$\frac{2\nu}{\nu - \mu} > 1 + \frac{N}{p_0}. \tag{5.8}$$

4. Es existiert eine positive Konstante C_E, so daß für alle $\xi \in \mathbb{R}^N$ und alle $(x, t, u) \in M_R(U_0)$ gilt:
$$\sum_{i,k=1}^{N} b_{ik}(x, t, u)\xi_i\xi_k \geq C_E|\xi|^2, \quad b_0(x, t, u) \geq C_E. \tag{5.9}$$

5. Es existieren positive Konstanten C_1, δ, so daß für alle $(x, t, u) \in M_R(U_0)$ gilt:
$$|a_i(x, t, u)| \leq C_1\varrho^{-\delta}(x). \tag{5.10}$$

6. Für alle i, j, k ist b_{ik}, $\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_j}$, $\frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \in C(\overline{M_R(U_0)})$ und es gilt für alle $t, t' \in [0, T]$ und alle $u, u' \in B_R(U_0)$:
$$\|b_{ik}(., t, u(.)) - b_{ik}(., t', u'(.))\|_{\beta_1} \leq C_b(|t - t'| + \|u - u'\|_\sigma), \tag{5.11}$$
wobei
$$\sigma \geq \beta_1, \quad \frac{1}{\beta_1} < \frac{1}{2}\left(\frac{2}{N} - \frac{1}{N'}\right). \tag{5.12}$$
Die letzte Ungleichung ist gegenstandslos, falls b_{ik} nicht von u abhängen.

7. Es ist für alle j b_0, $\frac{\partial b_0}{\partial x_j}$, $\frac{\partial b_0}{\partial u} \in C(\overline{M_R(U_0)})$ und es gilt für alle $t, t' \in [0, T]$ und alle $u, u' \in B_R(U_0)$:
$$\|b_0(., t, u(.)) - b_0(., t', u'(.))\|_{\beta_0} \leq C_b(|t - t'| + \|u - u'\|_\sigma), \tag{5.13}$$
wobei
$$\sigma \geq \beta_0, \quad \frac{1}{\beta_0} + \frac{1}{p_0} < \frac{2}{N} - \frac{1}{N'}. \tag{5.14}$$
Die letzte Ungleichung ist nicht erforderlich, falls b_0 nicht von u abhängt.

8. Für alle i ist $a_i \in C(\overline{M_R(U_0)})$ und es gilt für alle $t, t' \in [0, T]$ und alle $u, u' \in B_R(U_0)$:
$$\|a_i(., t, u(.)) - a_i(., t', u'(.))\|_{\alpha_1} \leq C_a(|t - t'| + \|u - u'\|_\sigma), \tag{5.15}$$
wobei
$$\sigma \geq \alpha_1, \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{p_0} < \frac{2}{N} - \frac{1}{N'}. \tag{5.16}$$
Die letzte Ungleichung wird nicht benötigt, falls a_i nicht von u abhängen.

9. Für jedes $t \in [0, T]$ und jedes $u \in B_R(U_0)$ sei $\|f(., t, u(.))\|_\varphi \leq C_f$ und es sei für alle $t, t' \in [0, T]$ und alle $u, u' \in B_R(U_0)$:
$$\|f(., t, u(.)) - f(., t', u'(.))\|_\varphi \leq C_f(|t - t'| + \|u - u'\|_\sigma), \tag{5.17}$$
wobei
$$\sigma \geq \varphi \geq p_0. \tag{5.18}$$

10. Es sei
$$\frac{p_0}{2\sigma} > \frac{N'+1}{2N'} - \frac{1}{N}. \tag{5.19}$$

Dann gilt folgender Satz:

Satz 5.2.1 *Unter den Voraussetzungen (5.6),..., (5.19) existiert ein $0 < T^* \le T$, so daß das Rand–Anfangswertproblem (5.3), (5.4), (5.5) genau eine schwache Lösung*

$$u \in C(I^*, C^1(\Omega)) \cap L_\infty\left(I^*, W^1_{p_0}\left(\Omega, \varrho^{p_0(\nu+\mu)/2}, \varrho^{p_0\nu}\right)\right) \cap L_2\left(I^*, W^2_2\left(\Omega, \varrho^{2\mu}, \varrho^{2\nu}\right)\right) \quad \textit{mit}$$
$$u_t \in L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega))$$

besitzt. Für jedes $v \in L_1(I^*, W^1_{p_0'}(\Omega))$ $(p_0^{-1} + {p_0'}^{-1} = 1)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{I^*} (u_t, v)\, dt + \sum_{i,k=1}^N \int_{I^*}\int_\Omega \varrho^\mu b_{ik}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\, dt \qquad (5.20)\\
&+ \sum_{i=1}^N \int_{I^*}\int_\Omega \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx\, dt + \int_{I^*}\int_\Omega \varrho^\nu b_0(x,t,u) uv\, dx\, dt\\
&= \int_{I^*} (f(x,t,u), v)\, dt.
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.2.1 *Bevor dieser Satz bewiesen wird, sei kurz dargelegt, daß es möglich ist, die Voraussetzungen zu erfüllen.*
Dazu sei ϱ so gewählt, daß mit geeigneten positiven Konstanten c_1, c_2 die Ungleichung $c_1 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \le \varrho^{-1}(x) \le c_2 \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ gilt. Dann ist $\varrho^{-\mu} \in L_{N'}(\Omega)$, falls $-{N'}^{-1} < \mu < 0$ gilt.
Sei $\nu = 2$. Dann ist $\varrho^\nu \notin L_1(\Omega)$. Es existiert ein $p_0 \ge 2$, $p_0 > N$, so daß (5.8) für alle $-N^{-1} < \mu < 0$ gilt. Weiterhin sei

$$\beta_1 = \beta_0 = \alpha_1 = \varphi = \sigma = p_0 > N.$$

Die Ungleichungen (5.12), (5.14), (5.16), (5.19) sind erfüllt, falls N' hinreichend groß gewählt wurde. Wenn $N' > N$ festgelegt wurde, kann μ mit $-{N'}^{-1} < \mu < 0$ festgelegt werden.
Die anderen Voraussetzungen können offensichtlich erfüllt werden.
Also existiert ein Modell für die Untersuchungen dieses Kapitels.

5.3 A–priori–Abschätzungen

Es sei n eine natürliche Zahl, $h = \frac{T}{n}$, $t_j = jh$, $(j = 0, \ldots, n)$. Gesucht wird eine Folge von Funktionen (u_j), für die

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}(u_j - u_{j-1}) - \sum_{i,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varrho^\mu(x) b_{ik}(x,t_j,u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^N \varrho^{(\nu+\mu)/2}(x) a_i(x,t_j,u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_i}&\\
+ \varrho^\nu(x) b_0(x,t_j,u_{j-1}) u_j = f(x,t_j,u_{j-1}),&\\
u_0 = U_0&
\end{aligned}$$

gilt.

Für die folgenden Untersuchungen ist es zweckmäßig, die Divergenzform aufzulösen:

$$\begin{aligned}
&-\sum_{i,k=1}^{N} \varrho^{\mu} b_{ik}(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{i,k=1}^{N} \varrho^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} b_{ik}(x,t_j,u_{j-1}) \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\
&-\sum_{i,k=1}^{N} \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_{j-1}}(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\
&-\sum_{i,k=1}^{N} \mu \varrho^{\mu-1} \frac{\partial \varrho}{\partial x_i} b_{ik}(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{N} \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
&+ \left(\varrho^{\nu} b_0(x,t_j,u_{j-1}) + \frac{1}{h} \right) u_j = f(x,t_j,u_{j-1}) + \frac{1}{h} u_{j-1}. \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt ein schwach elliptisches Problem für u_j dar. Es sei $u_{j-1} \in W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$ und $u_{j-1} \in B_R(U_0)$. Der Einbettungssatz 3.2.25 garantiert dann $u_{j-1} \in C^1(\overline{\Omega})$. Damit sind die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen für den Satz 3.3.6 erfüllt. Da die rechte Seite von (5.21) eine Funktion des Raumes $L_{p_0}(\Omega)$ ist, folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung $u_j \in W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$ von (5.21), falls $-h^{-1} \le \lambda_0$. (Die Bedeutung der Koefizienten a_i hat sich gegenüber 3.3.1 unwesentlich geändert.)
Damit wurde bewiesen:

Lemma 5.3.1 *Es existiert eine Konstante $h_0 > 0$, so daß für $h \le h_0$ gilt:*
Falls $u_0, u_1, \ldots, u_{j-1} \in B_R(U_0) \cap W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$ gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $u_j \in W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$ von (5.21).

Damit ist die Existenz von Funktionen u_j gesichert. Es bleibt noch zu zeigen, daß eine Konstante $T^* > 0$ existiert, so daß für $t_j \le T^*$ $u_j \in B_R(U_0)$ gilt. Dieser Nachweis wird ähnlich wie im vorigen Kapitel geführt werden.
Für diese Abschätzungen wird eine Bilinearform benötigt. Es sei

$$\begin{aligned}
a_j(u,v) := &\sum_{i,k=1}^{N} \int_{\Omega} \varrho^{\mu} b_{ik}(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega} \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial u}{\partial x_i} v\, dx \\
&+ \int_{\Omega} \varrho^{\nu} b_0(x,t_j,u_{j-1}) uv\, dx.
\end{aligned}$$

Weiterhin sei

$$\begin{aligned}
A_j u := &-\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\varrho^{\mu} b_{ik}(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) + \sum_{i=1}^{N} \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x,t_j,u_{j-1}) \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
&+ \varrho^{\nu} b_0(x,t_j,u_{j-1}) u.
\end{aligned}$$

Es ist u_j stetig und $\varrho^{\nu} u_j \in L_{p_0}(\Omega)$, aber $\varrho^{\nu} \notin L_1(\Omega)$. Daraus folgt, daß u_j stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann und es gilt $u_j(x) = 0$, falls $x \in \partial\Omega$.
Dann ist $(A_j u_j, v) = a_j(u_j, v)$, falls $v \in C^1(\Omega)$ und $v(x) = 0$ auf $\partial\Omega$.
Also gilt

$$(\delta u_j, v) + a_j(u_j, v) = (f_j, v) \quad \forall v \in C^1(\Omega), \qquad (5.22)$$

wobei v auf dem Rand Null wird und $f_j(x) := f(x,t_j,u_{j-1}(x))$. [1]
Es folgen einige Abschätzungen für die Bilinearform $a_j(u,v)$.

[1] Es ist möglich, für die Testfunktionen andere Räume als $C^1(\Omega)$ zu wählen. Dieser Gedanke wird hier allerdings nicht weiter verfolgt, da sich keine weitergehenden Erkenntnisse ergeben würden.

Satz 5.3.1 *Seien $u, v \in W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$, $p \geq 2$ und $w = |u|^{\frac{p-2}{2}}u$. Dann gilt:*

$$a_j(u,u) \geq c_1 \|u\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} - c_1' \|u\|^2_2, \tag{5.23}$$

$$a_j(u,|u|^{p-2}u) \geq \frac{c_2}{p} \|w\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} - \frac{c_2'}{p} \|w\|^2_2, \tag{5.24}$$

$$|a_j(v,|u|^{p-2}u)| \leq C \|v\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \|w\|_s^{\frac{p-2}{p}} \|w\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}, \tag{5.25}$$

$$|a_j(v,u)| \leq C \|v\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \|u\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}, \tag{5.26}$$

$$|a_j(v,|u|^{p-2}u) - a_m(v,|u|^{p-2}u)| \tag{5.27}$$

$$\leq C(|t_j - t_m| + \|u_{j-1} - u_{m-1}\|_\sigma) \|v\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \|w\|_s^{\frac{p-2}{p}} \|w\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)},$$

wobei $\frac{1}{s} > \frac{N'+1}{2N'} - \frac{1}{N}$.

Beweis Es gilt

$$\begin{aligned} a_j(u,u) &= \sum_{i,k=1}^N \int_\Omega \varrho^\mu b_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u\,dx + \int_\Omega \varrho^\nu b_0 u^2\,dx \\ &\geq C_E \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varrho^\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u\,dx + C_E \int_\Omega \varrho^\nu u^2\,dx. \end{aligned}$$

Das zweite Integral wird wie folgt abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varrho^{(\mu+\nu)/2} |a_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |u|\,dx &\leq C_1 \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varrho^{(\mu+\nu)/2-\delta} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |u|\,dx \\ &\leq C_1 \sum_{i=1}^N \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(\Omega,\varrho^\mu)} \|u\|_{L_2(\Omega,\varrho^{\nu-2\delta})}. \end{aligned}$$

Nun wird der Interpolationssatz 3.2.22 angewendet. Dabei sei

$$\begin{array}{llll} s_1 = 0, & \mu_1 = 0, & \nu_1 = 0, & p_1 = 2, \\ s_2 = 1, & \mu_2 = \mu, & \nu_2 = \nu, & p_2 = 2, \\ s_\theta = \dfrac{\nu - 2\delta}{\nu}, & \mu_\theta = \dfrac{\nu-2\delta}{\nu}\mu, & \nu_\theta = \nu - 2\delta, & p_\theta = 2. \end{array}$$

Dann ergibt sich

$$\|u\|_{L_2(\Omega,\varrho^{\nu-2\delta})} \leq C \|u\|_2^{1-\theta} \|u\|^\theta_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}.$$

Nach zweimaliger Anwendung der Youngschen Ungleichung erhält man

$$\sum_{i=1}^N \int_\Omega \varrho^{(\mu+\nu)/2} |a_i| \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| |u|\,dx \leq \varepsilon \|u\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} + C_\varepsilon \|u\|^2_2.$$

Daraus folgt (5.23).
Nun wird (5.24) gezeigt. Es ist

$$\begin{aligned} &\nabla |u|^{p-2} u = (p-1)|u|^{p-2} \nabla u = \frac{2(p-1)}{p} |w|^{\frac{p-2}{p}} \nabla w, \\ &\nabla w = \frac{p}{2} |u|^{\frac{p-2}{2}} \nabla u, \\ &|u| = |w|^{\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

Ähnlich wie in Lemma 4.2.5 folgt

$$\begin{aligned}\sum_{i,k=1}^{N}\int_{\Omega}\varrho^{\mu}b_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}|u|^{p-2}u\,dx &\geq \frac{4C_E(p-1)}{p^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\varrho^{\mu}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 dx\\ &\geq \frac{2C_E}{p}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\varrho^{\mu}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}\right)^2 dx.\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\varrho^{(\mu+\nu)/2}|a_i|\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right||u|^{p-1}\,dx &\leq \frac{C}{p}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\varrho^{(\mu+\nu)/2-\delta}\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right||w|\,dx\\ &\leq \frac{\varepsilon}{p}\|w\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^{\mu},\varrho^{\nu})}+\frac{C_\varepsilon}{p}\|w\|_2^2.\end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\int_{\Omega}u|u|^{p-2}u\,dx=\|w\|_2^2\geq\frac{1}{p}\|w\|_2^2.$$

Daraus folgt (5.24).
Es gilt

$$\begin{aligned}&|a_j(v,|u|^{p-2}u)-a_m(v,|u|^{p-2}u)|\\ &\leq \sum_{i,k=1}^{N}\underbrace{\int_{\Omega}\varrho^{\mu}|b_{ik}(x,t_j,u_{j-1})-b_{ik}(x,t_m,u_{m-1})|\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|\left|\frac{\partial}{\partial x_i}|u|^{p-2}u\right|dx}_{I_1}\\ &+\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\int_{\Omega}\varrho^{(\mu+\nu)/2}|a_i(x,t_j,u_{j-1})-a_i(x,t_m,u_{m-1})|\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right||u|^{p-1}\,dx}_{I_2}\\ &+\underbrace{\int_{\Omega}\varrho^{\nu}|b_0(x,t_j,u_{j-1})-b_0(x,t_m,u_{m-1})|\,|v|\,|u|^{p-1}\,dx.}_{I_3}\end{aligned}$$

Nun ist mit $\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{s_1}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{p_0}+\frac{1}{s_2}=1$ und $\frac{1}{\beta_0}+\frac{1}{p_0}+\frac{1}{s_3}=1$

$$\begin{aligned}I_1 &\leq C\int_{\Omega}\underbrace{|b_{ik}(x,t_j,u_{j-1})-b_{ik}(x,t_m,u_{m-1})|}_{\beta_1}\underbrace{\left|\frac{\partial v}{\partial x_k}\right|}_{\infty}\underbrace{|w|^{\frac{p-2}{p}}}_{s_1}\underbrace{\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right|\varrho^{\frac{\mu}{2}}}_{2}\,dx\\ &\leq C(|t_j-t_m|+\|u_{j-1}-u_{m-1}\|_{\sigma})\,\|v\|_{C^1}\,\|w\|^{\frac{p-2}{p}}_{s_1\frac{p-2}{p}}\,\|w\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^{\mu},\varrho^{0})},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &\leq \int_{\Omega}\underbrace{|a_i(x,t_j,u_{j-1})-a_i(x,t_m,u_{m-1})|}_{\alpha_1}\underbrace{\varrho^{(\mu+\nu)/2}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|}_{p_0}\underbrace{|w|^{2\frac{p-1}{p}}}_{s_2}\,dx\\ &\leq C(|t_j-t_m|+\|u_{j-1}-u_{m-1}\|_{\sigma})\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0(\mu+\nu)/2})}\|w\|^{2\frac{p-1}{p}}_{2s_2\frac{p-1}{p}},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &\le \int_\Omega \underbrace{|b_0(x,t_j,u_{j-1}) - b_0(x,t_m,u_{m-1})|}_{\beta_0} \underbrace{|\varrho^\nu v|}_{p_0} \underbrace{|w|^{2\frac{p-1}{p}}}_{s_3}\, dx \\
&\le C(|t_j - t_m| + \|u_{j-1} - u_{m-1}\|_\sigma)\, \|v\|_{L_{p_0}(\Omega,\varrho^{\nu p_0})} \|w\|^{2\frac{p-1}{p}}_{2s_3\frac{p-1}{p}}\,.
\end{aligned}
$$

Wegen (5.12), (5.14), (5.16) gilt

$$
s := \max(s_1, 2s_2, 2s_3) < \left(\frac{N'+1}{2N'} - \frac{1}{N}\right)^{-1}.
$$

Aus den Sätzen 3.2.20, 3.2.25 folgt dann (5.27).[2]
Die Ungleichung (5.25) wird ähnlich bewiesen. Der Beweis von (5.26) wird ähnlich wie der Beweis einer analogen Aussage im Beweis von Satz 4.2.1 geführt. Siehe auch den Beweis von (5.23). ■
Nun stehen alle Hilfsmittel für den Beweis des folgenden Satzes zur Verfügung:

Satz 5.3.2 *Es existieren Konstanten $K > 0$, $h_0 > 0$, $0 < T^* \le T$, so daß für alle $h \le h_0$ und alle $t_j \le T^*$ gilt:*

$$
u_j \in B_R(U_0), \quad \|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \le K.
$$

Der Beweis beruht auf einigen Hilfssätzen.

Lemma 5.3.2 *Es existieren $h_0 > 0, C > 0$, so daß gilt:*
Falls $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1} \in B_R(U_0)$, dann ist $\|u_i\|_2 \le C$.

Beweis Der Beweis wird ähnlich wie der Beweis zu Lemma 4.19 geführt.
Für jede Funktion $v \in C^1(\Omega)$, die auf $\partial\Omega$ verschwindet, gilt

$$
(\delta u_j, v) + a_j(u_j, v) = (f_j, v)\,, \quad j = 1, \ldots, i.
$$

Es sei $v = u_j$. Dann folgt

$$
(u_j - u_{j-1}, u_j) + ch\,\|u_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le h\,\|f_j\|_2\,\|u_j\|_2 + Ch\,\|u_j\|_2^2\,,
$$

nach Summation ($j = 1, \ldots, i$) und Anwendung der Youngschen Ungleichung ergibt sich

$$
\|u_i\|_2^2 - \|u_0\|_2^2 + ch \sum_{j=1}^{i} \|u_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le C_f + Ch \sum_{j=1}^{i} \|u_j\|_2^2\,.
$$

Aus dem Gronwallschen Lemma ergibt sich die Behauptung. ■
Für den Beweis des folgenden Satzes siehe auch Satz 4.2.4.

Satz 5.3.3 *Es existiert eine monoton wachsende Funktion $M(t)$ mit $M(0) = 0$, so daß $\|u_j - U_0\|_\infty \le M(t_j)$, falls $h \le h_0$ und $u_{j-1} \in B_R(U_0)$.*

Beweis Es sei $z_j = u_j - U_0$, dann ist $\delta z_j = \delta u_j$ und

$$
(\delta z_j, v) + a_j(z_j, v) = (f_j, v) - a_j(U_0, v)
$$

[2] Die Einbettungskonstanten der hierbei verwendeten Einbettungssätze können unabhängig von p gewählt werden.

für jede Funktion $v \in C^1(\Omega)$ mit verschwindenden Randwerten. Für $p \geq 2$ sei $v = |z_j|^{p-2} z_j$ und $w_j = |z_j|^{\frac{p-2}{2}} z_j$. Dann folgt

$$\frac{1}{h}\left(z_j, |z_j|^{p-2} z_j\right) - \frac{1}{h}\left(z_{j-1}, |z_j|^{p-2} z_j\right) + \frac{c_2}{p}\|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$$
$$\leq \|f_j\|_\varphi \left\||z_j|^{p-1}\right\|_{\varphi'} + C\|U_0\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \|w_j\|_s^{\frac{p-2}{p}} \|w_j\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + \frac{c_2'}{p}\|w_j\|_2^2 .$$

Ähnlich wie im Beweis zu Satz 4.2.4 läßt sich zeigen:

$$\frac{1}{ph}\left(\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2\right) + \frac{c}{p}\|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$$
$$\leq \|f_j\|_\varphi \|w_j\|_{2\varphi'}^{2\frac{p-1}{p}} + C\|w_j\|_s^{\frac{p-2}{p}} \|w_j\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + \frac{C}{p}\|w_j\|_2^2 .$$

Wegen $u_{j-1} \in B_R(U_0)$ gilt $\|f_j\|_\varphi \leq C_f$. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{ph}\left(\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2\right) + \frac{c}{p}\|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$$
$$\leq C\|w_j\|_{2\varphi'}^{2\frac{p-1}{p}} + C_\varepsilon p\|w_j\|_s^{2\frac{p-2}{p}} + \frac{\varepsilon}{p}\|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + \frac{C}{p}\|w_j\|_2^2 .$$

Daraus erhält man

$$\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2 + ch\|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$$
$$\leq Cph\|w_j\|_{2\varphi'}^{2\frac{p-1}{p}} + Cp^2h\|w_j\|_s^{2\frac{p-2}{p}} + Ch\|w_j\|_2^2 .$$

Wenn $g(x) := \varrho^\mu(x)$ gesetzt wird, dann stimmen die Normen $\|.\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}$ und $\|.\|_{2,1,g}$ überein.
Die Normen auf der rechten Seite können also wie im Satz 4.2.4 abgeschätzt werden. Dies ist möglich, da $N' > N$ und $\varrho^0(x) \leq C\varrho^\nu(x)$. Schließlich ist

$$2 \leq s < \frac{r_1 N}{N - r_1}, \quad \text{da} \quad \frac{1}{s} > \frac{N'+1}{2N'} - \frac{1}{N}.$$

Dann gilt mit einem von p unabhängigen $1 < q < r_1$

$$\frac{1}{h}\left(\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2\right) + c\|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \leq Cp^{\sigma_M}\left(\|w_j\|_q^{2\beta_1} + \|w_j\|_q^{2\beta_2} + \|w_j\|_q^2\right),$$

wobei σ_M eine von p, h unabhängige Konstante bezeichnet und $\beta_1 = \beta_1(p) = \frac{p-1}{p+\bar\sigma}$, $\beta_2 = \beta_2(p) = \frac{p-2}{p+2\bar\sigma}$.
Nun sei für $k = 0, 1, 2\ldots$ $p_k = 2\left(\frac{2}{q}\right)^k$, $\beta_{1,k} = \beta_1(p_k) = \frac{p_k-1}{p_k+\bar\sigma}$, $\beta_{2,k} = \beta_2(p_k) = \frac{p_k-2}{p_k+2\bar\sigma}$ und $m_{j,k} = \max_{1\leq l\leq j}\|z_l\|_{p_k}$.
Dann folgt auf gleiche Weise wie im Beweis zu Satz 4.2.4

$$\limsup_{k\to\infty} m_{j,k} \leq cQ_{\gamma_1,\gamma_2}(t_j) m_{j,0}^{\beta_0}.$$

Es ist $m_{j,0} = \max_{1\leq l\leq j}\|u_l - U_0\|_2 \leq \max_{1\leq l\leq j}\|u_l\|_2 + \|U_0\|_2 \leq C(t_j) \leq C$.
Aus dem Lemma 3.2.2 folgt dann

$$\|u_j - U_0\|_\infty \leq CQ_{\gamma_1,\gamma_2}(t_j) =: M(t_j).$$

Diese Funktion M besitzt die geforderten Eigenschaften. ■.

Folgerung 5.3.1 *Die Aussage dieses Satzes kann verallgemeinert werden:*
Sei $u_1, \ldots, u_{i-1} \in B_R(U_0)$, $0 \leq k < i-1$, $\|u_k\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \leq C$.
Dann gilt $\|u_j - u_k\|_\infty \leq M(t_j - t_k)$ *für* $k \leq j \leq i$.

Beweis Der Beweis verläuft fast völlig analog zu obigen Satz. Lediglich die im Folgenden erwähnten Stellen sind anzupassen:
Sei $z_j := u_j - u_k$, $w_j := |z_j|^{\frac{p-2}{2}} z_j$. Dann folgt nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{h}\left(\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2\right) + c\,\|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \leq Cp^{\sigma_M}\left(\|w_j\|_q^{2\beta_1} + \|w_j\|_q^{2\beta_2} + \|w_j\|_q^2\right).$$

Nun wird summiert ($j = k+1, \ldots, i$), $w_k = 0$, es ergibt sich

$$\|z_i\|_p^p \leq c(t_i - t_k)p^{\sigma_M} \max_{k \leq j \leq i}(\|z_j\|^{\beta_1 p}_{pq/2} + \|z_j\|^{\beta_2 p}_{pq/2} + \|z_j\|^p_{pq/2}).$$

Sei nun $m_{i,l} := \max_{k \leq j \leq i}\|z_j\|_{p_l}$, dann folgt

$$\limsup_{l\to\infty} m_{i,l} \leq cQ_{\gamma_1,\gamma_2}(t_j - t_k)m^{\beta_0}_{i,0}.$$

■

Nun wird noch eine Abschätzung der Differenzenquotienten $\|\delta u_j\|_{p_0}$ benötigt. Diese Abschätzung wird bei der Untersuchung von $\|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})}$ verwendet.

Satz 5.3.4 *Sei* $K > 0$ *gegeben.*
Dann existiert eine Konstante $h_0 > 0$ *und von* h *und* K *unabhängige Konstanten* c_1, c_2, c_3, γ, *so daß gilt:*
Falls $h \leq h_0$, $\|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \leq K$ *für* $0 \leq j \leq i-1$, *dann ist*

$$\|\delta u_j\|_{p_0}^{p_0} \leq \frac{1}{1 - hc_2K^\gamma}(c_1 + c_3 t_j)\exp\left(t_{j-1}\frac{c_2K^\gamma}{1-hc_2K^\gamma}\right) =: S_K(h, t_{j-1}), \quad 1 \leq j \leq i.$$

Beweis Für jede Funktion $v \in C^1(\Omega)$ mit verschwindenden Randwerten gilt

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}, v) + ha_j(\delta u_j, v) = (f_j - f_{j-1}, v) + a_{j-1}(u_{j-1}, v) - a_j(u_{j-1}, v), \quad j = 2, \ldots, i.$$

Sei $v = |\delta u_j|^{p_0-2}\delta u_j$, $w_j = |\delta u_j|^{\frac{p_0-2}{2}}\delta u_j$. Dann folgt (vgl. ähnliche Abschätzungen im Satz 4.2.4)

$$a_j(\delta u_j, |\delta u_j|^{p_0-2}\delta u_j) \geq \frac{C_2}{p_0}\|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} - \frac{C_2'}{p_0}\|w_j\|_2^2,$$

$$\begin{aligned}\left(f_j - f_{j-1}, |\delta u_j|^{p_0-2}\delta u_j\right) &\leq \|f_j - f_{j-1}\|_\varphi \left\||\delta u_j|^{p_0-1}\right\|_{\varphi'} \\ &\leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma)\,\|w_j\|^{2\frac{p_0-1}{p_0}}_{2\varphi'\frac{p_0-1}{p_0}} \\ &\leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma)\,\|w_j\|^{2\frac{p_0-1}{p_0}}_{2\varphi'},\end{aligned}$$

$$\left(\delta u_j - \delta u_{j-1}, |\delta u_j|^{p_0-2}\delta u_j\right) \geq \frac{1}{p_0}\left(\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2\right),$$

$$
\begin{aligned}
&a_{j-1}(u_{j-1}, |\delta u_{j-1}|^{p_0-2}\delta u_j) - a_j(u_{j-1}, |\delta u_{j-1}|^{p_0-2}\delta u_j) \\
&\leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma) \|u_{j-1}\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \|w_j\|_s^{\frac{p_0-2}{p_0}} \|w_j\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}.
\end{aligned}
$$

Dann ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2 + ch \|w_j\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} \\
&\leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma) \|w_j\|_{2\varphi'}^{2\frac{p_0-1}{p_0}} + Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma) K \|w_j\|_s^{\frac{p_0-2}{p_0}} \|w_j\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} \\
&+ Ch \|w_j\|_2^2 .
\end{aligned}
$$

Nun gilt

$$
\underbrace{(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma)}_{p_0} \underbrace{\|w_j\|_{2\varphi'}^{2\frac{p_0-1}{p_0}}}_{\frac{p_0}{p_0-1}} \leq C(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^{p_0}) + C \|w_j\|_{2\varphi'}^2 ,
$$

$$
\underbrace{1}_{p_0} \underbrace{K \|w_j\|_s^{\frac{p_0-2}{p_0}}}_{\frac{2p_0}{p_0-2}} \underbrace{\|w_j\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}}_{2} \leq \varepsilon \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C_\varepsilon K^\gamma \|w_j\|_s^2 + C,
$$

$$
\underbrace{\|\delta u_{j-1}\|_\sigma}_{p_0} \underbrace{K \|w_j\|_s^{\frac{p_0-2}{p_0}}}_{\frac{2p_0}{p_0-2}} \underbrace{\|w_j\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}}_{2} \leq \varepsilon \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^{p_0} + C_\varepsilon K^\gamma \|w_j\|_s^2 ,
$$

also folgt

$$
\begin{aligned}
&\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2 + ch \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \\
&\leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^{p_0} + \|w_j\|_{2\varphi'}^2 + K^\gamma \|w_j\|_s^2 + \|w_j\|_2^2).
\end{aligned}
$$

Auf einige der Normen der rechten Seite wird Lemma 3.2.7 angewandt, vgl. auch den Beweis zu Satz 4.2.4. Dann gilt mit einer geeigneten Konstanten γ'

$$
\begin{aligned}
&\|w_j\|_{2\varphi'}^2 \leq \varepsilon \|w_j\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C_\varepsilon \|w_j\|_q^2 , \quad 1 < q < r_1, \\
&K^\gamma \|w_j\|_s^2 \leq \varepsilon \|w_j\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C_\varepsilon K^{\gamma'} \|w_j\|_q^2 .
\end{aligned}
$$

Hierbei hängt C_ε nicht von K ab, vgl. den Beweis zu Lemma 3.2.7. Dann folgt (es ist $q < 2$ und es sei o.B.d.A. $K > 1$)

$$
\|w_j\|_2^2 - \|w_{j-1}\|_2^2 + ch \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^{p_0} + K^{\gamma'} \|w_j\|_2^2).
$$

Nun ist $\|\delta u_{j-1}\|_\sigma^{p_0} = \|w_j\|^2_{\frac{2\sigma}{p_0}}$. Summation $(j = 2, \ldots, i)$ ergibt

$$
\|w_i\|_2^2 - \|w_1\|_2^2 + ch \sum_{j=2}^{i} \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \leq Ct_i + Ch \sum_{j=1}^{i-1} \|w_j\|^2_{\frac{2\sigma}{p_0}} + CK^{\gamma'} h \sum_{j=2}^{i} \|w_j\|_2^2 .
$$

Wegen $\frac{p_0}{2\sigma} > \frac{N'+1}{2N'} - \frac{1}{N}$ ist

$$
\|w_j\|^2_{\frac{2\sigma}{p_0}} \leq \varepsilon \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C_\varepsilon \|w_j\|_q^2 \leq \varepsilon \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C \|w_j\|_2^2 ,
$$

also

$$\|w_i\|_2^2 - \|w_1\|_2^2 + ch \sum_{j=2}^{i} \|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le Ct_i + \varepsilon h \|w_1\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + CK^{\gamma'} h \sum_{j=2}^{i} \|w_j\|_2^2 .$$

Nun ist noch $\|w_1\|_2^2 + h\|w_1\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$ abzuschätzen. Dazu wird die Testfunktion $v = |\delta u_1|^{p_0-2}\delta u_1$ verwendet, $w_1 = |\delta u_1|^{\frac{p_0-2}{2}}\delta u_1$. Dann folgt

$$\|\delta u_1\|_{p_0}^{p_0} + ha_1(\delta u_1, |\delta u_1|^{p_0-2}\delta u_1) = \big(f_1, |\delta u_1|^{p_0-2}\delta u_1\big) - a_1(U_0, |\delta u_1|^{p_0-2}\delta u_1).$$

Es ist

$$\begin{aligned}
&- a_1(U_0, v) = -(A_1U_0, v)\\
&= \sum_{i,k=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varrho^\mu b_{ik}(x,t_1,U_0)\frac{\partial U_0}{\partial x_k}\right) v\,dx - \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x,t_1,U_0)\frac{\partial U_0}{\partial x_i} v\,dx\\
&- \int_\Omega \varrho^\nu b_0(x,t_1,U_0)U_0 v\,dx\\
&\le \|A_1U_0\|_{p_0}\|v\|_{p_0'} \le \underbrace{C\|U_0\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})}}_{p_0}\underbrace{\|\delta u_1\|_{p_0}^{p_0-1}}_{\frac{p_0}{p_0-1}}\\
&\le C_\varepsilon + \varepsilon\|\delta u_1\|_{p_0}^{p_0}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist C_ε unabhängig von K. Weiterhin ist (da $\varphi \ge p_0$)

$$\big(f_1, |\delta u_1|^{p_0-2}\delta u_1\big) \le \|f_1\|_{p_0}\,\big\||\delta u_1|^{p_0-1}\big\|^{p_0-1}_{\frac{p_0}{p_0-1}} \le C_\varepsilon\|f_1\|_{p_0}^{p_0} + \varepsilon\|w_1\|_2^2$$

und

$$ha_1(\delta u_1, |\delta u_1|^{p_0-2}\delta u_1) \ge ch\|w_1\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} - C'h\|w_1\|_2^2 .$$

Dann folgt

$$(1-2\varepsilon)\|w_1\|_2^2 + ch\|w_1\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le C + C'h\|w_1\|_2^2 .$$

Falls h_0 so klein gewählt ist, daß $1 - 2\varepsilon - C'h_0 > 0$, dann gilt

$$\|w_1\|_2^2 + h\|w_1\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le C.$$

Diese Konstante ist von K unabhängig.
Damit ist die gewünschte Abschätzung für $\|w_1\|_2^2 + h\|w_1\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}$ erzielt, es folgt (γ sei generische Konstante)

$$\|w_i\|_2^2 + ch\sum_{j=1}^{i}\|w_j\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} \le c_1 + c_3t_i + c_2K^\gamma h\sum_{j=1}^{i}\|w_j\|_2^2 .$$

Die Konstanten c_1, c_2, c_3 hängen nicht K, i, h ab. Aus dem Gronwallschen Lemma folgt dann

$$\|w_i\|_2^2 \le \frac{1}{1-c_2K^\gamma h}(c_1+c_3t_i)\exp\left(t_{i-1}\frac{c_2K^\gamma}{1-c_2K^\gamma h}\right),$$

falls $1 - c_2K^\gamma h_0 > 0$. Wegen $\|\delta u_i\|_{p_0}^{p_0} = \|w_i\|_2^2$ folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 5.3.1 *Es ist $S_K(h, t_{i-1}) \leq S_K(h_0, t_{i-1})$. Es existiert eine von K unabhängige Schranke für $S_K(h_0, 0)$, falls $1 - c_2 K^\gamma h_0 \geq \frac{1}{2}$.*

Nun stehen die nötigen Hilfsmittel für die Abschätzung von $\|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})}$ bereit.

Satz 5.3.5 *Es existieren Konstanten $K, 0 < T^* \leq T, h_0$, so daß gilt:*

1. *Es ist $\|U_0\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} < K$.*
2. *Falls $h \leq h_0$, $u_0, \dots, u_{j-1} \in B_R(U_0)$, $\|u_l\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \leq K$ $(l = 0, 1, \dots, j-1)$ und $t_j < T^*$, dann ist auch $\|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \leq K$.*

Beweis Es gilt

$$\delta u_j - \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varrho^\mu b_{ik}(x, t_j, u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{N} \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x, t_j, u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$
$$+ \varrho^\nu b_0(x, t_j, u_{j-1})u_j = f(x, t_j, u_{j-1}).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&- \sum_{i,k=1}^{N} \varrho^\mu b_{ik}(x, t_j, u_{j-1})\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \\
&- \sum_{i,k=1}^{N} \mu\varrho^{\mu-1}\frac{\partial \varrho}{\partial x_i} b_{ik}(x, t_j, u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{N} \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x, t_j, u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
&+ \varrho^\nu b_0(x, t_j, u_{j-1})u_j \\
&= f(x, t_j, u_{j-1}) - \delta u_j + \sum_{i,k=1}^{N} \varrho^\mu \frac{\partial b_{ik}}{\partial u}\frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}.
\end{aligned}$$

Die A-Priori-Abschätzung des Satzes 3.3.1 kann hier noch nicht angewendet werden, da die Konstante C_1 dieses Satzes von $\|b_{ik}\|_{C^1}$, also von $\|u_{j-1}\|_{C^1}$ und somit von K abhinge. Deshalb sind noch einige Umformungen erforderlich:

$$\begin{aligned}
&- \sum_{i,k=1}^{N} \varrho^\mu b_{ik}(x, t_j, U_0)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \\
&- \sum_{i,k=1}^{N} \mu\varrho^{\mu-1}\frac{\partial \varrho}{\partial x_i} b_{ik}(x, t_j, u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{N} \varrho^{(\mu+\nu)/2} a_i(x, t_j, u_{j-1})\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\
&+ \varrho^\nu b_0(x, t_j, U_0)u_j \\
&= f(x, t_j, u_{j-1}) - \delta u_j + \sum_{i,k=1}^{N} \varrho^\mu \frac{\partial b_{ik}}{\partial u}\frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \\
&+ \sum_{i,k=1}^{N} \varrho^\mu (b_{ik}(x, t_j, u_{j-1}) - b_{ik}(x, t_j, U_0))\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \\
&+ \varrho^\nu (b_0(x, t_j, U_0) - b_0(x, t_j, u_{j-1}))u_j.
\end{aligned}$$

Dann gilt mit einem geeigneten $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
&C_1 \left\| u_j \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \\
&\leq \left\| f(x,t_j,u_{j-1}) \right\|_{p_0} + \left\| \delta u_j \right\|_{p_0} + \sum_{i,k=1}^{N} \left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\|_{p_0} \\
&+ \sum_{i,k=1}^{N} \left\| \varrho^{\mu} (b_{ik}(x,t_j,u_{j-1}) - b_{ik}(x,t_j,U_0)) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{p_0} \\
&+ \left\| \varrho^{\nu} (b_0(x,t_j,U_0) - b_0(x,t_j,u_{j-1})) u_j \right\|_{p_0} + |\lambda| \left\| u_j \right\|_{p_0}.
\end{aligned}$$

Die Konstante C_1 hängt jetzt nicht von K ab.
Die Summanden der rechten Seite werden nun einzeln untersucht:
Wegen $p_0 \leq \varphi$ und $u_{j-1} \in B_R(U_0)$ ist $\left\| f(x,t_j,u_{j-1}) \right\|_{p_0} \leq C$.
Weiterhin ist $\left\| \delta u_j \right\|_{p_0} \leq (S_K(h_0,t_{j-1}))^{\frac{1}{p_0}}$.
Es gilt

$$\left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\|_{p_0} \leq \left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \frac{\partial (u_j - U_0)}{\partial x_k} \right\|_{p_0} + \left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right\|_{p_0}.$$

Nun ist

$$\left\| \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \right\|_{\infty} \leq C, \quad \left\| \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \leq \left\| u_{j-1} \right\|_{C^1} \leq C \left\| u_{j-1} \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \leq CK.$$

Zunächst wird $\left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial (u_j - U_0)}{\partial x_k} \right\|_{p_0} \leq \left\| \frac{\partial (u_j - U_0)}{\partial x_k} \right\|_{L_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu})}$ abgeschätzt.
Hierfür wird der Interpolationssatz 3.2.22 mit $\theta = \frac{1}{2}$ und

$$\begin{array}{llll}
s_1 = 2, & \mu_1 = p_0\mu, & \nu_1 = p_0\nu, & p_1 = p_0, \\
s_2 = 0, & \mu_2 = 0, & \nu_2 = 0, & p_2 = p_0, \\
s_\theta = 1, & \mu_\theta = \frac{p_0}{2}\mu, & \nu_\theta = \frac{p_0}{2}\nu, & p_\theta = p_0,
\end{array}$$

genutzt. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial (u_j - U_0)}{\partial x_k} \right\|_{L_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu})} &\leq \left\| u_j - U_0 \right\|_{W^1_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^0)} \leq C \left\| u_j - U_0 \right\|_{W^1_{p_0}\left(\Omega,\varrho^{p_0\mu/2},\varrho^{p_0\nu/2}\right)} \\
&\leq C \left(\left\| u_j - U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| u_j - U_0 \right\|_{p_0}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \varepsilon \left\| u_j - U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} + \frac{C}{\varepsilon} \left\| u_j - U_0 \right\|_{p_0}.
\end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right\|_{p_0} \leq \left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial (u_{j-1} - U_0)}{\partial x_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right\|_{p_0} + \left\| \varrho^{\mu} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial U_0}{\partial x_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right\|_{p_0}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&\left\| \varrho^\mu \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial (u_{j-1} - U_0)}{\partial x_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right\|_{p_0} \leq C \left\| u_{j-1} - U_0 \right\|_{W^1_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu/2}, \varrho^{p_0\nu/2})} \\
&\leq C \left(\left\| u_{j-1} - U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| u_{j-1} - U_0 \right\|_{p_0}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(K + C(U_0))^{\frac{1}{2}} \left\| u_{j-1} - U_0 \right\|_\infty^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C(K + C)^{\frac{1}{2}} M(t_{j-1})^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

und

$$\left\| \varrho^\mu \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial U_0}{\partial x_i} \frac{\partial U_0}{\partial x_k} \right\|_{p_0} \leq C \left\| U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \leq C.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,k=1}^N \left\| \varrho^\mu \frac{\partial b_{ik}}{\partial u} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\|_{p_0} \\
&\leq \varepsilon K C \left\| u_j - U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} + \frac{CK}{\varepsilon} \left\| u_j - U_0 \right\|_{p_0} + C(K + C)^{\frac{1}{2}} M(t_j)^{\frac{1}{2}} + C \\
&\leq \varepsilon K C \left\| u_j \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} + \varepsilon K C \left\| U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} + \frac{CK}{\varepsilon} M(t_j) + C(K + C)^{\frac{1}{2}} M(t_j)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Da $\frac{\partial b_{ik}}{\partial u}$ und $\frac{\partial b_0}{\partial u}$ stetig und beschränkt sind, folgt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,k=1}^N \left\| \varrho^\mu (b_{ik}(x, t_j, u_{j-1}) - b_{ik}(x, t_j, U_0)) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{p_0} \\
&+ \left\| \varrho^\nu (b_0(x, t_j, U_0) - b_0(x, t_j, u_{j-1})) u_j \right\|_{p_0} \\
&\leq C \left\| u_{j-1} - U_0 \right\|_\infty \left\| u_j \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \leq C M(t_{j-1}) \left\| u_j \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})}.
\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$|\lambda| \left\| u_j \right\|_{p_0} \leq C \left\| u_j - U_0 \right\|_\infty + C \left\| U_0 \right\|_\infty \leq C M(t_j) + C.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
&C_1 \left\| u_j \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \\
&\leq C_2 + (S_K(h_0, t_{j-1}))^{\frac{1}{p_0}} + \varepsilon K C_3 \left\| u_j \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} + \varepsilon K C_3 \left\| U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \\
&+ \frac{C_4 K}{\varepsilon} M(t_j) + C_5 (K + C_6)^{\frac{1}{2}} M(t_j)^{\frac{1}{2}} + C_7 M(t_j) \left\| u_j \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})}
\end{aligned}$$

Hierbei hängen $C_1, \ldots, C_7$ nicht von K, h, t_j ab. Es ist (o.B.d.A. sei $h_0 \leq 1$)

$$S_K(h_0, 0) = \frac{c_1 + c_3 h_0}{1 - c_2 K^\gamma h_0} \leq \frac{c_1 + c_3}{1 - c_2 K^\gamma h_0}.$$

Nun wird K gewählt.
Sei $K > 1$, $\left\| U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} < K$,

$$C_2 + \left(\frac{c_1 + c_3}{\frac{1}{2}} 2 \right)^{\frac{1}{p_0}} + \frac{C_1}{4} \left\| U_0 \right\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} < \frac{C_1}{8} K.$$

Dann sei $1 \geq h_0 > 0$ so gewählt, daß $1 - c_2 K^\gamma h_0 \geq \frac{1}{2}$.
Sei nun $\varepsilon > 0$ so, daß $\varepsilon K C_3 \leq \frac{C_1}{4}$.
Nun wird $0 < T^* \leq T$ so bestimmt, daß

$$\begin{aligned}
&\frac{c_1 + c_3 T^*}{\frac{1}{2}} \exp\left(T^* \frac{c_2 K^\gamma}{1 - c_2 K^\gamma h_0}\right) < 4(c_1 + c_3),\\
&\frac{C_4 K}{\varepsilon} M(T^*) + C_5 (K + C_6)^{\frac{1}{2}} M(T^*)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_1}{4} K,\\
&C_7 M(T^*) \leq \frac{C_1}{8}.
\end{aligned}$$

Dann ist $S_K(h_0, t_{j-1}) < 4(c_1 + c_3)$ und es folgt

$$\begin{aligned}
&C_1 \|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})}\\
&\leq C_2 + (4(c_1 + c_3))^{\frac{1}{p_0}} + \frac{C_1}{4} \|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} + \frac{C_1}{4} \|U_0\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})}\\
&+ \frac{C_1 K}{4} + \frac{C_1}{8} \|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \leq \frac{3}{8} C_1 K + \frac{3}{8} C_1 \|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})}.
\end{aligned}$$

also $\|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} < K$. ■
Damit ist der Satz 5.3.2 bewiesen.
Nun wird eine weitere A–priori–Abschätzung für δu_j hergeleitet:

Satz 5.3.6 *Für $h \leq h_0, t_i \leq T^*$ gilt*

$$h \sum_{j=1}^{i} \|\delta u_j\|^2_{W^1_2(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)} \leq C.$$

Beweis Es ist

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}, v) + h a_j(\delta u_j, v) = (f_j - f_{j-1}, v) + a_{j-1}(u_{j-1}, v) - a_j(u_{j-1}, v), \quad j = 2, \ldots, i.$$

Die Abschätzungen, die sich bei der Wahl $v = |\delta u_j|^{p_0 - 2} \delta u_j$ ergeben, wurden im Beweis zu Satz 5.3.4 ausführlich diskutiert. Mit $w_j := |\delta u_j|^{\frac{p_0 - 2}{2}} \delta u_j$ ergab sich

$$\|w_i\|_2^2 + ch \sum_{j=1}^{i} \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)} \leq c_1 + c_3 t_i + c_2 h K^\gamma \sum_{j=1}^{i} \|w_j\|_2^2,$$

also $\|w_i\|_2 \leq C$ und $ch \sum_{j=1}^{i} \|w_j\|^2_{W^1_2(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)} \leq C$.
Nun wird die Testfunktion $v = \delta u_j$ gewählt. Es folgt

$$(\delta u_j - \delta u_{j-1}, \delta u_j) \geq \frac{1}{2} \left(\|\delta u_j\|_2^2 - \|\delta u_{j-1}\|_2^2\right),$$

$$h a_j(\delta u_j, \delta u_j) \geq ch \|\delta u_j\|^2_{W^1_2(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)} - c' h \|\delta u_j\|_2^2,$$

$$\begin{aligned}
&|a_{j-1}(u_{j-1}, \delta u_j) - a_j(u_{j-1}, \delta u_j)|\\
&\leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma) \|u_{j-1}\|_{W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})} \|\delta u_j\|_{W^1_2(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^0)}\\
&\leq C(\varepsilon, K) h \left(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^2\right) + \varepsilon h \|\delta u_j\|_{W^1_2(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^0)},
\end{aligned}$$

$$(f_j - f_{j-1}, \delta u_j) \leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma) \|\delta u_j\|_{\varphi'} \leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^2) + h \|\delta u_j\|_{\varphi'}^2$$
$$\leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^2) + C_\varepsilon h \|\delta u_j\|_2^2 + \varepsilon h \|\delta u_j\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}^2 .$$

Dann folgt

$$\|\delta u_j\|_2^2 - \|\delta u_{j-1}\|_2^2 + ch \|\delta u_j\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2 \leq Ch(1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^2 + \|\delta u_j\|_2^2).$$

Es gilt $\|\delta u_{j-1}\|_\sigma^2 \leq 1 + \|\delta u_{j-1}\|_\sigma^{p_0}$ und

$$\|\delta u_{j-1}\|_\sigma^{p_0} = \|w_{j-1}\|_{\frac{2\sigma}{p_0}}^2 \leq C \|w_{j-1}\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}^2 + C \|w_{j-1}\|_2^2 .$$

Summation $(j = 2, \ldots, i)$ liefert zusammen mit den Abschätzungen $\|w_j\|_2 \leq C$, $\|\delta u_j\|_2 \leq C$ und $ch \sum_{j=1}^i \|w_j\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2 \leq C$

$$\|\delta u_i\|_2^2 - \|\delta u_1\|_2^2 + ch \sum_{j=2}^i \|\delta u_j\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2 \leq Ct_i.$$

Nun ist noch $h \|\delta u_1\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2$ abzuschätzen.
Es ist

$$(\delta u_1, \delta u_1) + ha_1(\delta u_1, \delta u_1) = (f_1, \delta u_1) - a_1(U_0, \delta u_1).$$

Weiterhin gilt

$$a_1(U_0, \delta u_1) \leq \|A_1 U_0\|_2 \|\delta u_1\|_2 \leq C, \quad (f_1, \delta u_1) \leq \|f_1\|_2 \|\delta u_1\|_2 \leq C,$$

also $h \|\delta u_1\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2 \leq C$.
Daraus ergibt sich

$$\|\delta u_i\|_2^2 + ch \sum_{j=1}^i \|\delta u_j\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2 \leq C.$$

Das ist die Behauptung. ■
Die A–priori–Abschätzungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:
Für $h \leq h_0, t_j \leq T^*$ gilt

$$\begin{aligned} \|u_j - U_0\|_\infty &\leq M(t_j), \\ \|\delta u_j\|_{p_0} &\leq C, \\ h \sum_{l=1}^j \|\delta u_l\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2 &\leq C, \\ \|u_j\|_{W_{p_0}^2(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} &\leq K. \end{aligned}$$

Gemäß Folgerung 5.3.1 erhält man sogar

$$\|u_j - u_k\|_\infty \leq M(t_j - t_k), \quad 0 \leq t_k \leq t_j \leq T^*.$$

5.4 Konvergenzeigenschaften

Sei

$$u^n(x,t) := u_{i-1}(x) + (t-t_{i-1})\delta u_i(x) = \frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} u_{i-1}(x) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} u_i(x), \quad (t_{i-1} < t \le t_i),$$

$$\overline{u}^n(x,t) := \begin{cases} u_i(x) & : t_{i-1} < t \le t_i, \\ 0 & : t \le 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u_t^n\|_{p_0} &\le C, \\ \|u^n(.,t) - \overline{u}^n(.,t)\|_{p_0} &\le Ch_n, \\ \|\overline{u}^n(.,t) - \overline{u}^n(.,t-h_n)\|_{p_0} &\le Ch_n, \\ \|\overline{u}^n(.,t) - \overline{u}^n(.,t-h_n)\|_{\infty} &\le Ch_n^\gamma, \\ \|u^n(.,t) - \overline{u}^n(.,t-h_n)\|_{\infty} &\le Ch_n^\gamma, \\ \|\overline{u}^n(.,t)\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} &\le K, \\ \|u^n(.,t)\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} &\le K, \\ \|u_t^n\|_{L_2(I^*,W^1_2(\Omega,\varrho^{\mu},\varrho^{\nu}))} &\le C. \end{aligned}$$

Es gilt folgender Konvergenzsatz:

Satz 5.4.1 *Es existiert eine Funktion $u \in C(I^*, L_{p_0}(\Omega))$, so daß*

$$u^n \xrightarrow{C(I^*,L_{p_0}(\Omega))} u.$$

Beweis Im Sinne linksseitiger Zeitableitungen gilt

$$u_t^n + \overline{A}^n \overline{u}^n = \overline{f}^n,$$

wobei $(t_{j-1} < t \le t_j)$

$$\overline{A}^n = A_{t_j, u_{j-1}}, \quad \overline{f}^n = f(., t_j, u_{j-1}(.)).$$

Dann folgt

$$(u^n - u^m)_t + \overline{A}^n(\overline{u}^n - \overline{u}^m) = \overline{f}^n - \overline{f}^m + (\overline{A}^m - \overline{A}^n)\overline{u}^m.$$

Sei $u^{nm} = u^n - u^m$, $\overline{u}^{nm} = \overline{u}^n - \overline{u}^m$, $\overline{v}^{nm} = |\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}$, $\overline{w}^{nm} = |\overline{u}^{nm}|^{\frac{p_0-2}{2}}\overline{u}^{nm}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} &\left((u^n - u^m)_t, |\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right) + \overline{a}^n(\overline{u}^{nm}, |\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}) \\ &= \left(\overline{f}^n - \overline{f}^m, |\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right) + (\overline{a}^m - \overline{a}^n)(\overline{u}^m, |\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\overline{a}^n(\overline{u}^{nm}, |\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}) \ge c\,\|\overline{w}^{nm}\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)} - c'\,\|\overline{w}^{nm}\|_2^2,$$

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\overline{f}^n-\overline{f}^m,|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)\right| \le \left\|\overline{f}^n-\overline{f}^m\right\|_{\varphi}\|\overline{u}^{nm}\|_{\varphi'(p_0-1)}^{p_0-1}\\
&\le C(\underbrace{h_n+h_m}_{p_0}+\underbrace{\|\overline{u}^n(t-h_n)-\overline{u}^m(t-h_m)\|_{\sigma}}_{p_0})\underbrace{\|\overline{u}^{nm}\|_{\varphi'(p_0-1)}^{p_0-1}}_{\frac{p_0}{p_0-1}}\\
&\le C((h_n+h_m)^{p_0}+\|\overline{u}^n(t-h_n)-\overline{u}^m(t-h_m)\|_{\sigma}^{p_0})+C\|\overline{u}^{nm}\|_{\varphi'(p_0-1)}^{p_0},\\
&\|\overline{u}^{nm}\|_{\varphi'(p_0-1)}^{p_0}=\|\overline{w}^{nm}\|_{2\varphi'\frac{p_0-1}{p_0}}^{2}\le\varepsilon\|\overline{w}^{nm}\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}^2+C_\varepsilon\|\overline{w}^{nm}\|_2^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left|(\overline{a}^m-\overline{a}^n)(\overline{u}^m,|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm})\right|\\
&\le C(\underbrace{h_n+h_m}_{p_0}+\underbrace{\|\overline{u}^n(t-h_n)-\overline{u}^m(t-h_m)\|_{\sigma}}_{p_0})\underbrace{\|\overline{u}^m\|_{W_{p_0}^2(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})}}_{\infty}\times\\
&\times\underbrace{\|\overline{w}^{nm}\|_s^{\frac{p_0-2}{p_0}}}_{\frac{2p_0}{p_0-2}}\underbrace{\|\overline{w}^{nm}\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}}_{2}\\
&\le C\left((h_n+h_m)^{p_0}+\|\overline{u}^n(t-h_n)-\overline{u}^m(t-h_m)\|_{\sigma}^{p_0}+\|\overline{w}^{nm}\|_s^2\right)+\varepsilon\|\overline{w}^{nm}\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}^2,\\
&\|\overline{w}^{nm}\|_s^2\le\varepsilon\|\overline{w}^{nm}\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}^2+C_\varepsilon\|\overline{w}^{nm}\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Dann folgt

$$
\begin{aligned}
&\left(u_t^{nm},|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)+c\|\overline{w}^{nm}\|_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}^2\\
&\le C\left((h_n+h_m)^{p_0}+\|\overline{u}^n(t-h_n)-\overline{u}^m(t-h_m)\|_{\sigma}^{p_0}+\|\overline{w}^{nm}\|_2^2\right).
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u^{nm}\|_{p_0}^{p_0}=p_0\left(u_t^{nm},|u^{nm}|^{p_0-2}u^{nm}\right)\\
&=p_0\left(u_t^{nm},|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)+p_0\left(u_t^{nm},|u^{nm}|^{p_0-2}u^{nm}-|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)\\
&\le p_0\left(u_t^{nm},|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)+p_0\|u_t^{nm}\|_{p_0}\left\||u^{nm}|^{p_0-2}u^{nm}-|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right\|_{p_0'}\\
&\le p_0\left(u_t^{nm},|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)\\
&+p_0\|u_t^{nm}\|_{p_0}(p_0-1)\left(\|u^{nm}\|_{p_0}+\|\overline{u}^{nm}\|_{p_0}\right)^{p_0-2}\|u^{nm}-\overline{u}^{nm}\|_{p_0'},
\end{aligned}
$$

siehe Lemma 3.2.3. Es ist $\|u^{nm}-\overline{u}^{nm}\|_{p_0}\le C(h_n+h_m)$ und somit

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\|u^{nm}\|_{p_0}^{p_0}=p_0\left(u_t^{nm},|u^{nm}|^{p_0-2}u^{nm}\right)\\
&\le p_0\left(u_t^{nm},|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)+C\Big(\underbrace{\|u^{nm}\|_{p_0}^{p_0-2}}_{\frac{p_0}{p_0-2}}+\underbrace{(h_n+h_m)^{p_0-2}}_{\frac{p_0}{p_0-2}}\Big)\underbrace{(h_n+h_m)}_{\frac{p_0}{2}}\\
&\le p_0\left(u_t^{nm},|\overline{u}^{nm}|^{p_0-2}\overline{u}^{nm}\right)+C\|u^{nm}\|_{p_0}^{p_0}+C(h_n+h_m)^{p_0}+C(h_n+h_m)^{\frac{p_0}{2}}.
\end{aligned}
$$

Integration dieser Ungleichung über $[0, t_0]$ und (5.28) liefern

$$\begin{aligned}
&\|u^{nm}(.,t_0)\|_{p_0}^{p_0} + c\int_0^{t_0} \|\overline{w}^{nm}(t)\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}\,dt \\
&\qquad \le C\int_0^{t_0} \|u^{nm}(.,t)\|_{p_0}^{p_0}\,dt + C\int_0^{t_0} \|\overline{w}^{nm}(.,t)\|_2^2\,dt + C(h_n+h_m)^{\frac{p_0}{2}} \\
&\qquad + C\int_0^{t_0} \|\overline{u}^n(t-h_n) - \overline{u}^m(t-h_m)\|_\sigma^{p_0}\,dt.
\end{aligned}$$

Nun ist $\|\overline{w}^{nm}\|_2^2 = \|\overline{u}^{nm}\|_{p_0}^{p_0} \le C((h_n+h_m)^{p_0} + \|u^{nm}\|_{p_0}^{p_0})$ und

$$\begin{aligned}
&\|\overline{u}^n(t-h_n) - \overline{u}^m(t-h_m)\|_\sigma^{p_0} \\
&\le C(\|\overline{u}^n(t-h_n) - \overline{u}^n(t)\|_\infty^{p_0} + \|\overline{u}^n(t) - \overline{u}^m(t)\|_\sigma^{p_0} + \|\overline{u}^m(t) - \overline{u}^m(t-h_m)\|_\infty^{p_0}) \\
&\le C\left((h_n+h_m)^{p_0\gamma} + \|\overline{w}^{nm}\|^2_{\frac{2\sigma}{p_0}}\right).
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
&\|u^{nm}(.,t_0)\|_{p_0}^{p_0} + c\int_0^{t_0} \|\overline{w}^{nm}(t)\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}\,dt \\
&\le C\int_0^{t_0} \|u^{nm}(.,t)\|_{p_0}^{p_0}\,dt + C\int_0^{t_0} \|\overline{w}^{nm}(.,t)\|^2_{\frac{2\sigma}{p_0}}\,dt + C(h_n+h_m)^{\frac{p_0}{2}} + C(h_n+h_m)^{p_0\gamma}.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}
\|\overline{w}^{nm}\|^2_{\frac{2\sigma}{p_0}} &\le \varepsilon\,\|\overline{w}^{nm}\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C_\varepsilon\,\|\overline{w}^{nm}\|_2^2 \\
&\le \varepsilon\,\|\overline{w}^{nm}\|^2_{W_2^1(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)} + C\,\|u^{nm}\|_{p_0}^{p_0} + C(h_n+h_m)^{p_0},
\end{aligned}$$

also

$$\|u^{nm}(.,t_0)\|_{p_0}^{p_0} \le C\int_0^{t_0} \|u^{nm}(.,t)\|_{p_0}^{p_0}\,dt + C(h_n+h_m)^{\frac{p_0}{2}} + C(h_n+h_m)^{p_0\gamma}.$$

Das Gronwallsche Lemma liefert dann, daß (u^n) eine Cauchyfolge im Banachraum $C(I^*, L_{p_0}(\Omega))$ ist. Diese Folge besitzt einen Grenzwert u.
Damit ist der Beweis vollständig. ■
Diese Konvergenzaussage macht keine Aussage über die Konvergenz von (zum Beispiel) $b_{ik}(x^*, t^*, u^n(x^*, t^*))$, (x^*, t^*) beliebig, aber fest in $\Omega \times [0, T^*]$ gewählt. Solche Aussagen werden allerdings benötigt, um z.B. den Konvergenzsatz von Lebesgue anwenden zu können. Die folgenden Sätze stellen diese Aussagen bereit.
Zur Vereinfachung der Notationen sei zunächst definiert: Für $0 < \theta < 1$ sei $W_\theta = W_{p_0}^{s_\theta}(\Omega, \varrho^{\mu_\theta p_0}, \varrho^{\nu_\theta p_0})$, wobei

$$\begin{aligned}
s_\theta &= 2(1-\theta), \\
\nu_\theta &= \nu(1-\theta), \\
\frac{\mu_\theta - \nu_\theta}{s_\theta} &= \frac{\mu-\nu}{2}.
\end{aligned}$$

Dann gilt für jedes $f \in W_{p_0}^2(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$

$$\|f\|_{W_\theta} \le C\,\|f\|^{1-\theta}_{W_{p_0}^2(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})}\,\|f\|_{p_0}^\theta.$$

Für $\theta \to 0$ gilt $s_\theta \to 2$, $\nu_\theta \to \nu$, $\mu_\theta \to \mu$.
Dann gilt:

Satz 5.4.2 *Für jedes $0 < \theta < 1$ gilt $u^n \xrightarrow{L_\infty(I^*, W_\theta)} u$*

Der Beweis folgt sofort aus obiger Interpolationsabschätzung, $\|u^n - u^m\|_{p_0} \to 0$ und $\|u^n - u^m\|_{L_\infty(I^*, W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu}))} \leq C$. ■

Folgerung 5.4.1 *Es gilt $u^n \xrightarrow{C(I^*, W_\theta)} u$ für jedes $0 < \theta < 1$.*

Beweis Es gilt mit $0 < \theta' < \theta$

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t')\|_{W_{\theta'}} &\leq C \, \|u(t) - u(t')\|_{W_\theta}^{\frac{\theta - \theta'}{\theta}} \, \|u(t) - u(t')\|_{p_0}^{\frac{\theta'}{\theta}} \\ &\leq C \, \|u(t) - u(t')\|_{p_0}^{\frac{\theta'}{\theta}} \xrightarrow{t \to t'} 0, \end{aligned}$$

da $u \in C(I^*, L_{p_0}(\Omega))$. ■

Folgerung 5.4.2 *Es gilt $W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu}) \subset C^1(\Omega)$. Aus den Beweisen der Sätze 3.2.24 und 3.2.25 ergibt sich $W_\theta \subset C^1(\Omega)$, falls $\theta > 0$ hinreichend klein.*

Für den Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung werden weitere Regularitätsaussagen benötigt. Diese werden jetzt bereitgestellt.

Satz 5.4.3 *Es gilt*

$$\begin{aligned} &u^n \rightharpoonup^* u \text{ in } L_\infty\left(I^*, L_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\nu})\right), \\ &\frac{\partial}{\partial x_k} u^n \rightharpoonup^* \frac{\partial}{\partial x_k} u \text{ in } L_\infty\left(I^*, L_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0(\nu+\mu)/2})\right). \end{aligned}$$

Beweis Wegen $\|v\|_{L_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\nu})} = \|v\varrho^\nu\|_{p_0}$ sind gewichtete Lebesgue–Räume gleichmäßig konvex und somit reflexiv.
Aus $\|u^n\|_{L_\infty(I^*, W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu}))} \leq C$ folgt dann die Existenz einer Teilfolge

$$u^{n'} \rightharpoonup^* u \text{ in } L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\nu})).$$

Andererseits gilt $u^n \to u$ im Raum $L_2(I^*, L_2(\Omega))$. Also konvergiert die gesamte Folge (u^n) schwach* gegen u. Analog beweist man die zweite Behauptung. ■

Bemerkung 5.4.1 *Es läßt sich auch auf demselben Weg*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u^n \rightharpoonup^* v_{jk} \text{ in } L_\infty\left(I^*, L_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu})\right)$$

zeigen. Allerdings ist nicht unmittelbar ersichtlich, ob

$$v_{jk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$$

gilt, da nicht bekannt ist, ob gewichtete Sobolev–Räume reflexiv sind.

Schließlich ist (u_t^n) eine beschränkte Folge im Raum $L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega))$, besitzt also eine schwach* konvergente Teilfolge mit Grenzwert v. Auf ähnlichem Wege wie im Lemma 2.3 beweist man die Konvergenz der gesamten Folge und $u_t = v$.
Weiterhin ist wegen $L_\infty(I^*, W_{p_0}^2(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})) \subset L_2\left(I^*, W_2^2\left(\Omega, \varrho^{2\mu}, \varrho^{2\nu}\right)\right)$ und der Eindeutigkeit des Grenzwerts

$$u^n \rightharpoonup u \text{ in } L_2\left(I^*, W_2^2\left(\Omega, \varrho^{2\mu}, \varrho^{2\nu}\right)\right),$$

denn dieser Raum ist ein Hilbertraum.
Die Konvergenzaussagen lassen sich zusammenfassen:

Satz 5.4.4 *Es existiert eine Funktion*

$$\begin{aligned} u \in \bigcap_{0<\theta<1} & C(I^*, W_\theta) \cap C(I^*, C^1(\Omega)) \cap L_\infty\left(I^*, W_{p_0}^1\left(\Omega, \varrho^{p_0(\nu+\mu)/2}, \varrho^{p_0\nu}\right)\right) \cap \\ & \cap L_2(I^*, W_2^2\left(\Omega, \varrho^{2\mu}, \varrho^{2\nu}\right)) \\ & \textit{mit } u_t \in L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega)), \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} & u^n \to u \textit{ in } C(I^*, C^1(\Omega)), \\ & u^n \rightharpoonup^* u \textit{ in } L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\nu})), \\ & \frac{\partial u^n}{\partial x_k} \rightharpoonup^* \frac{\partial u}{\partial x_k} \textit{ in } L_\infty\left(I^*, L_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0(\nu+\mu)/2})\right), \\ & u^n \rightharpoonup u \textit{ in } L_2\left(I^*, W_2^2\left(\Omega, \varrho^{2\mu}, \varrho^{2\nu}\right)\right), \\ & u_t^n \rightharpoonup^* u_t \textit{ in } L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega)). \end{aligned}$$

Satz 5.4.5 *Diese Funktion ist Lösung im Sinne von* (5.20).

Beweis Es gilt

$$\int_{I^*} (u_t^n, v)\, dt + \int_{I^*} \overline{a}^n(\overline{u}^n, v)\, dt = \int_{I^*} \left(\overline{f}^n, v\right)\, dt.$$

Sei $v \in L_1(I^*, W_{p_0'}^1(\Omega))$ vorgegeben. Wegen $u_t^n \in L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega))$ sowie $u^n \in L_\infty\left(I^*, W_{p_0}^1\left(\Omega, \varrho^{p_0(\nu+\mu)/2}, \varrho^{p_0\nu}\right)\right)$ und $f^n \in L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega))$ und aufgrund der A–priori–Abschätzungen besitzen die Integranden integrierbare Majoranten. Wegen $\overline{u}^n \to u$ im Raum $L_\infty(I^*, C^1(\Omega))$ und $u_t^n \rightharpoonup^* u_t$ in $L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega))$ folgt nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue die Behauptung. ■

Satz 5.4.6 *Es existiert höchstens eine Lösung von* (5.20) *im Raum* $C(I^*, C^1(\Omega)) \cap L_\infty(I^*, W_{p_0}^1\left(\Omega, \varrho^{p_0(\mu+\nu)/2}, \varrho^{p_0\nu}\right)$ *mit* $u_t \in L_\infty(I^*, L_{p_0}(\Omega))$.

Beweis Seien u_1, u_2 zwei Lösungen, $u = u_1 - u_2$, $v(.,t) = |u(t)|^{p_0-2}u(t)$ für $t \le t_0$ und 0 sonst, $w(.,t) = |u(t)|^{(p_0-2)/2}u(t)$ für $t \le t_0$, anderenfalls 0. Dann gilt

$$\int (u_t, v)\, dt + \int a_1(u, v)\, dt = \int (f_1 - f_2, v)\, dt + \int a_2(u_2, w) - a_1(u_2, v)\, dt.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} & a_1(u, v) \ge c_1 \|w\|^2_{W_2^1(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^\nu)} - c_2 \|w\|_2^2, \\ & (f_1 - f_2, v) \le C \|u\|_\sigma \|w\|_{2p_0'}^{2\frac{p_0-1}{p_0}}, \\ & |a_2(u_2, w) - a_1(u_2, w)| \le C \|u\|_\sigma \|w\|_s^{\frac{p_0-2}{p_0}} \|w\|_{W_2^1(\Omega, \varrho^\mu, \varrho^0)}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung läßt sich zeigen, obwohl u_2 nicht notwendig im Raum $W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$ liegt. Für den Beweis dieser Abschätzung ist lediglich

$$u_2(.,t) \in C^1(\Omega) \cap W^1_{p_0}\left(\Omega, \varrho^{p_0(\mu+\nu)/2}, \varrho^{p_0\nu}\right)$$

erforderlich, siehe Beweis zu Satz 5.3.1.
Dann ergibt sich auf üblichem Wege

$$\begin{aligned}
&\|u(t_0)\|_{p_0}^{p_0} + \int_0^{t_0} \|w\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^\nu)}\, dt \\
&\leq C \int_0^{t_0} \|u\|_\sigma \|u\|_{p_0}^{p_0-1}\, dt + C \int_0^{t_0} \|u\|_\sigma \|w\|_s^{\frac{p_0-2}{p_0}} \|w\|_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}\, dt + C \int_0^{t_0} \|u\|_{p_0}^{p_0}\, dt \\
&\leq \varepsilon \int_0^{t_0} \|w\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}\, dt + C \int_0^{t_0} \|w\|^2_{\frac{2\sigma}{p_0}}\, dt + C \int_0^{t_0} \|w\|_s^2\, dt + C \int_0^{t_0} \|u\|_{p_0}^{p_0}\, dt \\
&\leq \varepsilon \int_0^{t_0} \|w\|^2_{W^1_2(\Omega,\varrho^\mu,\varrho^0)}\, dt + C \int_0^{t_0} \|u\|_{p_0}^{p_0}\, dt.
\end{aligned}$$

Wenn ε hinreichend klein gewählt wurde, dann liefert das Gronwall-Lemma $\|u(t_0)\|_{p_0} \leq 0$ für alle $0 \leq t_0 \leq T^*$. Das ist die Behauptung. ■

5.5 Gegenbeispiel

Eine der Voraussetzungen des Satzes 5.2.1 lautete $b_0(x,t,u) \geq C_E > 0$. Diese Bedingung hat zur Folge, daß der Koeffizient des Absolutgliedes am Rand des Gebietes gegen Unendlich divergiert.
Solch eine Bedingung ist überraschend. Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, daß diese Voraussetzung tatsächlich erforderlich ist.
Sei $N = 1$, $\Omega = (-1,1)$, $\varrho(x) = (1-x^2)^{-1}$.
Nun wird die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
&u_t - (\varrho^\mu(x)u_x)_x + \varrho^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{3}{5}}u = \\
&\frac{11}{10}t + t(1-x^2)^{-\frac{9}{20}} + (1-x^2)^{\frac{11}{20}} + \frac{12}{5}(1-x^2)^{\frac{13}{20}} - \frac{78}{25}x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{20}} + (1-x^2)^{\frac{1}{5}}
\end{aligned}$$

untersucht. Dabei seien die Rand– und Anfangsbedingungen

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = (1-x^2)^{\frac{6}{5}}$$

vorgegeben. Die Voraussetzung an b_0 ist offensichtlich verletzt.
Es sei

$$\mu = -\frac{9}{20}, \quad \nu = \frac{8}{5}, \quad p_0 = 2.$$

Nun ist zu prüfen, ob die im Satz 5.2.1 erwähnten Voraussetzungen erfüllt sind:
Offensichtlich ist $\nu > \mu + 2$, $\mu < 0 < \nu$ und $\mu + \nu > 0$. Es gilt weiterhin $\frac{2\nu}{\nu-\mu} > 1 + \frac{1}{2}$.
Schließlich ist $\varrho^{-\mu} \in L_2(\Omega)$ und $\varrho^\nu \notin L_1(\Omega)$.
Wegen $-\frac{9}{20} > -\frac{1}{2}$, $-\frac{7}{20} > -\frac{1}{2}$ ist $f(.,t) \in L_{p_0}(\Omega)$ für jedes t.

Nun wird die Anfangsfunktion untersucht. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&|U_0\varrho^\nu|^{p_0} = (1-x^2)^{-\frac{4}{5}},\\
&\left|U_{0,x}\varrho^{(\mu+\nu)/2}\right|^{p_0} \le C(1-x^2)^{-\frac{15}{20}}, \quad \left(\frac{1}{2}(\mu+\nu) = \frac{23}{40}\right),\\
&|U_{0,xx}\varrho^\mu|^{p_0} \le C(1-x^2)^{-\frac{14}{20}}
\end{aligned}
$$

und $-\frac{4}{5}, -\frac{15}{20}, -\frac{14}{20} > -1$, deshalb gilt $U_0 \in W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$.
Also sind (mit der erwähnten Ausnahme) alle Voraussetzungen des Satzes 5.2.1 erfüllt.
Eine Lösung des Rand–Anfangswertproblems lautet $u(x,t) = t(1-x^2)^{\frac{11}{20}} + (1-x^2)^{\frac{6}{5}}$, denn:

$$
\begin{aligned}
u_x(x,t) &= -tx\frac{11}{10}(1-x^2)^{-\frac{9}{20}} - \frac{12}{5}x(1-x^2)^{\frac{1}{5}},\\
\varrho^\mu(x)u_x(x,t) &= -\frac{11}{10}tx - \frac{12}{5}x(1-x^2)^{\frac{13}{20}},\\
(\varrho^\mu(x)u_x(x,t))_x &= -\frac{11}{10}t - \frac{12}{5}(1-x^2)^{\frac{13}{20}} + \frac{78}{25}x^2(1-x^2)^{-\frac{7}{20}},\\
\varrho^\nu(x)(1-x^2)^{\frac{3}{5}}u &= t(1-x^2)^{-\frac{9}{20}} + (1-x^2)^{\frac{1}{5}}.
\end{aligned}
$$

Die Rand–und Anfangsbedingungen sind offensichtlich erfüllt.
Allerdings gilt $u(x,t) \notin W^2_{p_0}(\Omega, \varrho^{p_0\mu}, \varrho^{p_0\nu})$ für $t > 0$, da

$$(1-x^2)^{\frac{11}{20}}\varrho^\nu \notin L_{p_0}(\Omega).$$

In den Beweisen dieses Kapitels hatte die Abschätzung $\|u_j\|_{W^2_{p_0}(\Omega,\varrho^{p_0\mu},\varrho^{p_0\nu})} \le K$ besondere Bedeutung.
Wie dieses Beispiel belegt, ist für eine solche Abschätzung die Voraussetzung an b_0 unverzichtbar.

Zusammenfassung

Mit Hilfe der Rothe–Methode konnte nachgewiesen werden, daß gewisse semilineare und quasilineare schwach parabolische Rand–Anfangswert–Probleme eindeutig bestimmte Lösungen besitzen.
Eine besondere Rolle bei diesen Untersuchungen spielte die Wahl passender gewichteter Sobolev–Räume. Diese Räume wurden so gewählt, daß mit ihrer Hilfe die Entartung „aufgefangen" werden konnte. Dieses Konzept ermöglicht die Behandlung schwacher Entartungen.
Im Falle semilinearer Gleichungen waren diese Räume Hilberträume. Die Existenz der Lösungen der diskretisierten Probleme wurde mit dem Satz von Lax–Milgram gezeigt.
Der Fall quasilinearer Gleichungen erfordert eine andere Herangehensweise. Die Nichtlinearität des elliptischen Operators kann nur im Rahmen der L_p–Theorie zufriedenstellend behandelt werden. Allerdings ist über die L_p–Theorie schwach elliptischer Operatoren nur wenig bekannt. Daraus ergeben sich im Vergleich zum semilinearen Fall einige Einschränkungen an die zu behandelnden Probleme. Dies äußert sich unter anderem in zusätzlichen Glattheitsvoraussetzungen an die Gewichtsfunktion.
Andererseits konnte in diesem Fall eine höhere Regularität der Lösung als im semilinearen Fall nachgewiesen werden. Dies liegt daran, daß beim Nachweis der Existenz von Lösungen für die elliptischen Hilfsprobleme nicht auf die Variationsformulierung zurückgegriffen werden mußte. Stattdessen konnte die W_p^2–Theorie elliptischer Operatoren genutzt werden.
Nachdem die Existenz von Lösungen für die diskretisierten Hilfsprobleme bewiesen wurde, wurden A–priori–Abschätzungen für diese Lösungen und ihre Differenzenquotienten hergeleitet. Hierfür wurden die Hilfsprobleme in die Variationsform überführt.
Mit Hilfe der A–priori–Abschätzungen konnte die Konvergenz der Folge der durch lineare Interpolation erhaltenen Funktionen gezeigt werden. Diese Folge konvergiert gegen eine schwache Lösung des Ausgangsproblems. Es läßt sich zeigen, daß außer der konstruierten Lösung keine weitere existiert.

Literaturverzeichnis

[Ada78] Robert A. Adams. *Sobolev Spaces.* Academic Press, New York, 1978.

[Ali79] N.D. Alikakos. L_p–bounds of solutions of reaction–diffusion systems. *Communications on Partial Differential Equations*, 4(8):827–868, 1979.

[Fri76] Avner Friedman. *Partial Differential Equations.* Krieger, Huntington, 1976.

[Heu92] Harro Heuser. *Funktionalanalysis.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

[Hör60] Lars Hörmander. Estimates for translation invariant operators in L^p-spaces. *Acta Mathematica*, 104, 1960.

[Hör69] Lars Hörmander. *Linear Partial Differential Operators.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[Kač85] Jozef Kačur. *Method of Rothe in Evolution Equations.* B.G. Teubner, Leipzig, 1985.

[KO84] Alois Kufner and Bohumir Opic. How to define reasonably weighted Sobolev Spaces. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 25(3), 1984.

[KS87] Alois Kufner and Anna-Margarete Sändig. *Some Applications of Weighted Sobolev Spaces.* B.G. Teubner, Leipzig, 1987.

[LSU67] O. A. Ladyshenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Uralceva. *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type.* Nauka, Moskau, 1967.

[Mir70] Carlo Miranda. *Partial Differential Equations of Elliptic Type.* Ergebnisse der Mathematik 2. Springer, Berlin, 1970.

[Mos60] J. Moser. A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(3):457–468, 1960.

[Plu88] Volker Pluschke. Local solution of parabolic equations with strongly increasing nonlinearity by the Rothe–method. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 113(38):642–654, 1988.

[Plu91] Volker Pluschke. L_∞–estimate and uniform convergence of Rothe's method for quasilinear parabolic differential equations. In R. Kleinman, R. Kress, and E. Martensen, editors, *Direct and Inverse Boundary Value Problems*, pages 187–199. Peter Lang Verlag, Frankfurt/M., 1991.

[Plu93] Volker Pluschke. Local solutions to quasilinear parabolic equations without growth restrictions. 1993.

[Rek84] Karel Rektorys. *Variationsmethoden in Mathematik, Physik und Technik.* Hanser Verlag, Wien, 1984.

[Sim72] C. G. Simader. *On Dirichlet's Boundary Value Problem.* Lecture Notes in Mathematics 268. Springer, Berlin, 1972.

[Tri67] Hans Triebel. Erzeugung nuklearer lokalkonvexer Räume durch singuläre Differentialoperatoren zweiter Ordnung. *Mathematische Annalen*, 174, 1967.

[Tri72] Hans Triebel. *Höhere Analysis.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

[Tri78] Hans Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.

[Tut83] Wolfgang Tutschke. *Partielle Differentialgleichungen.* B.G. Teubner, Leipzig, 1983.

[Web91] Frank Weber. Die Anwendung der Rothe–Methode auf hyperbolische Probleme mit nichtlinearen Randbedingungen. Master's thesis, Martin–Luther–Universität Halle–Wittenberg, 1991.

[Wlo82] Josef Wloka. *Partielle Differentialgleichungen. Sobolev–Räume und Randwertaufgaben.* B.G. Teubner, Stuttgart, 1982.

[Zei76] Eberhard Zeidler. *Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis I.* B.G. Teubner, Leipzig, 1976.

[Zei90] Eberhard Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume IIA. Springer, Berlin, New York, Heidelberg, 1990.