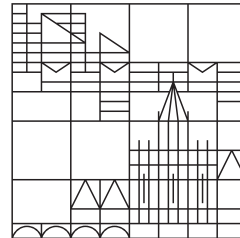


EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER DYNAMISCHEN SYSTEME

Vorlesung von H. Freistühler im Sommersemester 2017

Mitgeschrieben und in \LaTeX gesetzt von
Marco Bernreuther und Simon Buchwald
Stand: 12. August 2017; Schlussredaktion folgt

Universität
Konstanz



Veröffentlichung und Weitergabe nur mit Zustimmung des Dozenten.
Über Rückmeldung zu Fehlern/Anregungen/Kritik würden wir uns freuen.

Marco Bernreuther (marco.bernreuther@uni-konstanz.de)
Simon Buchwald (simon.buchwald@uni-konstanz.de)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung - Grundbegriffe	1
1.1	Abstrakte Definition des Begriffs des dynamischen Systems	1
1.2	Der Fluss einer autonomen DGL	1
1.3	Orbits, invariante Mengen und Limes-Mengen	3
1.4	Liapunov-Funktionen und Erhaltungsgrößen	7
1.5	Struktur kompakter ω -Limesmengen in \mathbb{R}^2	13
2	Verhalten in der Nähe von Ruhelagen	15
2.1	Stabilität einer Ruhelage anhand der Liapunov-Methode	15
2.2	Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Ruhelagen	17
2.3	Zentrumsmannigfaltigkeiten ("center manifolds")	21
3	Ausblick: Traveling Waves	31

1 Einleitung - Grundbegriffe

1.1 Abstrakte Definition des Begriffs des dynamischen Systems

Definition 1.1.1

(i) Ein dynamisches System ist eine Halbgruppe G mit Einselement, die auf einer Menge M operiert. Das heißt es gibt eine Abbildung

$$T : G \times M \rightarrow M \\ (g, x) \mapsto T_g(x),$$

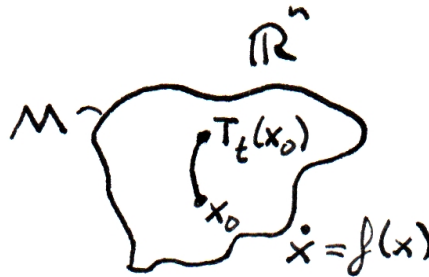
so dass $T_g \circ T_h = T_{g \circ h}$, $T_e = id_M$.

(ii) Wenn G sogar eine Gruppe ist, dann nennt man das dynamische System invertierbar.

(iii) Man betrachtet hauptsächlich kontinuierliche dynamische Systeme: $G = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ oder $G = \mathbb{R}$ und diskrete dynamische Systeme: $G = \mathbb{N}_0$ oder $G = \mathbb{Z}$.

Beispiel

(i) Der Fluss einer autonomen DGL mit $T_t = \Phi_t$, $G = \mathbb{R}$ mit etwa $M \subset \mathbb{R}^n$ ist ein kontinuierliches dynamisches System. (Invertierbar)



(ii) Die Iteration einer Abbildung liefert ein diskretes dynamisches System:

$$T_n = f \circ \dots \circ f \quad \text{mit} \quad f : M \rightarrow M.$$

Invertierbar, falls f invertierbar.

Bemerkung

Indem man $\{T_t\}$ aus (i) bei $n = t \in \mathbb{Z}$ "auswertet", erhält man ein Beispiel für (ii), nämlich mit $f = T_1$.

1.2 Der Fluss einer autonomen DGL

Betrachte AWP

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

wobei $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man sagt auch einfach "Vektorfeld".

"Lösungen" sind Kurven, die an jedem ihrer Punkte tangential an f sind ("Integralkurven", "Trajektorien").

Aus der Theorie der GDGL bekannt: Zu jedem Punkt x_0 gibt es eine (eindeutige) maximale Lösung x des AWP, definiert auf einem maximalen Intervall $I_{x_0} := (T_-(x_0), T_+(x_0))$ mit $T_-(x_0) < 0 < T_+(x_0)$.

Verwende

$$W = \bigcup_{x \in M} I_x \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times M$$

und definiere den Fluss der DGI als die Abbildung

$$\Phi : W \rightarrow M, (t, x) \mapsto \Phi(t, x),$$

wobei $\Phi(t, x)$ die Lösung der DGI zum AW x ist.

Haben $\Phi(s+t, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ mit $I_{\Phi(s, x)} = I_x - s$.

Die Ergebnisse der Theorie der GDGlen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Satz 1.2.1

Sei $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Für alle $x \in M$ existiert ein offenes Intervall $I_x \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I_x$ und eine maximale Integralkurve $\Phi(\cdot, x) \in C^k(I_x, M)$. Die (oben definierte) Menge W ist offen und $\Phi \in C^k(W, M)$ ist ein "lokaler Fluss" auf M , d.h. für $x \in M$ gilt:

$$\Phi(0, x) = x$$

$$\Phi(t+s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x)), \quad s, t+s \in I_x.$$

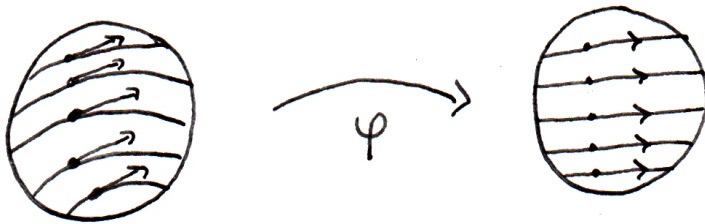
Bemerkung

- (i) Indem man $s = -t$ wählt, sieht man, dass $\Phi_t := \Phi(t, \cdot)$ ein lokaler Diffeomorphismus mit Inverser Φ_{-t} ist.
- (ii) Ersetzt man f durch $-f$, so geht $\Phi(t, x)$ in $\Phi(-t, x)$ über ("Zeitumkehr").
- (iii) Ein Punkt $x^* \in M$ mit $f(x^*) = 0$ heißt Ruhelage.

Außerhalb von Ruhelagen sieht jedes Vektorfeld qualitativ überall gleich aus.

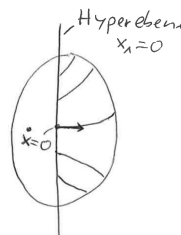
Satz 1.2.2 (Parallelisierung/Trivialisierung von Vektorfeldern)

Angenommen $f(x^*) \neq 0$. Dann gibt es auf einer offenen Umgebung von x^* eine Koordinatentransformation $y = \varphi(x)$, s.d. $\dot{x} = f(x)$ äquivalent ist zu $\dot{y} = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.



Beweis. O.B.d.A. $x^* = 0$ und $f(x^*) = e_1$.

Betrachte die Trajektorien $t \mapsto \Phi(t, (0, x_2, \dots, x_n))$ von Anfangspunkten in der Hyperebene $x_1 = 0$. Die gewünschte Transformation φ soll jeden Punkt $\Phi(t, (0, x_2, \dots, x_n))$ auf den Punkt $(0, x_2, \dots, x_n) + t(1, 0, \dots, 0) = (t, x_2, \dots, x_n)$ abbilden:



$$\varphi(\Phi(t, (0, x_2, \dots, x_n))) = (t, x_2, \dots, x_n).$$

Das heißt φ muss die Inverse der Abbildung

$$\psi : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \Phi(x_1, (0, x_2, \dots, x_n))$$

sein. Wegen $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = f \circ \Phi$ und $\Phi(0, \cdot) = id$ gelten

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \Big|_0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{(0,0)} = e_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \Big|_0 &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \Big|_{(0,0)} = e_j, \quad j \geq 2, \end{aligned}$$

und deshalb

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \Big|_{t=0, x=0} = I.$$

$\Rightarrow \psi$ lokal umkehrbar.

Da $\frac{\partial \psi}{\partial x} e_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = f$, gilt für $y = \varphi(x)$

$$\dot{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \dot{x} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^{-1} f = e_1.$$

□

1.3 Orbits, invariante Mengen und Limes-Mengen

Definition 1.3.1

- (i) Orbit (Bahn) von $x \in M$: $\gamma(x) = \Phi(I_x \times \{x\}) \subset M$.
- (ii) Vorwärtsorbit (Zukunft) von x : $\gamma_+(x) = \Phi((0, T_+(x)), x)$.
- (iii) Rückwärtsorbit (Vergangenheit) von x : $\gamma_-(x) = \Phi((T_-(x), 0), x)$.
- (iv) x periodischer Punkt: $\Leftrightarrow \exists T > 0 : \Phi(T, x) = x$, dazu Periode von x , $T(x) = \inf \{T > 0 : \Phi(T, x) = x\}$.
- (v) x regulär periodisch: $\Leftrightarrow x$ periodisch mit $T(x) > 0$.
- (vi) Orbit $\gamma(x)$ periodisch: $\Leftrightarrow x$ periodisch.
- (vii) Orbit $\gamma(x)$ regulär periodisch: $\Leftrightarrow x$ regulär periodisch.

Definition ist konsistent, da: x regulär periodisch $\Rightarrow \forall y \in \gamma(x)$ gilt: y regulär periodisch mit $T(y) = T(x)$.



Bemerkung

- Stets* $\gamma(x) = \gamma_-(x) \cup \{x\} \cup \gamma_+(x)$.
- Orbit zerlegt M disjunkt*: $y \in \gamma(x) \Rightarrow \gamma(y) = \gamma(x)$.
- x *Ruhelage* $\Leftrightarrow \gamma(x) = \{x\}$.
- x *periodisch* $\Leftrightarrow \gamma_-(x) \cap \gamma_+(x) \neq \emptyset$.
- Jeder Orbit ist entweder

- (i) eine Ruhelage, oder
- (ii) regulär periodisch, oder
- (iii) nicht geschlossen.

Definition 1.3.2

- (i) Orbit $\gamma(x)$ heißt
 +-vollständig : $\Leftrightarrow T_+(x) = \infty$;
 --vollständig : $\Leftrightarrow T_-(x) = -\infty$;
 vollständig : \Leftrightarrow +-vollständig und --vollständig.
- (ii) Vektorfeld vollständig : \Leftrightarrow Jeder Orbit vollständig ($\Leftrightarrow W = \mathbb{R} \times M$, also invertierbares dynamisches System im Sinne der Definition 1.1.1)

Aus der Theorie der GDG folgt leicht:

Lemma 1.3.3

Zu $x \in M$ liege $\gamma_+(x)$ oder $\gamma_-(x)$ in einem Kompaktum $C \subset M$. Dann ist x +- bzw. --vollständig.

Definition 1.3.4

- (i) Menge $U \subset M$ heißt σ -invariant, $\sigma \in \{+, -\}$: $\Leftrightarrow \gamma_\sigma(x) \subset U$ für jedes $x \in U$.
- (ii) Menge $U \subset M$ heißt invariant : $\Leftrightarrow U$ +- und --invariant.

Korollar 1.3.5

$C \subset M$ kompakt und σ -invariant, $\sigma \in \{+, -\}$, so sind alle Punkte von C σ -vollständig.

Lemma 1.3.6

- (i) Beliebige Vereinigungen und Schnitte σ -invarianter Mengen sind σ -invariant. Der Abschluss einer σ -invarianten Menge ist σ -invariant.
- (ii) Sind U, V invariant, so auch $U \setminus V$.

Beweis. (i) Erste Aussage trivial. Zweite Aussage:

Für $\sigma = +$: Sei $x \in \overline{U}$, dazu Folge $x_n \in U$ mit $x_n \rightarrow x$. Fixiere $t \in (0, T_+(x))$. Da U offen, gilt $t \in I_{x_n}$ für alle $n \geq n_0$. Einerseits $y_n = \Phi(t, x_n) \in U$, $n \geq n_0$, andererseits $y_n \rightarrow \Phi(t, x)$, da $\Phi(t, \cdot)$ stetig, also $\Phi(t, x) \in \overline{U}$.

- (ii) Sei $x \in U \setminus V$. Da U invariant, ist $\gamma(x) \subset U$. Angenommen, es gibt ein $y \in \gamma(x) \cap V$. Da V invariant, wäre dann $x \in \gamma(x)$ und $x \in V$, ein Widerspruch. Also ist $\gamma(x) \cap V = \emptyset$.

□

Definition 1.3.7

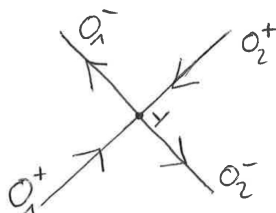
Die ω_\pm -Limesmenge eines Punktes $x \in M$, $\omega_\pm(x)$, ist die Menge aller $y \in M$, zu denen jeweils eine Folge $t_n \rightarrow \pm\infty$ existiert mit $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$. (Statt " ω_+ -Limesmenge" manchmal " ω -Limesmenge", statt " ω_- -Limesmenge" manchmal " α -Limesmenge".)

Bemerkung

Da alle Punkte eines Orbits dieselbe ω_\pm -Limesmenge haben, spricht man auch von der ω_\pm -Limesmenge des Orbits.

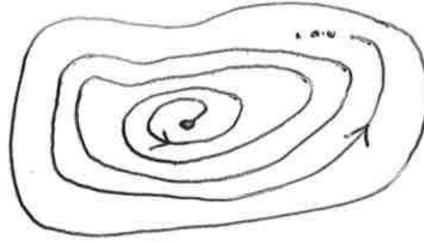
Beispiel

- (i) Ruhelage kann Limesmenge sein.



$$\begin{aligned} \{y\} &= \omega_+\text{-Limes von } O_1^+, O_2^+ \\ &= \omega_-\text{-Limes von } O_1^-, O_2^- \end{aligned}$$

- (ii) Jeder periodische Orbit ist ω_+ - und ω_- -Limesmenge seiner Punkte.
- (iii) Ein periodischer Orbit kann ω_+ - oder ω_- -Limesmenge aller Punkte einer offenen Menge sein.



Lemma 1.3.8

$\omega_\sigma(x)$ ist eine abgeschlossene, invariante Menge, $\sigma \in \{+, -\}$.

Beweis. Für den Fall $\sigma = +$.

Abgeschlossenheit: Sei y aus dem Abschluss von $\omega_+(x)$. Dazu Folge $y_n \in \omega_+(x)$ mit $y_n \rightarrow y$, etwa $|y_n - y| < \frac{1}{n}$. Dazu findet man Zeiten $t_n \rightarrow \infty$ mit $|\Phi(t_n, x) - y_n| < \frac{1}{n}$. Also $|\Phi(t_n, x) - y| < \frac{2}{n} \rightarrow 0$, damit $y \in \omega_+(x)$.

Invarianz: Ist $y \in \omega_+(x)$, $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$, so folgt $\Phi(t_n + t, x) = \Phi(t, \Phi(t_n, x)) \rightarrow \Phi(t, y)$, also $\Phi(t, y) \in \omega_+(x)$, $t \in I_y$. \square

Beispiel

Kann ω_\pm leer sein? Ja: $\dot{x} = 1$.

Lemma 1.3.9

Wenn $\gamma_\sigma(x)$ in einem Kompaktum C enthalten ist, dann ist $\omega_\sigma(x)$ nichtleer, kompakt und zusammenhängend.

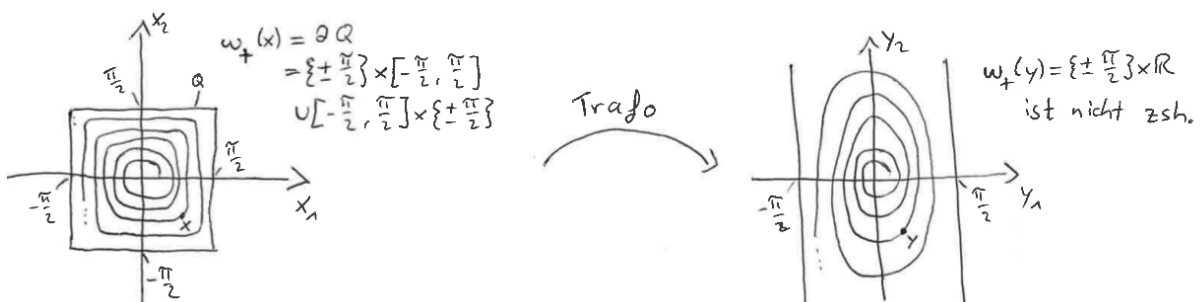
Beweis. Nach 1.3.3 ist x σ -vollständig und wir können eine Folge t_n mit $t_n \rightarrow \sigma\infty$ nehmen. Wegen der Kompaktheit von C hat $(\Phi(t_n, x))_n$ eine konvergente Teilfolge. Für deren Limes gilt $y \in \omega_\sigma(x)$, also $\omega_\sigma(x) \neq \emptyset$. Als abgeschlossene Menge (1.3.8) ist $\omega_\sigma(x) \subset C$ kompakt. Bleibt zu zeigen, dass es auch zusammenhängend ist.

Widerspruch: Angenommen, es existieren zwei offene Mengen $U_1, U_2 \subset M$, so dass $\text{dist}(U_1, U_2) > 0$ und $\omega_j = \omega_\sigma(x) \cap U_j$, $j = 1, 2$ nichtleer, abgeschlossen und $\omega_\sigma(x) = \omega_1 \cup \omega_2$. Man findet Zeiten t_n , $n \in \mathbb{N}$, $t_n \rightarrow \sigma\infty$, so dass $\Phi(t_{2m}, x) \in U_1$, $\Phi(t_{2m+1}, x) \in U_2$. Da $\gamma(x)$ selbst zusammenhängend (mit anderen Worten: da Φ stetig in t ist), gibt es Zwischenzeiten τ_m mit $t_{2m} < \tau_m < t_{2m+1}$ und $\Phi(\tau_m, x) \notin U_1, U_2$. Da $C \setminus (U_1 \cup U_2)$ kompakt, hat $(\Phi(\tau_m, x))_m$ eine Teilfolge deren Limes y zum Komplement von $U_1 \cup U_2$ gehört. Also $y \in \omega_\sigma(x)$ im Widerspruch zu $\omega_\sigma(x) \subset U_1 \cup U_2$. \square

Beispiel 1.3.10

Ohne die Annahme $\gamma_\sigma(x) \subset \text{Kompaktum}$ gilt im Allgemeinen nicht, dass $\omega_\sigma(x)$ zusammenhängend ist.

Betrachte zunächst



Koordinatentransformation / Pullback von Vektorfeldern:

Was geschieht mit $\dot{x} = f(x)$ unter einem "Variablenwechsel" $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$?

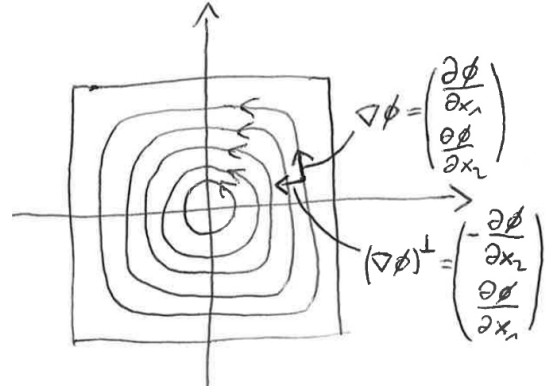
Mit der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \varphi'(x) \dot{x} = \varphi'(x) f(x) \\ &= \varphi'(\psi(y)) f(\psi(y)) \\ &= (\psi'(y))^{-1} f(\psi(y)).\end{aligned}$$

Also $\dot{y} = (\psi^* f)(y)$ mit $\boxed{\psi^* f = (\psi')^{-1} f \circ \psi}$. "Pullback von f via ψ ".

Betrachte $\dot{x} = (\nabla\phi(x))^\perp = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$

mit $\phi(x_1, x_2) = \cos(x_1) \cos(x_2)$.



Der Fluss dieses Vektorfeldes hat die folgende Eigenschaft:

Längs seiner Trajektorien ist ϕ konstant:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \phi(\Phi(t, x)) &= \langle \nabla\phi(\Phi(t, x)), \underbrace{\Phi_t(t, x)}_{=f(\Phi(t, x)) = (\nabla\phi)^\perp} \rangle = 0\end{aligned}$$

Und dann stattdessen

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x) \end{pmatrix} - \phi(x) \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} =: f(x).$$

Dieses f hat die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \phi(\Phi(t, x)) &< 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\Phi(t, x)) &= 0.\end{aligned}$$

Lemma 1.3.11

Angenommen $\gamma_\sigma(x)$ ist in einer kompakten Menge C enthalten. Dann ist $\lim_{t \rightarrow \sigma\infty} d(\Phi(t, x), \omega_\sigma(x)) = 0$.

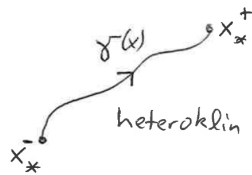
(Zu $x \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ ist $d(x, A) := \inf_{y \in A} |x - y|$.)

Beweis. Widerspruch:

Sonst $\exists \delta > 0$, $t_n \rightarrow \sigma\infty$ mit $d(\Phi(t_n, x), \omega_\sigma(x)) \geq \delta$. Da C kompakt, finde Teilfolge \tilde{t}_n mit $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\tilde{t}_n, x)$. Einerseits $y \in \omega_\sigma(x)$, andererseits $d(y, \omega_\sigma(x)) > \delta$ \blackleftarrow \square

Definition 1.3.12 (Heterokline / homokline Orbits)

- (i) Orbit $\gamma(x)$ heißt heteroklin zu zwei Ruhelagen $x_*^-, x_*^+ : \Leftrightarrow x_*^- \neq x_*^+$ und $\Phi(t, x) \rightarrow x_*^\pm$, $t \rightarrow \pm\infty$



- (ii) Orbit $\gamma(x)$ heißt homoklin zu einer Ruhelage $x_* : \Leftrightarrow \Phi(t, x) \rightarrow x_*$, $t \rightarrow \pm\infty$.

**1.4 Liapunov-Funktionen und Erhaltungsgrößen**

Sei f Vektorfeld auf $M \subset \mathbb{R}^n$.

Definition 1.4.1

- (i) Eine Funktion $L \in C(U, \mathbb{R})$ auf $U \subset M$ offen heißt Liapunov-Funktion $: \Leftrightarrow \forall x \in U$, $t_1, t_2 \in I_x$, $t_1 < t_2$ mit $\Phi(t_1, x), \Phi(t_2, x) \in U : L(\Phi(t_1, x)) \geq L(\Phi(t_2, x))$.
- (ii) Eine Liapunov-Funktion heißt "strikt" $: \Leftrightarrow$ zusätzlich $L(\Phi(t_1, x)) > L(\Phi(t_2, x))$, sofern $\Phi(t_1, x) \neq \Phi(t_2, x)$.

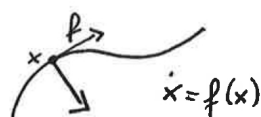
Definition 1.4.2

$E \in C(U, \mathbb{R})$ "Erhaltungsgröße" auf $U \subset M : \Leftrightarrow \forall x \in U$, $t_1 < t_2 \in I_x$ mit $\Phi(t_1, x), \Phi(t_2, x) \in U : E(\Phi(t_1, x)) = E(\Phi(t_2, x))$.

Satz 1.4.3

- (i) Falls $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ Liapunov-Funktion auf U und $L \in C^1$, so ist $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$.
- (ii) Falls $U \subset M$ invariant ist und $L \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle \leq 0$, so ist L Liapunov-Funktion auf U .
- (iii) Falls $U \subset M$ invariant und $L \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0 \forall x$ mit $f(x) \neq 0$, dann ist L strikte Liapunov-Funktion.
- (iv) Falls $E : U \rightarrow \mathbb{R}$ Erhaltungsgröße und $E \in C^1$, so ist $\langle \nabla E(x), f(x) \rangle = 0 \forall x \in U$.
- (v) Falls U invariant, $E : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $E \in C^1$ und $\langle \nabla E(x), f(x) \rangle = 0$, so ist E Erhaltungsgröße.

Beweis. Selbst machen. □



(Falls ∇E überall senkrecht zu einer Kurve, so ist diese Teil einer Niveaulinie von E .)

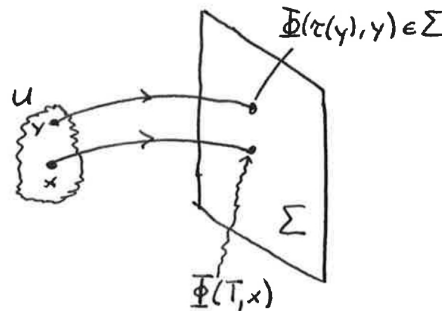
Definition 1.4.4

- (i) $\Sigma \subset M$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 (oder auch: eine Hyperfläche), wenn $\Sigma = \{x \in M : S(x) = 0\}$ mit $S \in C^k(M)$ mit der Eigenschaft, dass $\nabla S(x) \neq 0 \forall x \in \Sigma$.
(Etwa: $\sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$)
- (ii) Eine solche Untermannigfaltigkeit heißt transversal zu $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, wenn $\langle \nabla S(x), f(x) \rangle \neq 0 \forall x \in \Sigma$.

Beispiel 1.4.5

Sei $x \in M$ und $T \in I_x$. Sei Σ eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 und transversal zu f und $\Phi(T, x) \in \Sigma$.

- (i) Dann existiert eine Umgebung U von x und eine Funktion $\tau \in C^k(U, \mathbb{R})$, so dass $\tau(x) = T$ und $\Phi(\tau(y), y) \in \Sigma \forall y \in U$.



- (ii) $\tau : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine strikte Liapunov-Funktion.

Beweis. (i) Betrachte die Gleichung $S(\Phi(t, y)) = 0$. Sie ist für $(t, y) = (T, x)$ erfüllt und wegen

$$\left. \frac{d}{dt} S(\Phi(t, x)) \right|_{t=T} = \langle \nabla S(\Phi(T, x)), \frac{\partial \Phi}{\partial t}(T, x) \rangle = \langle \nabla S, f \rangle(\Phi(T, x)) \neq 0$$

dort lokal nach t auflösbar. $t = \tau(y)$.

- (ii) Übung. □

Definition 1.4.6

$\dot{x} = f(x)$ heißt „Gradientensystem“ : $\Leftrightarrow f = -\nabla\phi$ mit $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Korollar 1.4.7

In dieser Situation ist ϕ eine Liapunov-Funktion.

Beweis. $\langle \nabla\phi(x), f(x) \rangle = -|\nabla\phi(x)|^2 \leq 0$. □

Definition 1.4.8

Falls $n = 2m$, so heißt $\dot{x} = f(x)$ „Hamiltonsch“, wenn es eine Funktion $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, mit der man $\dot{x} = f(x)$ als

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}(q, p) \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \end{aligned}$$

schreiben kann, mit $p, q \in \mathbb{R}^m$ und $x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Korollar 1.4.9

In dieser Situation ist H eine Erhaltungsgröße.

$$\text{Beweis. } \langle \nabla H(x), f(x) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \quad \square$$

Beispiel 1.4.10

Newton's Gleichung (in einer Dimension)

$$\ddot{x} = g(x, \dot{x}) \text{ oder } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}.$$

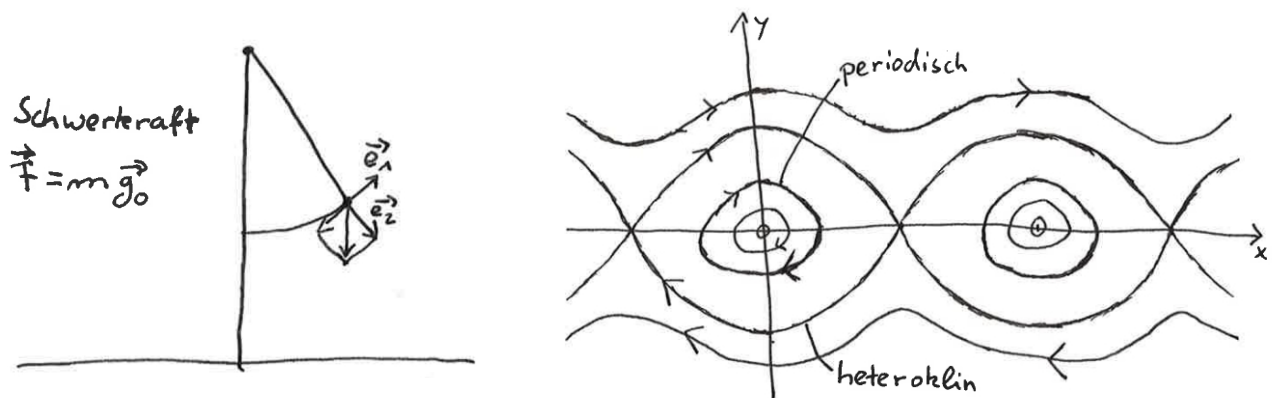
(i) g hängt nicht von \dot{x} ab, $g = g(x)$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= g(x) \end{aligned}$$

Gesamtenergie

Hamiltonsch mit $H(x, y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2$, wobei $G(x) = -\int g(x) dx$

Für den Fall eines mathematischen Pendels ist $g(x) = -\sin(x)$ und $G(x) = -\cos(x) (+ C)$.



Bei $(0, 0)$ hat H ein Minimum ($D^2H(0, 0) > 0$).

Bei $(\pi, 0)$ hat H einen Sattelpunkt.

(ii) g hängt auch von \dot{x} ab.

Im allgemeinen nicht Hamiltonsch. Wenn z.B. $g(x, \dot{x}) = g_0(x) + \hat{g}(\dot{x})$, so gilt für $H(x, y) = G_0(x) + \frac{1}{2}y^2$, $G_0(x) = -\int g_0(x) dx$:

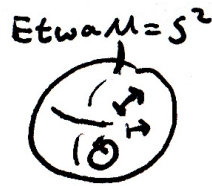
$$\begin{aligned} \frac{dH(x, y)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = -g_0(x) y + y(g_0(x) + \hat{g}(y)) \\ &= y\hat{g}(y) \end{aligned}$$

Etwa $\hat{g}(y) = -ky \rightarrow \frac{dH(x, y)}{dt} = -\frac{k}{2}y^2$.

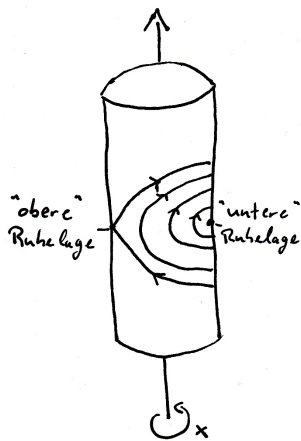
Hier ist H strikte Liapunov-Funktion.

Mini-Exkurs 1.4.11 (Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten)

Statt nur auf $M \subset \mathbb{R}^n$ kann man dynamische Systeme auch auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten betrachten. Das ist oft natürlicher. Alle Begriffe sind analog.



Beim Beispiel des Pendels, 1.4.10, etwa ist $M = S^1 \times \mathbb{R}$ natürlicher:



Etwa entsprechen die heteroklinen Orbits aus 1.4.10 (Pendel schwingt einmal in unendlich langer Zeit von oben über unten nach oben) jetzt (zwei) homoklinen Orbits.

Beispiel 1.4.12 (Einfachstes Räuber-Beute-Modell (Lotka-Volterra))

Wähle $M = \{(x, y) : x, y \geq 0\}$ (den ersten Quadranten).

Die Spezies y ("Räuber") ernährt sich von der Spezies x ("Beute") gemäß

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - By)x \\ \dot{y} &= (Cx - D)y.\end{aligned}$$

Wobei $A, B, C, D > 0$ mit folgender Interpretation:

$B > 0$: Das Vorhandensein von Räubern verringert die Beute.

$C > 0$: Das Vorhandensein von Beute vermehrt die Räuber.

$A > 0$: Vermehrung der Beute (ohne Einfluss der Räuber).

$D > 0$: Verringerung der Räuber (ohne Einfluss der Beute).

Skalieren \rightarrow

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (1 - y)x \\ \dot{y} &= \alpha(x - 1)y\end{aligned} \quad \text{mit } \alpha > 0$$

Eliminiere t \rightarrow

$$\frac{dy}{dx} = \alpha \frac{(x-1)y}{(1-y)x} \quad \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} \right)$$

Separation der Variablen \rightarrow

$$0 = \frac{1-y}{y} dy + \alpha \frac{1-x}{x} dx$$

Gibt es im System Erhaltungsgrößen oder Liapunov-Funktionen?

Für Erhaltungsgröße E muss gelten

$$0 = \dot{E} = \frac{\partial E}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial E}{\partial y} \dot{y}$$

$$0 = dE = \frac{\partial E}{\partial x} dx + \frac{\partial E}{\partial y} dy.$$

Insbesondere kann man E wählen als

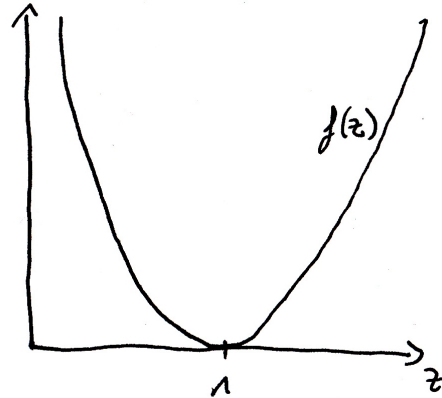
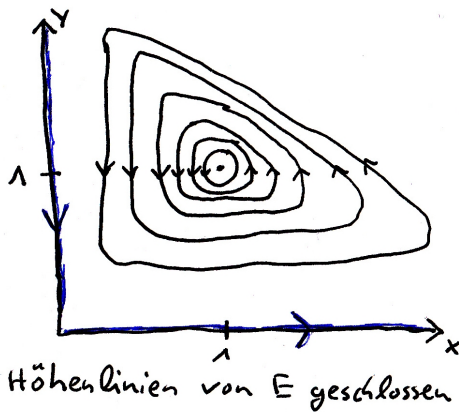
$$E(x, y) = \alpha(x - 1 - \log x) + (y - 1 - \log y) = \alpha f(x) + f(y)$$

mit

$$f(z) = z - 1 - \log z$$

$$f'(z) = 1 - \frac{1}{z}$$

$$f''(z) = \frac{1}{z^2}.$$



E ist strikt konvex: $D^2E(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix} > 0$.

Daher sind alle Orbits mit $x, y \neq 0$ periodisch ("Populationszyklen").

Ruhelagen sind $(0, 0)$, $(1, 1)$, sowie $y = 0, x \rightarrow \infty$ und $x = 0, y \rightarrow \infty$.

Beispiel 1.4.13 (Räuber-Beute-Modell mit logistischem Wachstum)

Betrachte

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - y - \lambda x)x \\ \dot{y} &= \alpha(x - 1 - \mu y)y \end{aligned} \quad \text{mit } \alpha, \lambda, \mu > 0 \text{ auf } M = \{(x, y) : x, y \geq 0\}.$$

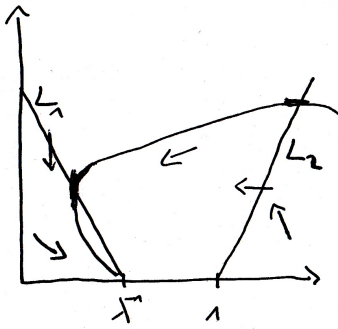
Ruhelagen sind $(0, 0)$, $(\lambda^{-1}, 0)$, $(0, \mu^{-1})$, sowie $\left(\frac{1 + \mu}{1 + \mu\lambda}, \frac{1 - \lambda}{1 + \mu\lambda} \right)$.
Ecke Rand $\notin M$, da $\mu > 0$ löse $1 - y - \lambda x = 0, x - 1 - \mu y = 0$

Für die vierte Ruhelage sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(i) Falls $\lambda \geq 1$, liegt (x^*, y^*) nicht in M .

(ii) Falls $\lambda < 1$, liegt (x^*, y^*) in M .

Analyse (i):



Vorzeichen-Verhalten von $f(x, y) = (1 - y - \lambda x) x$,
 $g(x, y) = \alpha (x - 1 - \mu y) y$

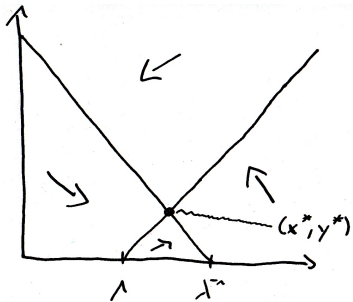
Diese Funktionen haben Vorzeichenwechsel auf

$L_1 := \{(x, y) : 1 - y - \lambda x = 0\}$ bzw.

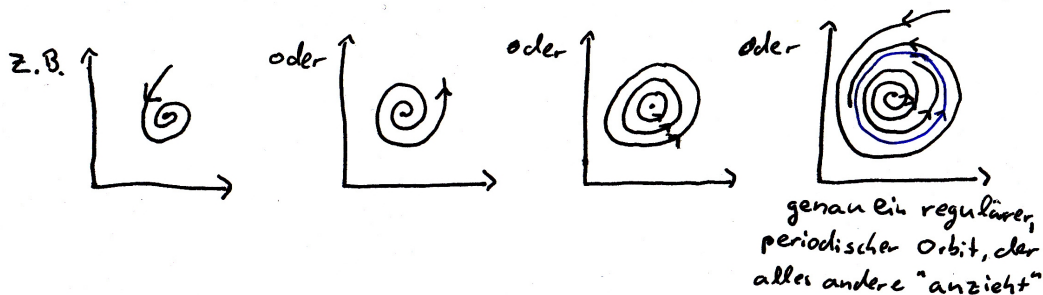
$L_2 := \{(x, y) : x - 1 - \mu y = 0\}$

Alle Orbits mit $x \neq 0$ haben ω_+ -Limes $(\lambda^{-1}, 0)$

Analyse (ii):



“Himmelsrichtungen” allein würden qualitativ verschiedene Phasenportraits erlauben.



Gibt es vielleicht eine Liapunov-Funktion?

Ja, es gibt eine Liapunov-Funktion!

Ansatz $L(x, y) = \gamma_1 f\left(\frac{y}{y^*}\right) + \gamma_2 f\left(\frac{x}{x^*}\right)$.

Gesucht γ_1, γ_2 , so dass L Liapunov-Funktion wird. Setze $\bar{x} = x - x^*$, $\bar{y} = y - y^*$. System wird zu

$$\dot{x} = (-\bar{y} - \lambda \bar{x}) x$$

$$\dot{y} = \alpha (\bar{x} - \mu \bar{y}) y.$$

Also

$$\begin{aligned}
 \dot{L} &= \frac{\partial L}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial y} \dot{y} \\
 &= \frac{1}{x^*} \alpha \gamma_2 \left(1 - \frac{x^*}{x}\right) (-\bar{y} - \lambda \bar{x}) x + \frac{1}{y^*} \alpha \gamma_1 \left(1 - \frac{y^*}{y}\right) (\bar{x} - \mu \bar{y}) y \\
 &= -\alpha \left\{ \gamma_2 \left(\frac{x}{x^*} - 1\right) (\bar{y} + \lambda \bar{x}) + \gamma_1 \left(\frac{y}{y^*} - 1\right) (\mu \bar{y} - \bar{x}) \right\} \\
 &= -\alpha \left\{ \gamma_2 \frac{\bar{x}}{x^*} (\bar{y} + \lambda \bar{x}) + \gamma_1 \frac{\bar{y}}{y^*} (\mu \bar{y} - \bar{x}) \right\} \\
 &= \alpha \left\{ \frac{\gamma_2 \lambda}{x^*} \bar{x}^2 + \frac{\gamma_1 \mu}{y^*} \bar{y}^2 + \left(\frac{\gamma_2}{x^*} - \frac{\gamma_1}{y^*}\right) \bar{x} \bar{y} \right\}.
 \end{aligned}$$

Mit der Wahl $\gamma_1 = y^*$, $\gamma_2 = x^*$ ist also

$$\dot{L} = -\alpha \{ \lambda \bar{x}^2 + \mu \bar{y}^2 \} < 0$$

an allen Punkten $(x, y) \neq (x^*, y^*)$. L hat absolutes Minimum bei (x^*, y^*) . Alle Orbits mit $x, y \neq 0$ haben ω_+ -Limes $\{(x^*, y^*)\}$.

1.5 Struktur kompakter ω -Limesmengen in \mathbb{R}^2

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$. Erstes Ziel ist

Satz 1.5.1 (Poincaré-Bendixon)

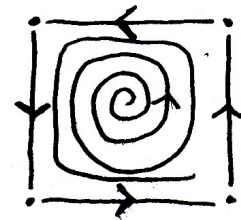
Ist eine ω -Limesmenge $\omega_\sigma(x)$ nichtleer, kompakt und enthält keine Ruhelagen, so ist sie bereits ein regulär periodischer Orbit.

Bemerkung

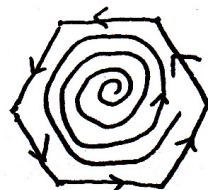
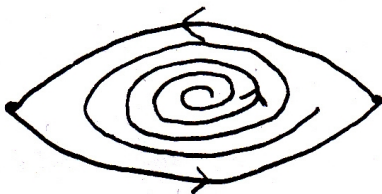
- (i) Dass eine ω -Limesmenge im \mathbb{R}^2 auch von anderer Struktur als der eines einzelnen periodischen Orbits sein kann, hatten wir schon: In dem Beispiel 1.3.10

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{pmatrix} - \phi \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad \phi(x_1, x_2) = \cos x_1 \cos x_2$$

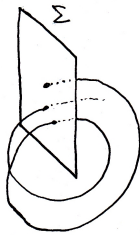
bestehen die ω_+ -Limesmengen der "meisten" Orbits aus je vier Ruhelagen und vier heteroklinen Orbits.



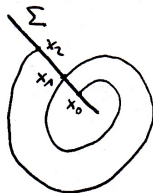
Andere Möglichkeiten



(ii) Unterschied zwischen \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^n , $n > 2$:



Im \mathbb{R}^n , $n > 2$, kann ein Orbit denselben transversalen Schnitt Σ in "ungeordneter" Weise wiederholt durchsetzen.



Im \mathbb{R}^2 sind die sukzessiven Schnittpunkte eines Orbits mit Σ monoton geordnet.

Lemma 1.5.2

Sei x_0 regulärer Punkt und mit einem $s \in C^1(I, M)$ mit $s'(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in \text{Intervall } I \subset \mathbb{R}$, die Kurve $\Sigma = \{s(\tau) : \tau \in I\}$ transversaler Schnitt.

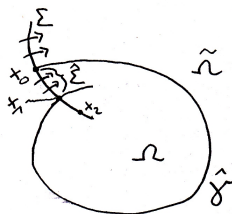
[In dieser Beschreibung ist Transversalität gleichbedeutend mit $\det(s'(\tau), f(s(\tau))) \neq 0$.]

Angenommen $\emptyset \neq \gamma_\sigma(x) \cap \Sigma = \{x_0, x_1, \dots\}$, wobei $x_j = \Phi(t_j, x)$, $\sigma t_j \geq \sigma t_{j-1}$. Dann ist diese (unendliche oder endliche) Folge monoton bezüglich der durch s gegebenen Orientierung von Σ .

Beweis. Falls $\gamma_\sigma(x) \cap \Sigma$ nur ein Element x_0 hat, ist nichts zu beweisen.

Falls $x_1 = x_0$, so x periodisch und Folge $(x_n)_n$ konstant.

Sei also $x_1 \neq x_0$.



Betrachte Kurve $J = \hat{\gamma} \cup \hat{\Sigma}$, wobei $\hat{\gamma} = \{\Phi(t, x_0) : 0 \leq \sigma t \leq \sigma t_1\}$, $\hat{\Sigma} =$ das Stück von Σ zwischen x_0 und x_1 . Seien Ω und $\tilde{\Omega}$ die beiden Gebiete, in die J nach dem Jordanschen Kurvensatz die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus J$ disjungiert. Hierbei sei Ω diejenige dieser beiden Mengen, die von Σ genau die Punkte enthält, die bezüglich x_1 in der anderen Richtung liegen als x_0 .

Dann ist Ω positiv invariant, da bei $\partial\Omega$ Orbits höchstens hineingehen können. Falls x_2 existiert, so gehört es zu $\Sigma \cap \Omega$, liegt also nicht strikt zwischen x_0 und x_1 , sondern so, dass x_1 zwischen x_0 und x_2 liegt. \square

Lemma 1.5.3

Die Schnittmenge von $\omega_\sigma(x)$ und einem transversalen Schnitt Σ enthält höchstens einen Punkt.

Beweis.

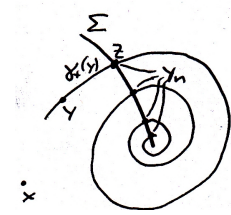


Jeder Schnittpunkt $y \in \omega_\sigma(x) \cap \Sigma$ ist Limes einer Folge $(x_n)_n$ mit $x_n = \Phi(t_n, x)$. Daher auch Limes von $\tilde{x}_n = \Phi(\tilde{t}_n, x) \in \Sigma$. Gemäß Lemma 1.5.2 ist die Folge \tilde{x}_n auf Σ monoton angeordnet. Sind also $y, \hat{y} \in \omega_\sigma(x) \cap \Sigma$, so gibt es zwei monotone Folgen $\tilde{x}_n, \hat{\tilde{x}}_n$ mit $\tilde{x}_n \rightarrow y$, $\hat{\tilde{x}}_n \rightarrow \hat{y}$. Diese sind beide Teilfolgen der einen Folge $\gamma_\sigma(x) \cap \Sigma$, die gemäß Lemma 1.5.2 monoton ist. Deshalb $y = \hat{y}$.

\square

Beweis von Satz 1.5.1. Seien $y \in \omega_\sigma(x)$ und $z \in \omega_\sigma(y) \subset \omega_\sigma(x)$. (Letzteres gilt, weil $\omega_\sigma(x)$ invariant und abgeschlossen ist.) Ein solches z existiert, weil $\omega_\sigma(x)$ nichtleer und kompakt und daher nach Lemma 1.3.9 $\omega_\sigma(y) \neq \emptyset$.

Wähle transversalen Schnitt $\Sigma \ni z$ und Punkte $y_n \in \Sigma \cap \gamma_\sigma(y)$ wie im Beweis von Lemma 1.5.3. Aber $\Sigma \cap \gamma_\sigma(y) \subset \Sigma \cap \omega_\sigma(x) = \{z\}$, da nach Lemma 1.5.3 $\Sigma \cap \omega_\sigma(x)$ höchstens einelementig ist. Also $y_n = z$ für alle n und hiermit $\gamma(y)$ periodischer Orbit. Da $\lim_{t \rightarrow \sigma\infty} d(\Phi(t, x), \omega_\sigma(x)) = 0$ (Lemma 1.3.11), kann es sich nur um einen periodischen Orbit handeln. \square



Satz 1.5.4 (Verallgemeinerter Poincare-Bendixon)

Sei $x \in M$, $\sigma \in \{-, +\}$ und $\omega_\sigma(x)$ nichtleer, zusammenhängend und kompakt. $\omega_\sigma(x)$ enthalte endlich viele Ruhelagen x_1, \dots, x_n , $n > 0$. Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:

- (i) $\omega_\sigma(x)$ besteht aus genau einer Ruhelage.
- (ii) $\omega_\sigma(x) \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ besteht aus endlich vielen heteroklinen oder homoklinen Orbits, die jeweils zwei bzw. eine der Ruhelagen x_1, \dots, x_n als ω_σ -Limesmenge haben.

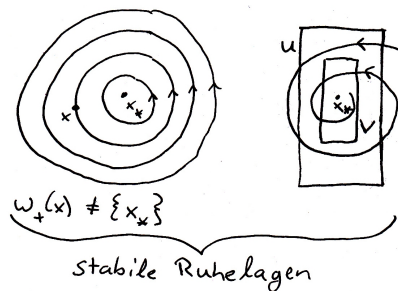
Beweis. Sei $y \in \omega_\sigma(x)$ regulär. (Falls es ein solches y nicht gibt, ist $\omega_\sigma(x)$ einelementig, $= \{x_1\}$, also Fall i.) Zu zeigen: $\omega_\sigma(y) = \{x_j\}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Angenommen, $z \in \omega_\sigma(y)$ ist regulär. Indem wir einen transversalen Schnitt bei z betrachten, erkennen wir $\gamma(y)$ als regulären periodischen Orbit und $\gamma(y) \subset \omega_\sigma(x)$. Widerspruch zu $n > 0$. Also $\omega_\sigma(y) \in \{x_1, \dots, x_n\}$. \square

2 Verhalten in der Nähe von Ruhelagen

2.1 Stabilität einer Ruhelage anhand der Liapunov-Methode

Definition 2.1.1

- (i) Eine Ruhelage x_* eines Vektorfeldes heißt “(Liapunov-) stabil” \Leftrightarrow Für jede Umgebung U von x_* gibt es eine Umgebung V von x_* , so dass $\gamma_+(x) \subset U$ für alle $x \in V$.
- (ii) Eine Ruhelage x_* heißt “asymptotisch stabil” \Leftrightarrow Sie ist stabil und es ex. Umgebung W von x_* , so dass $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = x_*$ für alle $x \in W$.

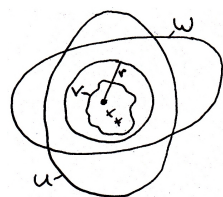


Satz 2.1.2 (Satz von Liapunov)

Sei x_* Ruhelage von f . Es existiere eine Liapunov-Funktion $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung W von x_* , so dass $L(x) \geq 0$ für alle $x \in W$ und für $x \in W: L(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_*$ (★). Dann ist x_* stabil.

Beweis. Sei U eine Umgebung von x_* . Wähle $r > 0$ mit $\overline{B(x_*, r)} \subset U \cap W$.

Da $\partial B(x_*, r)$ kompakt, existiert (wegen ★) $\min_{\partial B(x_*, r)} L > 0$. Wähle $\delta \in (0, \min_{\partial B(x_*, r)} L)$ und $V := \{x \in B(x_*, r) : L(x) < \delta\}$. Für jeden Punkt $x \in V$ ist $\gamma_+(x) \subset V$.



\square

Satz 2.1.3

Sei x_* Ruhelage von f und $L : W \rightarrow \mathbb{R}$ Liapunov-Funktion auf einer offenen Umgebung W von x_* mit (\star) und der Eigenschaft:

$(\star\star)$ Auf jedem Orbit, der ganz in $W \setminus \{x_*\}$ verläuft, ist L nicht konstant.

Dann ist x_* asymptotisch stabil.

Beweis. Betrachte r, δ, V wie im Beweis von Satz 2.1.2. Sei $y \in V$. Da V positiv invariant ist, ist $\omega_+(y) \subset \bar{V} \subset W$. Auf $\omega_+(y)$ ist L konstant (warum?). Also entweder $\omega_+(y) = \{x_*\}$ oder $\omega_+(y) \not\ni x_*$. Da $\omega_+(y)$ selbst invariant ist, gäbe es im letzteren Fall einen Orbit $\neq \{x_*\}$, auf dem L konstant wäre. Widerspruch zu $(\star\star)$. \square

Satz 2.1.4 (Satz über die asymptotische Stabilität von Ruhelagen mit strikt stabiler Linearisierung oder auch "Prinzip der linearisierten Stabilität")

Sei x_* Ruhelage von f und die Realteile aller Eigenwerte von $Df(x_*)$ seien negativ. Dann ist x_* asymptotisch stabil.

Idee: Betrachte zunächst Linearisierung

$$\dot{x} = Ax \quad \text{mit} \quad A = Df(0)$$

Hierfür folgt die Behauptung aus der Theorie der linearen Dgl.systeme (\rightarrow Fundamentalsysteme, führende Terme $e^{\lambda_j t}$, λ_j Eigenwerte von A). Dies beherrscht auch die Anteile höherer Ordnung von f im nichtlinearen System.

Zum Beweis verwenden wir

Lemma 2.1.5

Sei T eine lineare Selbstabbildung des \mathbb{R}^n , deren sämtliche Eigenwerte die Bedingung $\operatorname{Re} \lambda < 0$ erfüllen. Dann gibt es eine Basis des \mathbb{R}^n , so dass die T bezüglich dieser Basis darstellende Matrix A die Eigenschaft hat: Der symmetrische Anteil $\frac{1}{2}(A + A^T)$ von A ist negativ definit.

Beweis. Jordansche Normalform (reelle Fassung):

Bzgl. geeigneter Basis wird T dargestellt durch $M = \begin{pmatrix} M_{\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & M_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$M_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad M_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \Lambda_l \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Lambda_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix},$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die reellen und $\alpha_j \pm i\beta_j$ die komplexen EWe von T .

Falls alle "*" = 0 sind, so sind wir fertig mit $A = M$, da $\frac{1}{2}(M + M^T)$ in diesem Fall eine Diagonalmatrix ist mit lauter negativen Diagonaleinträgen.

Andernfalls macht eine geeignete Basistransformation der Bauart $A = B^{-1}MB$ mit

$$B = \begin{pmatrix} B_{\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & B_{\mathbb{C}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad B_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \epsilon^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon^1 \end{pmatrix}, \quad B_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} \epsilon^l \cdot I_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \epsilon^1 \cdot I_2 \end{pmatrix}$$

alle "*" -Einträge beliebig klein und da $\operatorname{Re} \lambda$ strikt negativ, damit $\frac{1}{2}(A + A^T)$ negativ definit, wenn man nur $\epsilon > 0$ hinreichend klein wählt. \square

Beweis von Satz 2.1.4. O.B.d.A. $x_* = 0$ und nach Lemma 2.1.5 eine Basis des \mathbb{R}^n so gewählt, dass der symmetrische Anteil von $Df(x_*)$ negativ definit ist.

Betrachte $L(x) = \frac{1}{2}\langle x, x \rangle$.

Längs Orbits gilt $\dot{x} = Ax + \sigma(|x|^2)$, also

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \langle x, \dot{x} \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle + \sigma(|x|^3) \\ &= \langle x, \frac{1}{2}(A + A^T)x \rangle + \sigma(|x|^3) \\ &\leq -k|x|^2,\end{aligned}$$

falls $|x| \leq r$, $r > 0$ hinreichend klein. Behauptung folgt aus 2.1.3. \square

Bemerkung

Das Prinzip der linearen Stabilität gilt nicht nur für endlich-dimensionale, dynamische Systeme, sondern in einer Vielzahl anderer Kontexte.

2.2 Stabile und instabile Mannigfaltigkeiten hyperbolischer Ruhelagen

Definition 2.2.1

Sei x_* Ruhelage eines dynamischen Systems $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^k(M, \mathbb{R}^n)$, $M \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Die stabile bzw. instabile Menge von x_* ist definiert als $M^{s/u}(x_*) := \left\{ x \in M : \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Phi(t, x) = x_* \right\}$.

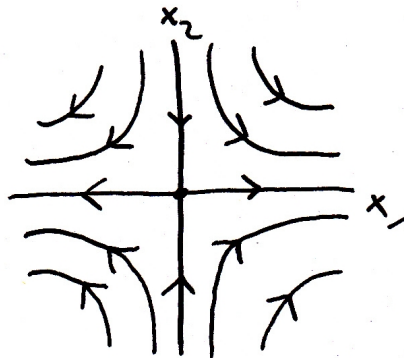
Beispiel

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2\end{aligned}$$

Ruhelage $x_* = (0, 0)$.

$$M^s(x_*) = \{0\} \times \mathbb{R}$$

$$M^u(x_*) = \mathbb{R} \times \{0\}$$



(ii) Unterschieden werden der stabile Raum bei x_* , der instabile Raum bei x_* , der neutrale (zentrale) Raum bei x_* , definiert als

$$E^s(x_*) := \text{max. inv. UR von Df}(x_*) \text{ zu EW mit } \text{Re} < 0,$$

$$E^u(x_*) := \text{max. inv. UR von Df}(x_*) \text{ zu EW mit } \text{Re} > 0,$$

$$E^c(x_*) := \text{max. inv. UR von Df}(x_*) \text{ zu EW mit } \text{Re} = 0.$$

In Worten also die direkte Summe der (ja invarianten) verallgemeinerten Eigenräumen zu EW mit $\text{Re} < 0$ bzw. $\text{Re} > 0$ bzw. $\text{Re} = 0$.

Ferner schreibt man $E^h(x_*) = E^u(x_*) \oplus E^s(x_*)$.

(iii) Ruhelage heißt "hyperbolisch" $:\Leftrightarrow E^c(x_*) = \{0\}$ und $E^h(x_*) = \mathbb{R}^n$.

Satz 2.2.2 (Existenz der (in-)stabilen Mannigfaltigkeit)

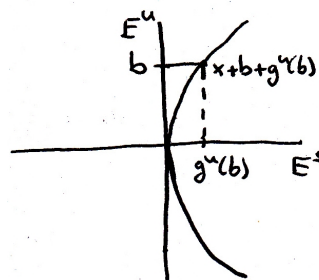
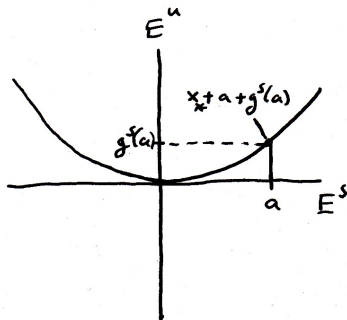
Wenn die Ruhelage x_* hyperbolisch ist, sind $M^s(x_*)$ und $M^u(x_*)$ C^k -Mannigfaltigkeiten. Es gibt eine Umgebung U der 0 in \mathbb{R}^n und eindeutige Abbildungen

$$g^s \in C^k(E^s(x_*) \cap U, E^u(x_*)) \text{ mit } g^s(0) = 0, Dg^s(0) = 0$$

$$g^u \in C^k(E^u(x_*) \cap U, E^s(x_*)) \text{ mit } g^u(0) = 0, Dg^u(0) = 0,$$

so dass $M^s(x_*) \cap (x_* + U) = \{x_* + \underbrace{a}_{\in E^s} + \underbrace{g^s(a)}_{\in E^u} : a \in E^s(x_*) \cap U\}$

und $M^u(x_*) \cap (x_* + U) = \{x_* + \underbrace{g^u(b)}_{\in E^s} + \underbrace{b}_{\in E^u} : b \in E^u(x_*) \cap U\}$.

**Definition 2.2.3**

In der Situation von Satz 2.2.2 werden die Mengen $M^s(x_*)$ und $M^u(x_*)$ als stabile und instabile Mannigfaltigkeiten bezeichnet; man schreibt dann eher $W^s(x_*)$, $W^u(x_*)$ statt $M^s(x_*)$, $M^u(x_*)$.

Beweis von Satz 2.2.2.

O.B.d.A. $x_* = 0$. Setze $A = Df(0)$, $h(x) = f(x) - Ax$ ($\Rightarrow h(x) = \sigma(|x|^2)$)

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + h(x) \quad \text{mit} \quad h(0) = 0, h'(0) = 0.$$

Wir beweisen die Aussage über die stabile Menge $M^s(x_*)$. (Die über $M^u(x_*)$ folgt daraus durch "Zeitumkehr".)

Benötigen $P_s = \text{Proj. auf } E^s \text{ längs } E^u$ (d.h. $\mathcal{R}(P_s) = E^s$, $\mathcal{N}(P_s) = E^u$),

$P_u = \text{Proj. auf } E^u \text{ längs } E^s$ (d.h. $\mathcal{R}(P_u) = E^u$, $\mathcal{N}(P_u) = E^s$),

(D.h. für $x = a + b$ mit $a \in E^s$, $b \in E^u$ ist $P_s(x) = a$, $P_u(x) = b$.)

Konstante $M \geq 1$, $0 < \eta < \min\{|\text{Re } \lambda| : \lambda \text{ EW von } A\}$:

$$\forall t \geq 0 : \|e^{tA} P_s\| \leq M e^{-\eta t}$$

$$\|e^{-tA} P_u\| \leq M e^{-\eta t}$$

und $r, c > 0 : |h(x)| \leq c|x| \quad \forall x \text{ mit } |x| \leq r$.

Einschub:

$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$ ist der Lösungsoperator des linearen Systems

(1) $\dot{x} = Ax$; d.h. die Lösung des AWP's (1), (2) mit

(2) $x(0) = x_0$

ist $x(t) = e^{tA} x_0$.

Beweis. $x(0) = e^{0A}x_0 = x_0$ und $\dot{x}(t) = \frac{d(e^{tA})}{dt}x_0 = Ae^{tA}x_0 = Ax(t)$. \square

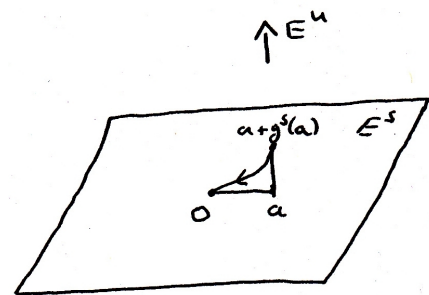
Beispiel

(i) $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n): e^{tA} = \text{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$

$$(ii) A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} : e^{tA} = \dots$$

AWP $\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ wird gelöst durch $x(t) = e^{tA} \left(x_0 + \int_0^t e^{-sA} \varphi(s) ds \right)$.

Vorüberlegung: Angenommen zu $a \in E^s$ gibt es ein $g^s(a) \in E^u$, so dass der Orbit y von (1) mit $y(0) = a + g^s(a)$ den ω_+ -Limes $\{x_*\}$ hat.



Dieser Orbit erfüllt

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tA} \left(y(0) + \int_0^t e^{-sA} h(y(s)) ds \right) \\ &= e^{tA} \left(\underbrace{y(\infty)}_{=0} + \int_{\infty}^t e^{-sA} h(y(s)) ds \right) \\ &= e^{tA} \left(- \int_t^{\infty} e^{-sA} h(y(s)) ds \right) \end{aligned}$$

Wir machen diese Vorstellung nutzbar, indem wir die Darstellung $y(t) = P_s y(t) + P_u y(t)$ mit

$$\begin{aligned} P_s y(t) &= e^{tA} a + \int_0^t e^{(t-s)A} P_s h(y(s)) ds \\ P_u y(t) &= - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A} P_u h(y(s)) ds, \end{aligned}$$

verwenden. Dabei haben wir $P_s e^{tA} = e^{tA} P_s$, $P_u e^{tA} = e^{tA} P_u$ genutzt. ($\Leftarrow P_s A = A P_s$ und $P_u A = A P_u$.)

Bei Darstellung bezüglich $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$: $A = \begin{pmatrix} A^s & 0 \\ 0 & A^u \end{pmatrix}$, $P_s = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Wollen lösen (für kleine a):

$$(2) \quad y(t) = e^{tA} a + \int_0^t e^{(t-s)A} P_s h(y(s)) ds - \int_t^{\infty} e^{(t-s)A} P_u h(y(s)) ds.$$

Lemma 2.2.4

Betrachte Banachraum $Y := \left\{ y \in C([0, \infty), \mathbb{R}^n) : \|y\|_\eta := \sup_{t \geq 0} \left\{ |y(t)| e^{\frac{\eta}{2}t} \right\} < \infty \right\}$. Es existieren $\delta, \rho \geq 0$ und eine Abbildung $\psi \in C^1(B_\delta^{E^s}(0), B_\rho^Y(0))$, so dass für $a \in B_\delta^{E^s}(0)$ die Integralgleichung (2) genau eine Lösung in $B_\rho^Y(0)$, nämlich $\psi(a)$, besitzt. Ferner liegt die Abbildung $g^s : a \mapsto -\int_0^\infty e^{-As} P_u h(\psi(a))(s) ds$ in $C^1(B_\delta^{E^s}(0), E^u)$ und erfüllt $g^s(0) = 0$.

Beweis. Die Abbildung $F : E^s \times B_\rho^Y(0) \rightarrow Y$, gegeben durch

$$F(a, y)(t) = y(t) - e^{tA}a - \int_0^t e^{(t-s)A} P_s h(y(s)) ds + \int_t^\infty e^{(t-s)A} P_u h(y(s)) ds$$

ist Frechét-differenzierbar mit $D_a F(a, y) = -e^{tA}|_{E^s}$ und

$$D_y F(a, y)(z)(t) = z(t) - \int_0^t e^{(t-s)A} P_s h'(y(s)) z(s) ds + \int_t^\infty e^{(t-s)A} P_u h'(y(s)) z(s) ds.$$

Insbesondere $F(0, 0) = 0$ und $D_y F(0, 0)(z)(t) = z(t)$, kurz $D_y F(0, 0) = \text{id}_Y$. Die Existenz und Eigenschaften der lösenden Funktion ψ folgen aus dem Satz über implizite Funktionen in Banachräumen.

Es ist noch zu zeigen, dass $\mathcal{R}(F) \subset Y$.

Betrachte

$$F(a, y)(t) = \underbrace{y(t)}_{\in Y} - \underbrace{e^{At}a}_{\in Y} - \underbrace{\int_0^t e^{A(t-s)} P_s h(y(s)) ds}_{=: \alpha} + \underbrace{\int_t^\infty e^{A(t-s)} P_u h(y(s)) ds}_{=: \beta}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq C_1 \int_0^t e^{-\eta(t-s)} e^{-\frac{\eta}{2}s} ds \\ &= C_1 \frac{2}{\eta} e^{\eta(-t+\frac{s}{2})} \Big|_0^t \\ &\leq C_2 e^{-\frac{\eta}{2}t}. \end{aligned}$$

Daher also $\alpha \in Y$ und analog $\beta \in Y$. Insgesamt $F(a, y) \in Y$.

Wegen $y(0) = a - \int_0^\infty e^{-As} P_u h(y(s)) ds$ ist $\psi(a)(0) = a + g^s(a)$

mit $g^s(a) = -\int_0^\infty e^{-As} P_u h(\psi(a))(s) ds$. Diese Abbildung $g^s : B_\rho^Y(0) \rightarrow E^u$ ist C^k (da ψ nach dem Satz über implizite Funktionen C^k) und erfüllt $g^s(0) = 0$ und $Dg^s(0) = 0$. Ersteres weil $\psi(0) = 0$, letzteres, da $Dg^s(0) = -\int_0^\infty e^{-As} P_u \underbrace{h'(\psi(0))}_{=0, \text{ da } \psi(0)=0 \text{ und } h'(0)=0} \psi(0)(s) ds$.

Hiermit haben wir eine lokale invariante Mannigfaltigkeit

$$W_{loc}^s(x_*) = \left\{ x_* + a + g^s(a) : a \in B_\delta^{E^s}(0) \right\} \subset M^s(x_*)$$

so charakterisiert wie in der Aussage des Satzes angegeben. □

Zeige jetzt, dass diese Mannigfaltigkeit schon "alles" ist:

Lemma 2.2.5

Mit einer geeigneten Umgebung V von x_* ist $M^s(x_*) \cap V = W_{loc}^s(x_*)$.

Beweis. Sei $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Lösung von $\dot{x} = f(x)$. Dann existiert das Integral

$$\int_t^\infty \underbrace{e^{A(t-s)} P_u}_{|\cdot| \leq M e^{-\eta(t-s)}} \underbrace{h(x(s))}_{\leq C, \text{ da } x \text{ beschr.}} ds.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \underbrace{P_u x(t)}_{\text{beschr.}} &= e^{At} P_u x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds \\ &= e^{At} P_u x(0) + \int_0^\infty e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds - \int_t^\infty e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds \\ &= e^{At} \left(\underbrace{P_u x(0) + \int_0^\infty e^{-As} P_u h(x(s)) ds}_{\text{beschr.} \Rightarrow (\dots) = 0} \right) - \underbrace{\int_t^\infty e^{A(t-s)} P_u h(x(s)) ds}_{\text{beschr.}}. \end{aligned}$$

Also $P_u x(0) = g^s(P_s x(0))$ für $x(0)$ nahe x_* (d.h. in einer passenden Umgebung V von x_*). \square

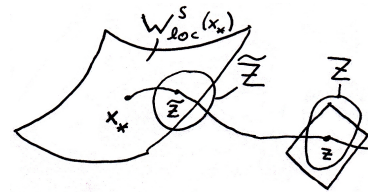
Bleibt noch zu zeigen:

Lemma 2.2.6

$M^s(x_*)$ ist auch global "weit weg" von x_* eine Mannigfaltigkeit.

Beweis.

Sei $z \in M^s(x_*)$ beliebig. Dann gibt es ein $T > 0$, so dass $\tilde{z} = \Phi(T, z) \in V$ aus Lemma 2.2.5. Der Diffeomorphismus $\Phi(T, \cdot)$ bildet eine Umgebung Z von z auf eine Umgebung \tilde{Z} von \tilde{z} ab. Dabei ist $M^s(x_*) \cap \tilde{Z} = \Phi(T, M^s(x_*) \cap Z)$. Deshalb ist mit $M^s(x_*) \cap Z$ auch das Bild $M^s(x_*) \cap \tilde{Z}$ differenzierbare Mannigfaltigkeit.



\square
 \square

2.3 Zentrumsmannigfaltigkeiten ("center manifolds")

Satz 2.3.1

(i) Sei x_* eine nicht hyperbolische Ruhelage, $f \in C^{k,1}$. Dann gibt es eine Umgebung U in \mathbb{R}^n von 0 und eine Abbildung

$$g^c \in C^{k,1} \left(E^c(x_*) \cap U, E^h(x_*) \right) \quad \text{mit} \quad g^c(0) = 0, Dg^c(0) = 0,$$

so dass mit $M_U^c(x_*) = \{x_* + y + g^c(y) : y \in E^c(x_*) \cap U\}$ die Menge $W^c(x_*) = \Phi(\mathbb{R}, M_U^c(x_*))$ eine invariante Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Ist $x_0 \in M_U^c(x_*)$ und $|\Phi(t, x_0)| \leq \rho$ für alle $0 \leq t \leq T$, so ist $\Phi(t, x_0) \in M_U^c(x_*)$ für alle $0 \leq t \leq T$.

Bemerkung

$C^{k,1} := \{f \in C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \|f\|_\infty < \infty, D^k f \text{ Lip-stetig mit Lip-Konstante } 1\}$.

Satz 2.3.2 (Zentrumsmanigfaltigkeit "für Abbildungen" (d.h. für diskrete dynamische Systeme))

Sei $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare, umkehrbare Abbildung, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{R}^n = E^{cu} \oplus E^s$ ("cu" = "center-unstable", "s" = "stable") eine T -invariante Zerlegung, so dass $\|T_s\| < 1$, $\|T_s\| \cdot \|T_{cu}^{-1}\|^{k+1} < 1$ für $T_s := T|_{E^s}$, $T_{cu} := T|_{E^{cu}}$. Dann gilt mit einem $\epsilon > 0$: Falls $g \in C^{k,1}$ mit $\text{Lip}(g) \leq \epsilon$, so hat die Abbildung $u \mapsto f(u) := Tu + g(u)$ eine invariante Mannigfaltigkeit, die gegeben ist als Graph einer $C^{k,1}$ -Abbildung $\sigma^* : E^{cu} \rightarrow E^s$.

Bemerkung

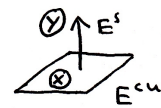
Die Verbindung zwischen Satz 2.3.2 und Satz 2.3.1 besteht in der Interpretation $T = e^{\tau A}$ mit $A = Df(x_*)$ mit einem kleinen $\tau > 0$.

So ist etwa: $EWe \lambda \text{ von } A|_{E^s} \text{ haben } \text{Re } \lambda < 0 \iff EWe \kappa \text{ von } T|_{E^s} \text{ haben } |\kappa| < 1$.

Begründung: $\lambda \text{ EW von } A \Rightarrow \kappa = e^{\tau \lambda} \text{ EW von } T$.

Beweis von Satz 2.3.2.

Schreiben im Folgenden $(x, y) \in E^{cu} \oplus E^s = \mathbb{R}^n$, $|(x, y)| = \max\{|x|, |y|\}$.
 $f(x, y) = T(x, y) + g(x, y) = (f_{cu}(x, y), f_s(x, y))$.

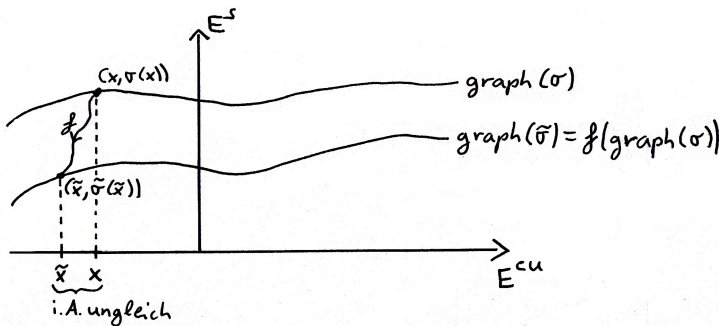


(A) Skizze des Beweises

Idee: Graphentransformation

Betrachte den Graphen einer Abbildung $\sigma : E^{cu} \rightarrow E^s$, $\text{graph}(\sigma) = \{(x, \sigma(x)) : x \in E^{cu}\}$. Gesucht ist eine Abbildung $\sigma^* : E^{cu} \rightarrow E^s$, deren Graph unter f invariant ist, d.h. $f(\text{graph}(\sigma^*)) = \text{graph}(\sigma^*)$.

Angenommen zu irgendeinem $\sigma : E^{cu} \rightarrow E^s$ existiert $\tilde{\sigma} : E^{cu} \rightarrow E^s$, so dass $f(\text{graph}(\sigma)) = \text{graph}(\tilde{\sigma})$, dann schreibe $\Gamma_f(\sigma) = \tilde{\sigma}$ (Graphentransformation).



D.h. $\tilde{\sigma} = \Gamma_f(\sigma)$ ist die Funktion, die jedem $\tilde{x} \in E^{cu}$ mit Hilfe des zu \tilde{x} (hoffentlich) eindeutigen x mit $f_{cu}(x, \sigma(x)) = \tilde{x}$ den Wert $f_s(x, \sigma(x))$ zuordnet.

Kurz: $(\Gamma_f(\sigma))(\tilde{x}) = \left(f_s \circ \begin{pmatrix} \text{id} \\ \sigma \end{pmatrix} \right) \circ \left(f_{cu} \circ \begin{pmatrix} \text{id} \\ \sigma \end{pmatrix} \right)^{-1}(\tilde{x})$, falls Inverse existiert.

Ziel: Zu zeigen, dass die "Graphentransformation" Γ_f auf der Menge

$$\Sigma := \{ \sigma : E^{cu} \rightarrow E^s : \|\sigma\|_\infty < \infty, \text{Lip}(\sigma) < 1 \} \subset C^0(E^{cu}, E^s)$$

wohldefiniert und eine kontrahierende Selbstabbildung ist. Da Σ eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $(C^0, \|\cdot\|_\infty)$ ist, existiert genau ein Fixpunkt σ^* von Γ_f . Dieser entspricht dem gesuchten Objekt. Dann bleibt noch nachzuweisen, dass sogar $\sigma^* \in C^{k,1}$.

(B) Zwei Lemmata, die bei der Durchführung des Beweises benötigt werden

Lemma 2.3.3 (Globale Umkehrbarkeit Lipschitz-stetiger Funktionen)

Seien $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und umkehrbar und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschränkt mit $\text{Lip}(g) < \|T^{-1}\|^{-1}$.

Dann ist $T + g$ global invertierbar und die durch $(T + g)^{-1} = T^{-1} - h$ gegebene Funktion h beschränkt und Lipschitz-stetig mit $\text{Lip}(h) \leq \frac{\text{Lip}(g)\|T^{-1}\|^2}{1 - \text{Lip}(g)\|T^{-1}\|}$.

Beweis. Eine Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ erfüllt $(T + g) \circ (T^{-1} - h) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ genau dann, wenn $h = T^{-1} \circ g \circ (T^{-1} - h)$ (★).

(Begründung: Mit $y = Tx + g(x)$, $x = T^{-1}y - h(y)$ folgt $y = y - Th(y) + g(T^{-1}y - h(y))$, also $Th(y) = g(T^{-1}y - h(y))$.)

(★) heißt aber genau: h ist Fixpunkt der Abbildung $G : h \mapsto T^{-1} \circ g \circ (T^{-1} - h)$. Wir betrachten G auf der Menge $H = \left\{ h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \|h\|_\infty < \infty, \text{Lip}(h) \leq \frac{\text{Lip}(g)\|T^{-1}\|^2}{1 - \text{Lip}(g)\|T^{-1}\|} \right\}$ mit der C^0 -Norm. Aus den Eigenschaften

(i) $G(H) \subset H$

(ii) G Kontraktion

folgt die Behauptung aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Zu (i):

$$\begin{aligned} \text{Lip}(G(h)) &\leq \|T^{-1}\| \text{Lip}(g) (\|T^{-1}\| + \text{Lip}(h)) \\ &\leq \|T^{-1}\| \text{Lip}(g) \frac{\|T^{-1}\| (1 - \text{Lip}(g) \|T^{-1}\|) + \text{Lip}(g) \|T^{-1}\|^2}{1 - \text{Lip}(g) \|T^{-1}\|} \\ &= \frac{\text{Lip}(g) \|T^{-1}\|^2}{1 - \text{Lip}(g) \|T^{-1}\|}. \end{aligned}$$

Zu (ii): Für $h_1, h_2 \in H$, $x \in \mathbb{R}^n$:

$$|G(h_1(x)) - G(h_2(x))| \leq \|T^{-1}\| \text{Lip}(g) |h_1(x) - h_2(x)|.$$

Also $\|G(h_1) - G(h_2)\|_\infty \leq \theta \|h_1 - h_2\|_\infty$ mit $\theta = \|T^{-1}\| \text{Lip}(g) < 1$ (nach Vor.). \square

Lemma 2.3.4

Für jede Wahl von $r_2, \dots, r_{k+1} > 0$ ist die Menge

$B_{r_2, \dots, r_{k+1}} = \left\{ \sigma \in C^{k,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : \|\text{D}\sigma\| \leq 1, \|\text{D}^2\sigma\| \leq r_2, \dots, \|\text{D}^k\sigma\| \leq r_k, \text{Lip}(\text{D}^k\sigma) \leq r_{k+1} \right\}$ abgeschlossene Teilmenge von C^0 mit Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis. Für $k = 0$ ist dies leicht zu zeigen. Wir beweisen es hier für $k = 1$ (woraus sich die allgemeine Aussage leicht durch Induktion ergibt). Es reicht zu zeigen, dass

$$B = \left\{ f \in C^{1,1} : \|f\| < \infty, \|\text{D}f\| < 1, \text{Lip}(\text{D}f) \leq r \right\},$$

mit $r > 0$ in C^0 abgeschlossen ist.

Sei $f_n \in B$ eine Folge mit $f_n \rightarrow f \in C^0$, $n \rightarrow \infty$.

1. Als gleichmäßiger Limes beschränkter Funktionen ist f beschränkt.

2. Für beliebiges $g \in C^{1,1}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $g(x + y) - g(x) = \int_0^1 \text{D}g(x + \tau y) d\tau y$, es folgt

$$\begin{aligned} |g(x + y) - g(x) - \text{D}g(x)y| &= \left| \int_0^1 (\text{D}g(x + \tau y) - \text{D}g(x))y d\tau \right| \\ &\leq |y| \int_0^1 \|\text{D}g(x + \tau y) - \text{D}g(x)\| d\tau \\ &\leq \text{Lip}(\text{D}g) |y|^2, \end{aligned}$$

und

$$\|\text{D}g(x)\|_\rho \leq 2 (\|g\| + \text{Lip}(\text{D}g) \rho^2) \text{ für alle } \rho > 0.$$

Speziell für $g = f_n - f_m$ erhalten wir

$$\|Df_n(x) - Df_m(x)\| \leq 2 \min_{\rho > 0} \left\{ \frac{\|f_n - f_m\|}{\rho} + r\rho \right\} = 2\sqrt{\rho} \|f_n - f_m\|^{\frac{1}{2}}.$$

Da f_n Cauchy, ist auch Df_n Cauchy, also f differenzierbar mit $Df_n \rightarrow Df$ in C^0 ; insbesondere $\|Df\| \leq 1$.

3. $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N, \forall x, y \in \mathbb{R}^n :$

$$\begin{aligned} \|Df(x) - Df(y)\| &\leq \|Df(x) - Df_n(x)\| + \|Df_n(x) - Df_m(y)\| + \|Df_m(y) - Df(y)\| \\ &< \epsilon + r|x - y|. \end{aligned}$$

Also $\|Df(x) - Df(y)\| \leq r|x - y|$, $\text{Lip}(Df) < r$. □

© Illustration: f linear

In diesem Fall lautet die Graphentransformation schlicht $\Gamma_f(\sigma) = T_s \circ \sigma \circ T_{cu}^{-1}$.

Obwohl dieser Fall vom Ergebnis her trivial ist (der Fixpunkt ist $\sigma_* = 0$), verifizieren wir hier die Funktionsweise des Argumentationsausgangs. Zunächst: Γ_f ist eine kontrahierende Selbstabbildung der Menge

$$\Sigma = \{\sigma : E^{cu} \rightarrow E^s : \|\sigma\| < \infty, \text{Lip}(\sigma) \leq 1\}$$

Da T_s, T_{cu}^{-1} linear, ist $\text{Lip}(\Gamma_f(\sigma)) \leq \|T_s\| \|\text{Lip}(\sigma)\| \|T_{cu}^{-1}\| < \text{Lip}(\sigma)$ und $\|\Gamma_f(\sigma)\| \leq \|T_s\| \|\sigma\| \|T_{cu}^{-1}\|$, also $\Gamma_f(\Sigma) \subset \Sigma$.

Um zu zeigen, dass Γ_f auf Σ eine Kontraktion ist, bemerke, dass für alle $x \in E^{cu}$:

$$\begin{aligned} |\Gamma_f(\sigma_1)(x) - \Gamma_f(\sigma_2)(x)| &= |T_s \sigma_1(T_{cu}^{-1}x) - T_s \sigma_2(T_{cu}^{-1}x)| \\ &\leq \|T_s\| |\sigma_1(T_{cu}^{-1}x) - \sigma_2(T_{cu}^{-1}x)| \\ &\leq \|T_s\| \|\sigma_1 - \sigma_2\| \end{aligned}$$

also $\|\Gamma_f(\sigma_1) - \Gamma_f(\sigma_2)\| \leq \|T_s\| \|\sigma_1 - \sigma_2\| < \|\sigma_1 - \sigma_2\|$, wobei die letzte Ungleichung nach Voraussetzung des Satzes gilt. Hieraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes σ_* .

Wie zeigt man die $C^{k,1}$ -Beschaffenheit (die im hier betrachteten Fall natürlich trivialerweise vorliegt)?

Betrachten die Ableitungen (bzw. multilinearen Abbildungen)

$$D^j \sigma(x) : E^{cu} \times \dots \times E^{cu} \rightarrow E^s$$

für jedes $x \in E^{cu}$. Für jedes x und jede Wahl von $x_1, \dots, x_j \in E^{cu}$ ist

$$D^j(\Gamma_f(\sigma))(x) [x_1, \dots, x_j] = T_s D^j \sigma(T_{cu}^{-1}x) [T_{cu}^{-1}x_1, \dots, T_{cu}^{-1}x_j]$$

Wir kürzen dies ab als " $D^j \Gamma_f(\sigma)(x) = T_s D^j \sigma(T_{cu}^{-1}x) [T_{cu}^{-1}x_j]^j$ ".

Hieraus folgt $\|D^j \Gamma_f(\sigma)\| \leq \|T_s\| \|D^j \sigma\| \|T_{cu}^{-1}\|^j$. Da nach Annahme des Satzes $\|T_s\| \|T_{cu}^{-1}\|^{k+1} \leq 1$, folgt

$$\|D^j \Gamma_f(\sigma)\| \leq \|D^j \sigma\|, \quad \text{Lip}(D^k \Gamma_f(\sigma)) \leq \|T_s\| \|T_{cu}^{-1}\|^{k+1} \text{Lip}(D^k \sigma) \leq \text{Lip}(D^k \sigma)$$

Also bildet Γ_f jede Menge der Form

$$B_{r_2, \dots, r_{k+1}}^k = \left\{ \sigma \in \Sigma : \|D\sigma\| \leq 1, \|D^2\sigma\| \leq r_2, \dots, \|D^k\sigma\| \leq r_k, \text{Lip}(D^k\sigma) \leq r_{k+1} \right\}$$

in sich selbst ab. Nach Lemma 2.3.4 ist $B_{r_2, \dots, r_{k+1}}^k$ in C^0 abgeschlossen, also $\sigma_* \in C^{k,1}$.

Ⓓ Existenz des Fixpunktes Nach den Annahmen des Satzes gelten für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$ die Ungleichungen

$$(1) \begin{cases} 1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\| > 0, \\ (\epsilon + \|T_s\|) \frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} < 1, \\ \|T_s\| + \epsilon < 1. \end{cases}$$

Wir fixieren ein $\epsilon > 0$ mit den Eigenschaften (1) und $g \in C^{k,1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\text{Lip}(g) \leq \epsilon$. Für $\sigma \in \Sigma$ schreiben wir $\hat{\sigma} = (\text{id}, \sigma)$.

1. Müssen zunächst zeigen: Die Graphentransformation

$$\sigma \mapsto \Gamma_f(\sigma) = (f_s \circ \hat{\sigma}) \circ (f_{cu} \circ \hat{\sigma})^{-1}$$

ist wohldefiniert; insbesondere ist

$$\tilde{x} \mapsto (f_{cu} \circ \hat{\sigma})(\tilde{x}) = f_{cu}(\tilde{x}, \sigma(\tilde{x})) = T_{cu}\tilde{x} + g_{cu}(\tilde{x}, \sigma(\tilde{x}))$$

invertierbar mit Lipschitz-stetiger Umkehrfunktion.

Da $\text{Lip}(\sigma) < 1$, ist $\text{Lip}(g_{cu} \circ \hat{\sigma}) \leq \text{Lip}(g_{cu}) \leq \epsilon < \|T_{cu}^{-1}\|^{-1}$ nach (1)₁. Nach Lemma 2.3.3 impliziert dies, dass $f_{cu} \circ \hat{\sigma}$ eine Lipschitz-stetige Inverse

$$(f_{cu} \circ \hat{\sigma})^{-1} = T_{cu}^{-1} - h_\sigma =: w_\sigma$$

hat, wobei für $h_\sigma : E^{cu} \rightarrow E^s$ gilt:

$$(2) \begin{cases} \text{Lip}(h_\sigma) \leq \frac{\epsilon \|T_{cu}^{-1}\|^{-2}}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|}, \\ \text{Lip}(w_\sigma) \leq \|T_{cu}^{-1}\| + \text{Lip}(h_\sigma) \leq \frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|}. \end{cases}$$

Also gezeigt.

2. Nächstes Teilziel:

Lemma 2.3.5

Zu $\sigma \in \Sigma$ ist $\Gamma_f(\sigma) \in \Sigma$.

Beweis. D.h. müssen zeigen, dass

- (i) $\|\Gamma_f(\sigma)\| < \infty$,
- (ii) $\text{Lip}(\Gamma_f(\sigma)) \leq 1$.

Zu (i):

$$\begin{aligned} \|\Gamma_f(\sigma)\| &\leq \|T_s \circ \sigma \circ w_\sigma\| + \|g_s \circ \hat{\sigma} \circ w_\sigma\| \\ &\leq \|T_s\| \underbrace{\|\sigma\|}_{\leq 1} + \|g_s\| \quad (\text{wobei } \|T_s\| \text{ die Operatornorm und } \|\sigma\|, \|g_s\| \text{ die } C^0\text{-Norm bezeichnet}) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Zu (ii):

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\Gamma_f(\sigma)) &\leq \text{Lip}(T_s \circ \sigma \circ w_\sigma) + \text{Lip}(g_s \circ \hat{\sigma} \circ w_\sigma) \\ &\leq \|T_s\| \underbrace{\text{Lip}(\sigma)}_{\leq 1} \text{Lip}(w_\sigma) + \underbrace{\text{Lip}(g_s)}_{\leq \epsilon} \underbrace{\text{Lip}(\hat{\sigma})}_{\leq 1} \text{Lip}(w_\sigma) \\ &\leq (\|T_s\| + \epsilon) \text{Lip}(w_\sigma) \\ &\stackrel{(2)_2}{\leq} (\|T_s\| + \epsilon) \frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \\ &\stackrel{(1)_2}{\leq} 1. \end{aligned}$$

□

3. Nächstes Teilziel:

Lemma 2.3.6

Γ_f ist Kontraktion in Σ bzgl. C^0 -Norm.

Beweis. Angenommen, hätten schon:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Für jedes } \sigma \in \Sigma \text{ und jeden Punkt } (x, y) \in E^{cu} \oplus E^s \text{ gilt:} \\ |f_s(x, y) - \Gamma_f(\sigma)(f_{cu}(x, y))| \leq (\|T_s\| + \epsilon) |y - \sigma(x)|. \end{array} \right.$$

Sind dann zwei beliebige $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ und ein $z \in E^{cu}$ gegeben, so setzen wir $x = w_{\sigma_2}(z)$, $y = \sigma_2(x)$ und erhalten

$$\begin{aligned} |\Gamma_f(\sigma_2)(z) - \Gamma_f(\sigma_1)(z)| &= |(f_s \circ \hat{\sigma}_2 \circ w_{\sigma_2})(z) - \Gamma_f(\sigma_1)(\underbrace{f_{cu} \circ \hat{\sigma}_2 \circ w_{\sigma_2}}_{\text{id}_{E^{cu}}})(z)| \\ &= |f_s(x, \sigma_2(x)) - \Gamma_f(\sigma_1)(f_{cu}(x, \sigma_2(x)))| \\ &\stackrel{(5)}{\leq} (\|T_s\| + \epsilon) |\sigma_2(x) - \sigma_1(x)| \\ &\leq (\|T_s\| + \epsilon) \|\sigma_2 - \sigma_1\|, \end{aligned}$$

also, da z beliebig war, mit (1)₃:

$$(6) \quad \|\Gamma_f(\sigma_2) - \Gamma_f(\sigma_1)\| \leq \theta \|\sigma_2 - \sigma_1\| \text{ mit } \theta < 1.$$

Abschätzung (6) ist bewiesen, sobald (5) bewiesen ist.

Haben

$$\begin{aligned} f_{cu}(x, y) &= T_{cu}x + g_{cu}(x, y), \\ f_s(x, y) &= T_sy + g_s(x, y). \end{aligned}$$

Finden

$$\begin{aligned} |f_s(x, y) - \Gamma_f(\sigma)(f_{cu}(x, y))| &\leq |f_s(x, y) - f_s(x, \sigma(x))| + |f_s(x, \sigma(x)) - \Gamma_f(\sigma)(f_{cu}(x, y))| \\ &\leq |f_s(x, y) - f_s(x, \sigma(x))| + |\Gamma_f(\sigma)(f_{cu}(x, \sigma(x))) - \Gamma_f(\sigma)(f_{cu}(x, y))| \\ &\leq |T_sy - T_s\sigma(x)| + |g_s(x, y) - g_s(x, \sigma(x))| \\ &\quad + \underbrace{\text{Lip}(\Gamma_f(\sigma))}_{\leq 1} |f_{cu}(x, \sigma(x)) - f_{cu}(x, y)| \\ &\leq |T_sy - T_s\sigma(x)| + |g_s(x, y) - g_s(x, \sigma(x))| \\ &\quad + |\cancel{T_{cu}x} + g_{cu}(x, \sigma(x)) - \cancel{T_{cu}x} - g_{cu}(x, y)| \\ &\leq (\|T_s\| + \epsilon) |y - \sigma(x)| + \underbrace{\text{Lip}(g_{cu})}_{< \epsilon} |y - \sigma(x)| \\ &\leq (\|T_s\| + 2\epsilon) |y - \sigma(x)|. \end{aligned}$$

□

4. Durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatz folgt

Proposition 2.3.7

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.3.2 existiert ein eindeutiges $\sigma^* \in \Sigma$ mit $\Gamma_f(\sigma^*) = \sigma^*$.

(E) Noch zu zeigen: $\sigma^* \in C^{k,1}$.

Wir nehmen an, dass $k \geq 1$. Die Voraussetzung (Abschätzungen der Normen von T_s und T_{cu}^{-1}) impliziert, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass (1) hält und

$$\frac{(\|T_s\| + \epsilon) \|T_{cu}^{-1}\|^{k+1}}{(1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|)^{k+2}} < 1 \quad (7)$$

Lemma 2.3.8

Für jedes $l \geq 1$ und alle Funktionen G_1, G_2 und G_3 in C^l gilt

$$\|D^l(G_1 \circ G_2 \circ G_3)\| \leq \|D^l G_1\| \|DG_2\|^l \|DG_3\|^l + \|DG_1\| \|D^l G_2\|^l \|DG_3\|^l + \|DG_1\| \|DG_2\|^l \|D^l G_3\| + R_l \quad (8)$$

wobei R_l nur von $\|D^j G_m\|$ für $1 \leq j \leq l-1$ und $m = 1, 2, 3$ abhängt.

Beweis. Wir werden mit Induktion nach l zeigen, dass

$$\begin{aligned} D^l[(G_1 \circ G_2 \circ G_3)(x)] &= D^l G_1(G_2(G_3(x))) [DG_2(G_3(x)) \cdot DG_3(x)]^l \\ &\quad + DG_1(G_2(G_3(x))) \cdot D^l G_2(G_3(x)) [DG_3(x)]^l \\ &\quad + DG_1(G_2(G_3(x))) \cdot DG_2(G_3(x)) \cdot D^l G_3(x) + \tilde{R}_l(x), \end{aligned} \quad (9)$$

wobei \tilde{R}_l nur von $D^j G_m$ für $1 \leq j \leq l-1$ und $m = 1, 2, 3$ abhängt. Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} D[(G_1 \circ G_2 \circ G_3)(x)] &= DG_1(G_2(G_3(x))) \cdot DG_2(G_3(x)) \cdot DG_3(x) \\ D^2[(G_1 \circ G_2 \circ G_3)(x)] &= D^2 G_1(G_2(G_3(x))) [DG_2(G_3(x)) \cdot DG_3(x)]^2 \\ &\quad + DG_1(G_2(G_3(x))) \cdot D^2 G_2(G_3(x)) [DG_3(x)]^2 \\ &\quad + DG_1(G_2(G_3(x))) \cdot DG_2(G_3(x)) \cdot D^2 G_3(x), \end{aligned}$$

also ist (9) wahr für $l = 2$. Nehme an, dass (9) gilt und differenziere es einmal mehr, um $D^{l+1}[(G_1 \circ G_2 \circ G_3)(x)]$ zu erhalten. Da die einzigen Terme, die zu den $l+1$ -ten Ableitungen beitragen, die ersten drei Terme von (9) sind, ist es leicht zu sehen, dass (9) für $l+1$ wahr ist. Indem wir die Normen in (9) nehmen, erhalten wir (8). \square

Lemma 2.3.9

Für jedes $l \geq 2$ gilt

$$\|D^l \omega_\sigma\| = \|D^l h_\sigma\| \leq \epsilon \|D^l \sigma\| \left(\frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^{l+1} + C_l$$

für eine Konstante C_l , die nur von T , $\|g\|_{C^l}$, und $\|D^j \sigma\|$ für $1 \leq j \leq l-1$.

Beweis. Betrachte $h_\sigma = T_{cu}^{-1}(g_{cu} \circ \hat{\sigma} \circ \omega_\sigma)$. Die Abschätzung (8) zeigt, dass

$$\|D^l h_\sigma(x)\| \leq \|T_{cu}^{-1}\| (\|D^l g_{cu}\| \|D\hat{\sigma}\|^l \|D\omega_\sigma\|^l + \|Dg_{cu}\| \|D^l \hat{\sigma}\| \|D\omega_\sigma\|^l + \|Dg_{cu}\| \|D\hat{\sigma}\| \|D^l \omega_\sigma\| + R_l).$$

Wir wissen, dass $\|Dg_{cu}\| < \epsilon$, $\|D\hat{\sigma}\| \leq 1$ und $\|D^l \hat{\sigma}\| = \|D^l \sigma\|$. Daher impliziert (2), dass

$$\|D^l h_\sigma\| \leq \|T_{cu}^{-1}\| \|Dg_{cu}\| \left(\frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^l + \epsilon \|T_{cu}^{-1}\| \|D\sigma\| \left(\frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^l + \epsilon \|T_{cu}^{-1}\| \|Dh_\sigma\| + R_l.$$

Da $1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\| > 0$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \|Dh_\sigma\| &\leq \frac{1}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \left(\|T_{cu}^{-1}\| \|Dg_{cu}\| \left(\frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^l + \epsilon \|T_{cu}^{-1}\| \|D^l \sigma\| \left(\frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^l + R_l \right) \\ &= \epsilon \|D^l \sigma\| \left(\frac{\|T_{cu}^{-1}\|}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^{l+1} + C_l \end{aligned}$$

wobei C_l nur von T , $\|g\|_{C^l}$ und $\|D^j \sigma\|$ für $1 \leq j \leq l-1$, aber nicht von $\|D^l \sigma\|$ abhängt. Da $\omega = T - h_\sigma$ und $D^l T = 0$, gilt $\|D^l \omega_\sigma\| = \|D^l h_\sigma\|$. \square

Nun können wir die Ableitungen der Graphentransformation abschätzen.

Lemma 2.3.10

Für $\sigma \in \Sigma \cap C^l$ gilt

$$\|D^l \Gamma_f(\sigma)\| \leq \frac{(\|T_s\| + \epsilon) \|T_{cu}^{-1}\|^l}{(1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|)^{l+1}} \|D^l \sigma\| + \tilde{C}_l$$

für eine Konstante \tilde{C}_l , die nur von T , $\|g\|_{C^l}$ und $\|D^j \sigma\|$ für $1 \leq j \leq l-1$ abhängt.

Beweis. Da $\Gamma_f(\sigma) = f_s \circ \hat{\sigma} \circ \omega_\sigma$, ergibt die Abschätzung (8)

$$\|D^l(f_s \circ \hat{\sigma} \circ \omega_\sigma)\| \leq \|D^l f_s\| \|D\hat{\sigma}\|^l \|D\omega_\sigma\|^l + \|Df_s\| \|D^l \hat{\sigma}\| \|D\omega_\sigma\|^l + \|Df_s\| \|D\hat{\sigma}\| \|D^l \omega_\sigma\| + R_l.$$

Mit $\|D\hat{\sigma}\| \leq \|D\sigma\| \leq 1$, der Abschätzung (2) und $\|Df_s\| \leq \|T_s\| + \epsilon$ und Lemma 2.3.9 erhalten wir

$$\begin{aligned} \|D^l(f_s \circ \hat{\sigma} \circ \omega_\sigma)\| &\leq \|D^l f_s\| \left(\frac{T_{cu}^{-1}}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^l + \|Df_s\| \|D^l \sigma\| \left(\frac{T_{cu}^{-1}}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^l \\ &\quad + \|Df_s\| \left(\frac{T_{cu}^{-1}}{1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|} \right)^{l+1} \epsilon \|D^l \sigma\| + C_l + R_l \\ &= \frac{\|Df_s\| \|T_{cu}^{-1}\|^l}{(1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|)^{l+1}} \|D^l \sigma\| + \tilde{C}_l \leq \frac{(\|T_s\| + \epsilon) \|T_{cu}^{-1}\|^l}{(1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|)^{l+1}} \|D^l \sigma\| + \tilde{C}_l, \end{aligned}$$

wobei \tilde{C}_l nur von T , $\|g\|_{C^l}$ und $\|D^j \sigma\|$ für $1 \leq j \leq l-1$ abhängt. \square

Das nächste Lemma zeigt, dass $\Gamma_f(B_R^k) \subset B_R^k$ für ein entsprechendes R , vervollständigt somit den Beweis von Proposition 2.3.7 und damit auch den Beweis von Theorem 2.3.2.

Lemma 2.3.11

Es existiert ein $R = (r_2, r_3, \dots, r_{k+1})$ mit $r_j > 0$, sodass $\Gamma_f(B_R^k) \subset B_R^k$.

Beweis. Durch Induktion: Für $k = 1$ gilt

$$B_{r_2}^1 = \{\sigma \in \Sigma \cap C^{1,1} : \|D\sigma\| \leq 1, \text{Lip}(D\sigma) \leq r_2\}.$$

Für jedes $\sigma \in B_{r_2}^1 \cap C^2$ impliziert Lemma 2.3.10, dass

$$\text{Lip}(D\Gamma_f(\sigma)) \leq \frac{(\|T_s\| + \epsilon) \|T_{cu}^{-1}\|^2}{(1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|)^3} \text{Lip}(D\sigma) + \tilde{C}_2 \leq \frac{(\|T_s\| + \epsilon) \|T_{cu}^{-1}\|^2}{(1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|)^3} r_2 + \tilde{C}_2.$$

Mit (7) und da \tilde{C}_2 nicht von r_2 abhängt folgern wir, dass die rechte Seite kleiner gleich r_2 , falls wir r_2 so wählen, dass

$$r_2 \geq \tilde{C}_2 \left[1 - \frac{(\|T_s\| + \epsilon) \|T_{cu}^{-1}\|^2}{(1 - \epsilon \|T_{cu}^{-1}\|)^3} \right]^{-1}.$$

Da $B_{r_2}^1$ dicht in $B_{r_2}^1$ liegt, sichert diese Wahl von r_2 , dass $\Gamma_f(B_{r_2}^1) \subset B_{r_2}^1$. Dasselbe Argument kann verwendet werden um zu zeigen, dass wir rekursiv Konstanten $r_j > 0$ wählen können, sodass $\Gamma_f(B_R^k) \subset B_R^k$. \square

\square

Beweis von Satz 2.3.1. Schreiben das kontinuierliche dynamische System als

$$(10) \quad \dot{u} = f(u) = Au + h(u) \text{ mit } h(0) = 0, Dh(0) = 0.$$

Zerlege $\mathbb{R}^n = E^{cu} \oplus E^s$ mit E^{cu}, E^s invariant unter A mit $\text{Re}(\text{spec}(A|_{E^{cu}})) \geq 0$,

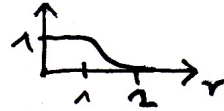
$\text{Re}(\text{spec}(A|_{E^s})) < 0$.

Anhand der Jordan-Normalform von A sieht man, dass mit hinreichend kleinem $\tau > 0$ für $T = e^{A\tau}$ und $T_{cu} = T|_{E^{cu}}$, $T_s = T|_{E^s}$ gilt $\|T_s\| < 1$, $\|T_s\| \|T_{cu}^{-1}\|^{k+1} < 1$.

Fixiere ein solches τ und ϵ wie in Satz 2.3.2.

Wähle C^∞ -Cutoff-Funktion $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\chi(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq 1 \\ 0, & r \geq 2 \end{cases}$$



und definiere

$$h_\rho(u) := \chi\left(\frac{|u|}{\rho}\right) h(u), \quad \rho > 0.$$

und betrachte

$$\dot{u} = Au + h_\rho(u).$$

Es gilt $h_\rho(u) = h(u)$ für $|u| < \rho$. Fluss des modifizierten Systems $\dot{u} = Au + h_\rho(u)$ werde bezeichnet mit Φ^ρ bzw. $\Phi_t^\rho = \Phi^\rho(t, \cdot)$ und erfüllt $\Phi_t^\rho(u) = e^{\tau A}u + g_\rho(u)$ mit $g_\rho(u) = \int_0^\tau e^{A(\tau-s)} h_\rho(\Phi_s^\rho(u)) ds$. Da $\|h_\rho\|_{C^1} \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$, ergibt sich leicht, dass $\|g_\rho\|_{C^1} \rightarrow 0$ für $\rho \rightarrow 0$.

Insbesondere gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\rho_\epsilon > 0$, so dass $\text{Lip}(g_\rho) < \epsilon$ für $0 < \rho < \rho_\epsilon$. Satz 2.3.2 ergibt eine invariante Mannigfaltigkeit der dort beschriebenen Art, speziell Graph einer Funktion $\sigma^* \dots$

Fixiere ρ .

Haben $\Phi_\tau^\rho(\text{graph}(\sigma^*)) = \text{graph}(\sigma^*)$.

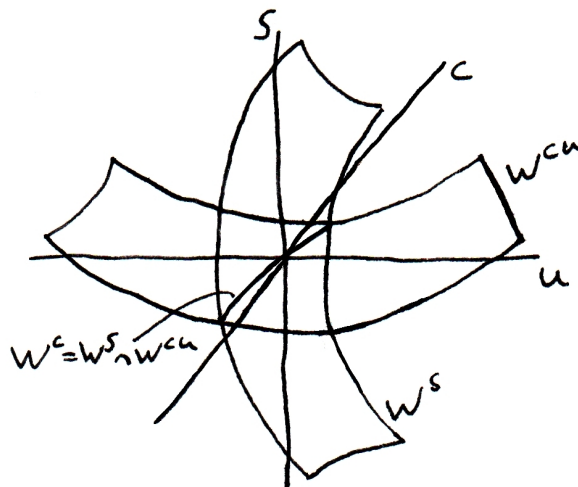
Zeigen noch, dass σ^* invariant nicht nur unter Φ_τ^ρ , sondern unter allen Φ_t^ρ , $t \in \mathbb{R}$. Für $t > 0$ hinreichend klein folgt: Da $\text{Lip}(\sigma^*) < 1$ nach (4) ist $\Phi_t^\rho(\text{graph}(\sigma^*)) = \text{graph}(\sigma_t^*)$.

Ferner

$$\begin{aligned} \Phi_\tau^\rho(\text{graph}(\sigma_t^*)) &= \Phi_\tau^\rho(\Phi_t^\rho(\text{graph}(\sigma^*))) \\ &= \Phi_{\tau+t}^\rho(\text{graph}(\sigma^*)) \\ &= \Phi_t^\rho(\Phi_\tau^\rho(\text{graph}(\sigma^*))) \\ &= \Phi_t^\rho(\text{graph}(\sigma^*)). \end{aligned}$$

Also $\text{graph}(\sigma^*)$ invariant unter Φ_t^ρ .

Genau wie $W^{cu}(0)$ konstruiere eindeutige zentrumsstabile Mannigfaltigkeit $W^{cs}(0)$. Schließlich finde die gesuchte Zentrumsmannigfaltigkeit als $W^c = W^{cu} \cap W^{cs}$.



□

Beispiel

Die Zentrumsmannigfaltigkeit ist nicht eindeutig, betrachte dazu:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2}$$

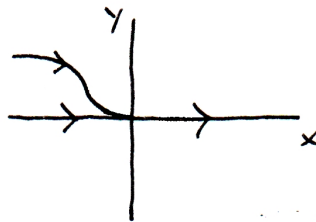
und mit Separation der Variablen

$$y = e^{\frac{1}{x} + C}$$

mit Integrationskonstante C . Daher ist jede Kurve

$$y = g_k(x) = \begin{cases} ke^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0, \end{cases}$$

$k \geq 0$, eine invariante C^∞ -Mannigfaltigkeit, die bei $(x, y) = (0, 0)$ an den zentralen Raum $E^c = \mathbb{R} \times \{0\}$ tangential ist.



Phänomen: Zentrumsmannigfaltigkeiten sind im Allgemeinen nicht eindeutig. Sowohl für kontinuierliche als auch für diskrete dynamische Systeme.

Frage: Warum ergab unser Beweis Eindeutigkeit?

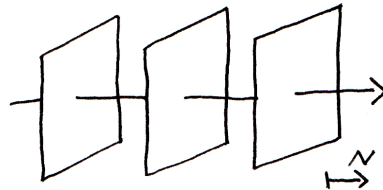
Antwort: Wir hatten die Suche auf Mannigfaltigkeiten beschränkt, die Graphen global Lipschitz-stetiger Funktionen sind. Die obigen Funktionen g_k sind zwar alle global Lipschitz-stetig; aber der im Beweis von Satz 2.3.1 vorgenommene Cutoff modifiziert diese Kurven derart, dass dann die x -Achse die einzige solche Kurve ist.

3 Ausblick: Traveling Waves

Existenz und Stabilität von Traveling Waves

Definition 3.0.1

(i) Zu einem gegebenen System $F\left(u(t, x_1, \dots, x_d), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right) = 0$, partieller Differentialgleichungen heißt eine Lösung $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_N(t, x))$ "Traveling Wave" $:\Leftrightarrow$ Sie ist von der Form $u(t, x) = v(x \cdot N - st)$ mit einer beschränkten Funktion v und einem $s \in \mathbb{R}$ (Geschwindigkeit der Welle) und einem $N \in \mathbb{R}^d$, $|N| = 1$ (Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle).



(ii) Welle heißt "homoklin" $:\Leftrightarrow u^\pm = v(\pm\infty)$ existieren und $u^- = u^+$.
 Welle heißt "heteroklin" $:\Leftrightarrow u^\pm = v(\pm\infty)$ existieren und $u^- \neq u^+$. Welle heißt "periodisch" $:\Leftrightarrow \exists \chi \neq 0 : v(\zeta + \chi) = v(\zeta), \forall \zeta \in \mathbb{R}$.

Das "Prah" v der Traveling Wave erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$F\left(v, -s \frac{d}{d\zeta}, N_1 \frac{\partial}{\partial \zeta}, \dots, N_d \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) = 0$$

1834: Scott Russell: "Wave of Translation"



1871/1876: Rayleigh, Boussinesq

1895: Korteweg, de Vries: Korteweg-de-Vries-Gleichung:

$$(KdV) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(3u^2)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^3}$$

Theorie ab 60er

Hier Traveling Waves:

$$u(t, x) = v(\underbrace{x - st}_{=\zeta})$$

in (KdV) einsetzen

$$\rightsquigarrow v'' = -sv' + 3(v^2)'$$

einmal integrieren

$$\rightsquigarrow v'' = -sv + 3v^2 + C$$

mit Integrationskonstante C , hier o.E.d.A. $C = 0$.

$$\boxed{v'' = -sv + 3v^2}$$

Als System erster Ordnung:

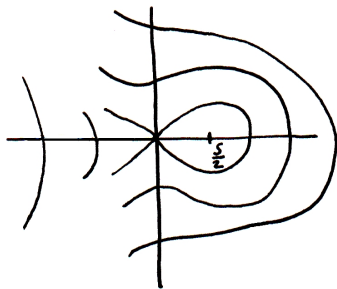
$$(*) \begin{cases} v' = w \\ w' = -sv + 3v^2 =: h(v) \end{cases}$$

(v_*, w_*) Ruhelage $\Leftrightarrow w_* = 0$ und $h(v_*) = 0$.

(*) Hamiltonsch mit Erhaltungsgröße

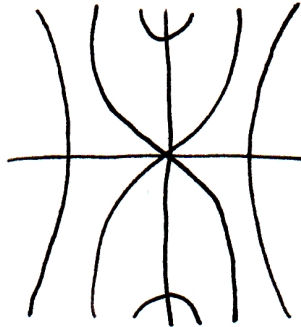
$$\begin{aligned} H(v, w) &= - \int h(v)dv + \frac{1}{2}w^2 \\ &= -v^3 + \frac{s}{2}v^2 + \frac{1}{2}w^2 \end{aligned}$$

Phasenportrait für $s > 0$



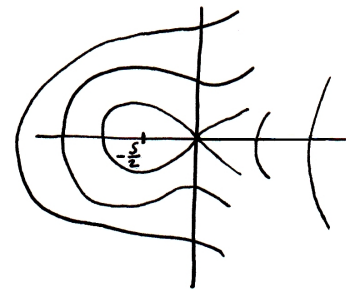
1 homokline TW
0 heterokline TW

Phasenportrait für $s = 0$



keine TW

Phasenportrait für $s = 0$



1 homokline TW
0 heterokline TW

Stabilität?

Gehe von (t, x) zu (t, \hat{x}) mit $\hat{x} = x - st$ über \rightsquigarrow Traveling Wave wird zu "Standing Wave" $\hat{v}(\hat{x})$.
 \hat{v} ist eine Ruhelage des dynamischen Systems

$$\frac{\partial}{\partial t} u = F[u] \quad (\text{DS})$$

Die Zustände sind Punkte in einem Hilbertraum. Man untersucht die Stabilität von \hat{v} durch Anwendung des Prinzips der linearisierten Stabilität anhand $A = DF$. Diese Untersuchung führt wieder auf endlich-dimensionale dynamische Systeme. Benötigen wieder ganze "Toolbox".