Probeklausur Funktionentheorie - Lösungen

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned} &\text{Es ist} \qquad \log_{(0)}(i) = \ln|i| + i\cdot\arg(i) = i\cdot\frac{\pi}{2} \\ &\text{außerdem} \qquad \frac{1}{i} = -i \\ &\text{Daher ist} \qquad i^{\frac{1}{i}} = \mathrm{e}^{-i\cdot\ln(i)} = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

b)

Nach Definition des Logarithmus ist

$$\begin{aligned} \log_{(0)}(i) &= \ln|i| + i\cdot\arg_0(i) = i\cdot\frac{\pi}{2} \\ \log_{(0)}\left(i\frac{\pi}{2}\right) &= \ln\left|i\frac{\pi}{2}\right| + i\cdot\arg_0\left(i\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

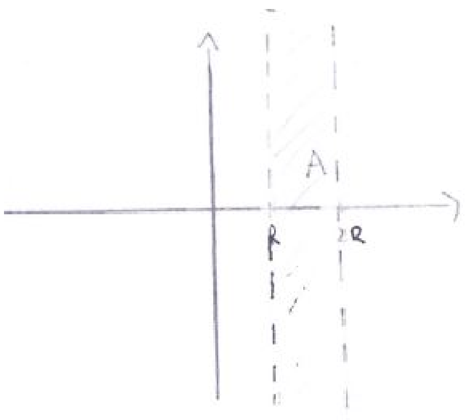
Also ist

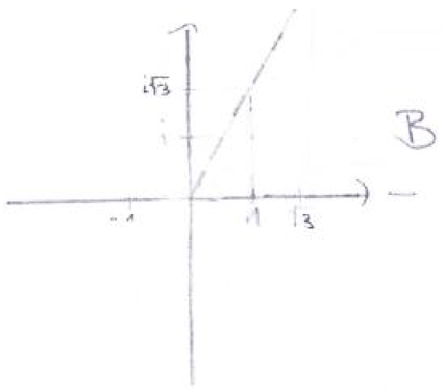
$$\begin{aligned} \left(\log_{(0)}(i)\right)^i &= \mathrm{e}^{i\cdot\log_{(0)}\left(i\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{i\left(\cdot\ \ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cdot\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}\left[\cos\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + i\sin\left(\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\right] \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$A = \{z \in \mathbb{C} : R < \operatorname{Re}(z) < 2R\}$$
$$B = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < \sqrt{3}\operatorname{Re}(z)\}$$





b)

Für $z \in A \cap B$ gilt

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{(\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \\ &< \sqrt{(2R)^2 + (\operatorname{Re}(r) \cdot \sqrt{3})^2} \\ &< \sqrt{4R^2 + 12R^2} \\ &= 4R\end{aligned}$$

und

$$|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| > R$$

Weiter ist $0 < \arg(z) < \frac{\pi}{3}$ für $z \in A \cap B$ $(\star)$. Somit ist mit der Monotonie des natürlichen Logarithmus

$$\begin{aligned}\left|\log_{(0)}(z)\right|^2 &= |\ln|z| + i \cdot \arg(z)|^2 \\ &\geq |\ln|z||^2 \\ &> \ln(R)^2\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}\left|\log_{(0)}(z)\right|^2 &\leq (|\ln|z|| + |\arg(z)|)^2 \\ &< \left(\ln(4R) + \frac{\pi}{3}\right)^2 \\ &< (\ln(4R))^2 + \frac{\pi^2}{9}\end{aligned}$$

Bei $(\star)$ haben wir $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ verwendet, sowie $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right)$

Aufgabe 3

a)

Es ist für $z = x + iy$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sin(i\bar{z}) \\ &= \sin(i(x - iy)) \\ &= \sin(y + ix) \\ &= \underbrace{\cosh(x)\sin(y)}_{:=u(x,y)} + i\underbrace{\sinh(x)\cos(y)}_{:=v(x,y)} \end{aligned}$$

Wäre f holomorph, so müssten die Cauchy-Riemann Relationen gelten, also

$$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x$$

Es gelten:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \sinh(x)\sin(y) \\ v_y(x,y) &= -\sinh(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Damit ist $u_x \neq v_y$. Also kann f nicht holomorph sein

b)

Es sei

$$\operatorname{Im}(f(x+iy)) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)\sin(y) =: v(x,y)$$

Damit f holomorph sein kann, müssen wieder die CR Relationen gelten, also

$$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x \qquad \text{mit} \qquad u = \operatorname{Re} f \tag{1}$$

Es ist

$$\begin{aligned} v_y(x,y) &= \mathrm{e}^{-x}(1-x)\cos(y) \\ v_x(x,y) &= \left[\mathrm{e}^{-x}(-1) - \mathrm{e}^{-x}(1-x)\right]\sin(y) \\ &= (x-2)\mathrm{e}^{-x}\sin(y) \end{aligned}$$

Wir versuchen nun ein u mit (1) zu finden. Nach dem H.S. ist, falls (1) gilt:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int u_x(x,y)\mathrm{d}x = \int v_y(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int \mathrm{e}^{-x}(1-x)\cos(y)\mathrm{d}x \\ &= \cos(y)\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x} + c(y) \\ u(x,y) &= \int u_y(x,y)\mathrm{d}y = -\int v_x(x,y)\mathrm{d}y \\ &= -\int (x-2)\mathrm{e}^{-x}\sin(y)\mathrm{d}y \\ &= (x-2)\mathrm{e}^{-x}\cos(y) + d(x) \end{aligned}$$

Zusammen müsste also gelten:

$$\begin{aligned} (x-2)\mathrm{e}^{-x}\cos(y) + d(x) &= \cos(y)\cdot x\cdot \mathrm{e}^{-x} + c(y) \\ \Rightarrow c(y) &= -2\mathrm{e}^{-x}\cos(y) + d(x) \end{aligned}$$

Es existiert also keine solche holomorphe Funktion.

Aufgabe 4

a)

Es ist

$$\frac{z^2+3z}{z^2+5z+4} = \frac{z^2+3z}{(z+1)(z+4)}$$

Weiter gilt für $z_0 = -1$: $z_0 \in K_3(2i)$ und f ist holomorph auf $K_{3+\epsilon}(2i)$ für ein $\epsilon > 0$ hinreichend klein. Nach der C.I.F gilt also:

$$\begin{aligned}\int_{K_3(2i)} \frac{z^2+3z}{(z+1)(z+4)} \mathrm{d}z &= 2\pi i \cdot f(-1) \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-2}{3} \\ &= -\frac{4}{3}\pi i\end{aligned}$$

b)

Erhalte durch Partialbruchzerlegung:

$$\frac{3}{(z-1)^3(i-z)^2} = \underbrace{\frac{9}{4}}_{:=f_1(z)} \frac{1}{z-i} + \underbrace{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}i}_{:=f_2(z)} \frac{1}{(z-i)^2} - \underbrace{\frac{9}{4}}_{:=f_3(z)} \frac{1}{z-1} + \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i}_{:=f_4(z)} \frac{1}{(z-1)^2} + \underbrace{\frac{3i}{2}}_{:=f_5(z)} \frac{1}{(z-1)^3}$$

Dann ist

$$\int_{K_{10}(1)} \frac{3}{(z-1)^3(i-z)^2} \mathrm{d}z = \int_{K_{10}(1)} \frac{f_1(z)}{z-i} + \frac{f_2(z)}{(z-i)^2} + \frac{f_3(z)}{z-1} + \frac{f_4(z)}{(z-1)^2} + \frac{f_5 z)}{(z-1)^3} \mathrm{d}z$$

Da alle f_i konstant sind, sind alle f_i holomorph auf K_{10} Nach der erw.C.I.F. ist

$$f_i^{(n)}(z) \frac{2\pi i}{n!} = \int_{K_r} \frac{f_i(\delta)}{(\delta - z)^{n+1}} \mathrm{d}\delta$$

Also gelten:

$$\int_{K_{10}(1)} \frac{f_1(z)}{z-i} \mathrm{d}z = f_1(i) \frac{2\pi i}{0!} = \frac{9}{2}\pi i$$

$$\int_{K_{10}(1)} \frac{f_3(z)}{z-1} \mathrm{d}z = f_3(1) \frac{2\pi i}{0!} = -\frac{9}{2}\pi i$$

$$\int_{K_{10}(1)} \frac{f_2(z)}{(z-i)^2} \mathrm{d}z = \int_{K_{10}(1)} \frac{f_4(z)}{(z-1)^2} \mathrm{d}z = \int_{K_{10}(1)} \frac{f_5(z)}{(z-i)^3} \mathrm{d}z = 0$$

und somit auch

$$\int_{K_{10}(1)} \frac{3}{(z-1)^3(i-z)^2} \mathrm{d}z = 0$$

Aufgabe 5

a)

Gesucht sind alle holomorphen Funktionen f mit differenzierbaren Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass folgende Darstellung für f existiert:

$$f(x + iy) = g(x) + i \cdot h(y)$$

Wir definieren die Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$u(x, y) = g(x) \text{ und } v(x, y) = h(y)$$

Dann ist

$$u_x(x, y) = g'(x) \text{ und } u_y(x, y) = 0$$

sowie

$$v_x(x, y) = 0 \text{ und } v_y(x, y) = h'(y)$$

Damit f holomorph, müssen die CR Relationen gelten:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \text{ und } u_y = -v_x \\ u_x(x, y) &= g'(x) = h'(y) = v_y(x, y) \text{ und} \\ u_y(x, y) &= 0 = -v_x(x, y) \end{aligned}$$

Also müssen g', h' konstant und gleich sein

$$g(x) = cx + d \text{ und } h(x) = cy + e \text{ mit } c, d, e \in \mathbb{R}$$

somit kann f nur von folgender Form sein:

$$f(x + iy) = c(x + iy) + d + ie$$

b)

Analoge Argutmentation liefert

$$f(x + iy) = cy + d + cx + e$$

Aufgabe 6

Partialbruchzerlegung liefert

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z+4} \\ &= \frac{i}{4(z+2i)} - \frac{i}{4(z-2i)} := f_1(z) - f_2(z) \end{aligned}$$

Auf $K_{2\xi}(0)$ ist f holomorph und als Taylorreihe entwickelbar. Induktiv lässt sich zeigen, dass

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(z) &= (-1)^n \frac{i \cdot n!}{4(z+2i)^{n+1}} \\ f_2^{(n)}(z) &= (-1)^n \frac{i \cdot n!}{4(z-2i)^{n+1}} \end{aligned}$$

Also ist für $z \in K_2(0)$ die Taylorreihe mit Entwicklungspunkt $z_0 = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= f_1(z) - f_2(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i}{4(2i)^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{i}{4(-2i)^{n+1}} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \left(\frac{i}{4(2i)^{n+1}} - \frac{i}{4(-2i)^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{C}, |z| > 2$ erhalten wir mit der geometrischen Reihe,da $\left|\frac{2i}{z}\right| < 1$:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{i}{4z} \left(\frac{1}{1 - (-\frac{2i}{z})} \right) \\ &= \frac{i}{4z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2i}{z} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i \cdot (-2i)^k}{4} \left(\frac{1}{z} \right)^{k+1} \\ f_2(z) &= -\frac{i}{4z} \left(\frac{1}{1 - \frac{2i}{z}} \right) \\ &= -\frac{i}{4z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2i}{z} \right)^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i \cdot (2i)^k}{4} \left(\frac{1}{z} \right)^{k+1} \end{aligned}$$

Also ist die Laurentreihe fon f auf dem Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i(-2i)^k + i(2i)^k}{4} \left(\frac{1}{z} \right)^{k+1} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{i\left((-2i)^{-(k-1)} + (2i)^{-(k-1)}\right)}{4} z^k \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Da f holomorph ist, lässt sich f als Taylorreihe entwickeln

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ mit } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{n!}$$

Nach der erw.C.I.F gilt:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{m+1}} \mathrm{d}\xi \qquad \text{für beliebige } r > 0$$

somit folgt für $r > R$

$$\begin{aligned}
|a_k| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{K_r(0)} \frac{f(\xi)}{\xi^{m+1}} \mathrm{d}\xi \right| \\
&= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)}{r^{k+1}\left(\mathrm{e}^{it}\right)^{k+1}} i\mathrm{e}^{it} r \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f\left(r\mathrm{e}^{it}\right)}{r^k} \right| \mathrm{d}t \\
&\leq C \frac{r^N}{r_k} \\
&= C^{N-k} \to 0 \text{ für } r \to \infty, k > N \\
\Rightarrow f(z) &= \sum_{k=0}^{N} a_k z^k
\end{aligned}$$