HTWG Konstanz
Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik
25. März 2020

Dr. Lothar Sebastian Krapp

Wintersemester 2019/2020

Nachklausur: Mathematik 1 (EIB)

Klausurnummer: 1

Matrikelnummer: Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ	Note
erreichte Punktzahl									
Maximalpunktzahl	10	10	10	10	10	10	10	60	

Wichtige Hinweise:

1. Überprüfen Sie Ihren Testbogen auf **Vollständigkeit**, d.h. das Vorhandensein aller **7 Aufgaben**.
2. Sie können so viele Aufgaben bearbeiten, wie Sie möchten. Die **besten 6 Aufgaben** werden gewertet.
3. Bei jeder Aufgabe ist der **vollständige Lösungsweg** zu dokumentieren. Nicht ausreichend begründete Lösungen können zu Punktabzug führen!
4. Sie dürfen alle Definitionen, Notationen und Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden, solange Sie diese klar benennen.
5. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben selbstständig und **ohne die Verwendung von Hilfsmitteln** außer Schreibzeug und Papier.
6. Verwenden Sie für Ihren Aufschrieb ausschließlich einen **dokumentenechten Stift**, also insbesondere **keinen Bleistift**! Aufschriebe mit Bleistift werden nicht gewertet. Graphen und Skizzen dürfen mit Bleistift erstellt werden.
7. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihre Matrikelnummer.
8. Schreiben Sie Ihre Antworten leserlich auf das Blatt unter die Aufgabenstellung oder, falls der Platz nicht ausreicht, unter Angabe der bearbeiteten Aufgabe, auf das weiße Arbeitspapier. Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.
9. Wenn Sie eine Frage haben, melden Sie sich leise, indem Sie Ihre Hand heben. Wenn Sie zusätzliches Papier brauchen, melden Sie sich mit Papier der gewünschten Art in der Hand.
10. Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**.

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 1**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 1 (10 Punkte). Stellen Sie in den folgenden Aufgaben alle Ergebnisse, die komplexe Zahlen sind, jeweils in einer Form Ihrer Wahl aus der Vorlesung dar. Sie können für jedes der Ergebnisse die Form frei wählen.

(a) (3 Punkte) Seien

$$z_1 = 1 - \mathrm{j} \text{ und } z_2 = 2e^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{3}}.$$

Berechnen Sie $z_1 \cdot z_2$, $\mathrm{Re}(z_2)$ und z_2^3.

(b) Bestimmen Sie von den folgenden Polynomen die Nullstellen und die Linearfaktordarstellung.

(i) (2 Punkte)

$$p(z) = z^2 - (2 - 2\mathrm{j})z + (1 - 2\mathrm{j}).$$

(ii) (3 Punkte)

$$p(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4.$$

(c) (2 Punkte) Finden Sie alle komplexen Zahlen z, die $z^3 = 8$ erfüllen.

Lösung zu Aufgabe 1:

Seite 2 zu Aufgabe 1

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 2**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 2 (10 Punkte). Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(a) (2 Punkte) Bildet $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz!

(b) (2 Punkte) Welchen Winkel schließen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander ein?

(c) (3 Punkte) Finden Sie einen Faktor $k \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{a} + k\vec{c}$ kollinear zu $\vec{b}$ ist.

(d) (3 Punkte) Finden Sie einen Faktor $m \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{a}$ und $m\vec{b}$ ein Parallelogramm mit Flächeninhalt $\sqrt{12}$ aufspannen.

Lösung zu Aufgabe 2:

Seite 2 zu Aufgabe 2

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 3**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 3 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie eine Matrix $B \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R})$, sodass

$$3A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) (6 Punkte) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + ax_3 &= 6 \\ (1-a)x_2 \qquad &= 0 \\ ax_1 + x_2 + ax_3 &= 8 - 2a \end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils für $a = 1$ und für $a = -1$ alle Lösungen.

(c) (2 Punkte) Finden Sie die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,2}(\mathbb{R}),$$

sodass die Gleichung $x^2 + 18xy - 4y^2 = 0$ durch $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = 0$ ausgedrückt wird.

Lösung zu Aufgabe 3:

Seite 2 zu Aufgabe 3

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 4**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 4 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,3}(\mathbb{R}).$$

(b) (6 Punkte) Gegeben seien die Basen B und B' von $\mathbb{R}^2$ mit

$$B = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } B' = \left\{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2\right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(Dabei sind die Vektoren jeweils in kartesischen Koordinaten dargestellt.)
Die lineare Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei bezüglich der Basis B mit der Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

definiert. Geben Sie die Abbildungsmatrix A' bezüglich der Basis B' an.

(c) (2 Punkte) Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach X auf:

$$AX + B = X - C.$$

(Annahme: Alle zu invertierenden Matrizen existieren.)

Lösung zu Aufgabe 4:

Seite 2 zu Aufgabe 4

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 5**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 5 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Geben Sie je ein Beispiel für eine Zahlenfolge an, die

(i) streng monoton fällt und den Grenzwert -14 hat.
(ii) streng monoton wächst und nach oben beschränkt ist.

(b) (6 Punkte) Sind folgende Folgen konvergent? Falls ja, berechnen Sie den jeweiligen Grenzwert.

(i)
$$a_n = \frac{n^3 + 2n + 1}{3n(n+1)}$$

(ii)
$$b_n = \left(\frac{5n+1}{(3n+1)^2 - 9n^2} \right)^{-2}$$

(iii)
$$c_n = \frac{n!}{(n+2)!}$$

(c) (2 Punkte) Finden Sie die untere Reihengrenze $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{5}{2^k} = \frac{5}{4}.$$

Lösung zu Aufgabe 5:

Seite 2 zu Aufgabe 5

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 6**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 6 (10 Punkte).

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie den Grenzwert der folgenden konvergenten Reihe:

$$\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{4}{2^{k+1}}.$$

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie mittels eines geeigneten Kriteriums, dass die folgende Reihe divergiert:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \cos(k\pi) \frac{3^k}{2^{k+1}}.$$

(c) Berechnen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(i) (2 Punkte)

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k.$$

(ii) (2 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot k^{k-1}}{3^k} (x+2)^k.$$

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die ersten 4 Glieder (d.h. bis zu x^3) der Taylorreihe von $f(x) = \sin(x)$.

(Hinweis: Sie können hierzu die Taylorreihen vom Cosinus und Tangens auf dem Formelblatt verwenden.)

Lösung zu Aufgabe 6:

Seite 2 zu Aufgabe 6

Matrikelnummer: **Seite 1 zu Aufgabe 7**

erreichte Punktzahl:

Aufgabe 7 (10 Punkte).

(a) (3 Punkte) Lösen Sie folgendes bestimmtes Integral:

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos(x) \, \mathrm{d}x.$$

(b) (5 Punkte) Lösen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{4x + 28}{x^2 + 2x - 15} \, \mathrm{d}x.$$

(c) (2 Punkte) Lösen Sie mittels der Substitution $u = \mathrm{e}^x$ das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{4\mathrm{e}^{2x} + 28\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 15} \, \mathrm{d}x.$$

Lösung zu Aufgabe 7:

Seite 2 zu Aufgabe 7