Lexikographische Exponentiation angeordneter Mengen*

Salma Kuhlmann†

Felix Hausdorff zum 60. Todesjahr gewidmet.

7. 10. 2002

Frau Prof. Dr. habil. Salma Kuhlmann,
Research Unit Algebra and Logic,
Mathematical Sciences Group,
Department of Computer Science,
University of Saskatchewan,
McLean Hall, 106 Wiggins Road, Saskatoon, SK S7N 5E6, Canada
email: skuhlman@math.usask.ca
homepage: http://math.usask.ca/~skuhlman/index.html

Die Folien zu diesem Vortrag sind auf dem Internet erhältlich:
http://math.usask.ca/~skuhlman/slidesda.pdf

*2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 06A05, Secondary 03C60.
†Partially supported by an NSERC research grant.

Bibliographie

[Gr] Green, T.: Properties of chain products and Ehrenfeucht–Fraïssé Games on Chains, M.Sc. Diplomarbeit, University of Saskatchewan (August 2002)

[H1] Hausdorff, F.: Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen, Math. Annalen **65** (1908)

[H2] Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre, Verlag Von Veit, Leipzig (1914)

[HKM] Holland, W. C. – Kuhlmann, S. – McCleary, S.: Lexicographic Exponentiation of chains, *preprint* (2002)

[K] Kuhlmann, S.: Isomorphisms of Lexicographic Powers of the Reals, Proc. Amer. Math. Soc. **123**, No. 9 (1995)

[K–K–S1] Kuhlmann, F.-V. – Kuhlmann, S. – Shelah, S.: Exponentiation in power series fields, Proc. Amer. Math. Soc. **125**, No. 11 (1997)

[K–K–S2] Kuhlmann, F.-V. – Kuhlmann, S. – Shelah, S.: Functorial equations for lexicographic products, *erscheint in* Proc. Amer. Math. Soc.

[W] Warton, P.: Lexicographic Powers of the real line, Ph.D. Dissertation, Bowling Green State University (1998)

VORTRAGSPLAN:

Teil I: Historische Bemerkungen. Hausdorff's Arbeit von 1908.

Teil II: Einführung.

- Arithmetische Operationen: endliche Summen und Produkte. Allgemeine lexikographische Produkte und Potenzen.
- Anti-lexikographische Produkte. Proposition. Warnung.
- Beziehung zur Ordinalzahlarithmetik.
- Abhängigkeit von den gewählten Basispunkten. Kurze Diskussion. Siehe [Gr] für mehr.
- Beispiele.

Teil III: Ergebnisse aus [HKM] und [K].

(a) 2-Transitivität: *wann ist Aut* (Δ^Γ) *2-transitiv?*

- Hausdorff's Interesse. Definitionen und Beispiel: Körper. 2-transitiv impliziert n-transitiv.
- Allgemeine Proposition. Hausdorff's Satz (Beweis in [W]). Umkehrung wird heute bewiesen.
- Hauptergebnisse aus [HKM].

(b) Isomorphie-Invariante: *Wenn* $\mathbb{R}^\Gamma \simeq \mathbb{R}^{\Gamma'}$, *dann* $\Gamma \simeq \Gamma'$ *?*

- Hauptergebnisse aus [K]. Hauptergebnisse aus [HKM]. Beweis der Umkehrung von Hausdorff's Satz [W].
- Zwei wichtige Hilfsmittel: C_{00}-angeordnete Mengen und arithmetische Gesetze.
- Beweise und Beispiele.

Teil IV: Algebraische Motivation und Anwendungen in [K-K-S1] und [K-K-S2].
(*falls die Zeit reicht*).

TEIL I.[1]

In [H1][2], Hausdorff

- führt Operationen auf angeordneten Mengen ein: Summen, Produkte, lexikographische Produkte, lexikographische Potenzierung angeordneter Mengen,
- entwickelt die Grundlagen für die Arithmetik dieser Operationen,
- verallgemeinert Cantor's Ordinalzahlarithmetik,
- benutzt lexikographisch angeordnete Mengen zur Konstruktion von Modellen mit gegebenen Spezies und Geschlechtern,
- formuliert die GCH und definiert "unerreichbare Kardinalzahlen".

In [H2] untersucht er die Theorie weiter, und studiert (neben anderen Problemen):

- die 2-Transitivität lexikographischer Produkte.

Die Theorie bietet eine Reihe offener Probleme, die ich in den letzten zehn Jahren studiert habe. Manche sind gelöst, andere sind noch offen.

****

[1] *In diesem Vortrag bedeutet "angeordnete Menge" immer "total angeordnete Menge".*

[2] Der Anhang von [Gr] enthält eine Übersetzung ins Englische.

TEIL II.

Arithmetische Operationen auf angeordneten Mengen.

Seien Γ und Γ' angeordnete Mengen.

Die **Summe** $\Gamma + \Gamma'$ ist diejenige angeordnete Menge, die man durch Hintereinanderreihung erhält, wobei $\Gamma < \Gamma'$.

• Diese Definition stimmt mit der Ordinalzahlsumme überein, wenn Γ und Γ' Ordinalzahlen sind.

Allgemeiner, wenn $\{\Gamma_i; i \in I\}$ eine Familie angeordneter Mengen ist, die durch eine angeordnete Indexmenge I indiziert ist, so definieren wir die Summe $\sum_{i\in I} \Gamma_i$ in derselben Weise.

Wir bezeichnen mit $\Gamma \vec{\coprod} \Gamma'$ das **lexikographische Produkt** von Γ und Γ'. Man erhält die angeordnete Menge $\Gamma \vec{\coprod} \Gamma'$, indem man das Cartesische Produkt $\Gamma \times \Gamma'$ lexikographisch von links anordnet.

• Es ist $\Gamma \vec{\coprod} \Gamma' \simeq \sum_{\gamma\in\Gamma} \Gamma'$ (siehe Bild).

• Wenn α und β Ordinalzahlen sind, dann ist $\alpha \vec{\coprod} \beta$ das Ordinalzahlprodukt $\beta\alpha$ (**!**).

Lexikographische Potenzierung angeordneter Mengen:

Seien $\{\Delta_\gamma; \gamma \in \Gamma\}$ angeordnete Mengen, mit angeordneter Indexmenge Γ. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ fixieren wir einen Basispunkt $0_\gamma \in \Delta_\gamma$.

Wir definieren eine angeordnete Menge im Cartesischen Produkt

$$\prod_{\gamma\in\Gamma} \Delta_\gamma$$

folgendermaßen: das **lexikographische Produkt** ist die Teilmenge

$$\mathop{\mathbf{H}}_{\gamma\in\Gamma} \Delta_\gamma := \{s \in \prod_{\gamma\in\Gamma} \Delta_\gamma \; ; \; \mathrm{support}\,(s) \; \text{ ist wohlgeordnet}\},$$

lexikographisch von links angeordnet (auch bekannt als “Ordnung nach ersten Differenzen”). Hier ist $\mathrm{support}\,(s) := \{\gamma \in \Gamma \; ; \; s(\gamma) \neq 0_\gamma\}$ der Träger von s.

Wenn alle Δ_γ dieselbe angeordnete Menge Δ sind, und alle Basispunkte 0_γ dasselbe Element $0 \in \Delta$, dann ist $\mathbf{H}_{\gamma\in\Gamma} \Delta_\gamma$ die **lexikographische Potenz**

$$\begin{aligned} \Delta^\Gamma &:= \{s : \Gamma \to \Delta \; ; \; \mathrm{support}\,(s) \; \text{ ist wohlgeordnet}\} \\ &= \{s \in \prod_{\gamma\in\Gamma} \Delta \; ; \; \mathrm{support}\,(s) \; \text{ ist wohlgeordnet}\} \; . \end{aligned}$$

Duale Theorie: Anti-Lexicographische Potenzierung angeordneter Mengen.

• Viele Autoren ziehen es vor, mit der anti-lexikographischen Anordnung zu arbeiten.

Die **anti-lexikographische Potenz** ${}^{\Gamma}\Delta$ ist die Menge

$${}^{\Gamma}\Delta := \{s : \Gamma \to \Delta \, ; \, \text{support}(s) \text{ ist anti-wohlgeordnet}\},$$

anti-lexikographisch angeordnet von rechts (auch bekannt als "Ordnung nach letzten Differenzen").

Wie wird von lex auf anti-lex übersetzt?

Γ^* bezeichnet Γ mit der umgekehrten Anordnung. Wir bemerken:

Proposition 1

Sei Γ eine angeordnete Menge, und Δ eine angeordnete Menge mit Basispunkt 0. Dann stimmt die anti-lexikographische Potenz ${}^{\Gamma}\Delta$ mit der lexikographischen Potenz Δ^{Γ^*} überein.

• Im allgemeinen impliziert $\Delta^{\Gamma} \simeq \Delta^{\Gamma'}$ aber *nicht* ${}^{\Gamma}\Delta \simeq {}^{\Gamma'}\Delta$. Beispiel später.

Beziehung zur Ordinalzahlarithmetik.

Wenn α und β Ordinalzahlen sind, so ist unsere lexikographische Potenz α^{β^*}, *mit dem kleinsten Element* $0 \in \alpha$ *als Basispunkt*, gleich der Ordinalzahl α^β.

Das heißt, unsere anti-lexikographische Potenz ${}^\beta\alpha$, *mit dem kleinsten Element* $0 \in \alpha$ *als Basispunkt*, ist die Ordinalzahl α^β.

• Um mit Cantor's Notation übereinzustimmen, schreibt Hausdorff immer Δ^Γ, wenn er eigentlich mit der lexikographischen Potenz Δ^{Γ^*} arbeitet.

• Es ist wichtig zu bemerken, daß hier der ausgewählte Basispunkt das kleinste Element $0 \in \alpha$ ist. Zum Beispiel: wenn α die Ordinalzahl $2 = \{0, 1\}$ ist, so ist die lexikographische Potenz 2^{β^*}, mit Basispunkt $1 \in \{0, 1\}$ anstatt 0 berechnet, die *Umkehrung* der Ordinalzahl 2^β.

Abhängigkeit von den ausgewählten Basispunkten.

Die lexikographisch angeordnete Menge Δ^Γ hängt im allgemeinen von der Wahl des Basispunktes $0 \in \Delta$ ab.[3] Hier eine kurze Diskussion dieses Phänomens.

Eine uniforme Definition für lexikographische Produkte:

In [H1] führt Hausdorff lexikographische Produkte folgendermaßen ein.

Ist $\{\Delta_\gamma\ ;\ \gamma \in \Gamma\}$ mit einer angeordneten Menge Γ als Indexmenge gegeben, so definiert man eine **partielle Anordnung auf dem Cartesischen Produkt** $\Pi_{\gamma\in\Gamma}\Delta_\gamma$, indem man zwei Folgen s und t nur dann lexikographisch von links vergleicht, wenn

$$\mathrm{dif}(s,t) := \{\gamma \in \Gamma\ ;\ s(\gamma) \neq t(\gamma)\}$$

ein kleinstes Element hat.

Dann definiert man eine **Äquivalenzrelation auf dem Cartesischen Produkt** $\Pi_{\gamma\in\Gamma}\Delta_\gamma$:

$$s \sim t \text{ genau dann, wenn } \mathrm{dif}(s,t) \text{ wohlgeordnet ist.}$$

• Die Äquivalenzklassen sind maximal angeordnete Mengen in dieser partiellen Anordnung.

• Wenn $[s]$ die Äquivalenzklasse von $s \in \Pi_{\gamma\in\Gamma}\Delta_\gamma$ bezeichnet, so ist $[s]$ ein lexikographisches Produkt (das durch s definiert ist), nämlich das Produkt mit Basispunkten $0_\gamma = s(\gamma) \in \Delta_\gamma$.

• Also: wenn $t \sim s$, so stimmt das durch t definierte lexikographische Produkt (mit Basispunkten $0_\gamma = t(\gamma)$) mit dem durch s definierten lexikographischen Produkt überein, und umgekehrt.

Jede Äquivalenzklasse ist möglicherweise eine neue angeordnete Menge....

[3] In [Gr], α^{ω^*} wird berechnet, für jede Auswahl des Basispunktes!

Fälle, wo das Produkt von der Auswahl der Basispunkte unabhängig ist:

• Wenn Γ wohlgeordnet ist, dann gibt es eine einzige Äquivalenzklasse, und das lexikographische Produkt von $\{\Delta_\gamma \ ; \ \gamma \in \Gamma\}$ ist eindeutig bestimmt (unabhängig von den ausgewählten Basispunkten). Es ist gleich $\prod_{\gamma\in\Gamma} \Delta_\gamma$, total lexikographisch angeordnet.

• Auch wenn $t \not\sim s$, so können s und t trozdem *isomorphe* lexikographische Produkte definieren. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn jedes Δ_γ eine transitive angeordnete Menge ist.[4]

• Insbesondere, wenn Δ eine total angeordnete Abelsche Gruppe ist, so ist die lexikographische Potenz Δ^Γ, *bis auf Isomorphie*, eindeutig bestimmt, unabhängig von dem ausgewählten Basispunkt.

[4]Für jedes $\gamma \in \Gamma$ fixieren wir einen Automorphismus π_γ von Δ_γ so, daß $\pi_\gamma(s(\gamma)) = t(\gamma)$. Die π_γ induzieren offensichtlich den gewünschten Isomorphismus. Dieser bildet Basispunkte auf Basispunkte ab.

Beispiele.

• $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ ist der Ordnungstyp der irrationalen Zahlen.

• $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (mit Basispunkt 0) ist der Ordnungstyp der nicht-negativen reellen Zahlen.

• $2^{\mathbb{N}}$ (mit Basispunkt 0) ist der Ordnungstyp der Cantorschen Ternärmenge.

• Die Anordnung der Hahnschen Gruppen ist ein lexikographisches Produkt.

• Die Anordnung der Potenzreihenkörper $k((G))$ (mit Koeffizienten in einem total angeordnete Körper k und Exponenten in einer total angeordneten Abelschen Gruppe G) ist die lexikographische Potenz k^G. Ebenso für die Potenzreihenringe $k((G^{\geq 0}))$ und $k((G^{<0}))$.

• Die Anordnung von Conway's "field of surreal numbers" **No** ist eine lexikographische Potenz.

Lexikographische Anordnungen erscheinen auf natürliche Weise in:
der deskriptiven Mengenlehre,
der Bewertungstheorie,
der reellen Algebra,
der Theorie der Gröbnerbasen (Anordnungen der Monome)
...

****

TEIL III.

(a) Zweifache Transitivität.

Sei A eine angeordnete Menge, die mehr als zwei Elemente enthält. A ist **2-transitiv**, wenn es für alle $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$ mit $a_1 < b_1$ und $a_2 < b_2$ einen Automorphismus σ von A gibt, der $\sigma(a_1) = a_2$ und $\sigma(b_1) = b_2$ erfüllt.

• Beispiel: Die Anordnung eines total angeordneten Körpers ist immer 2-transitiv.[5]

• Ist A 2-transitiv, so ist A auch n-transitiv (analog definiert), für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$.

• In [H2; sechstes Kapitel], interessiert sich Hausdorff hauptsächlich für die 2-Transitivität lexikographischer Potenzen:

wann ist Δ^Γ *2-transitiv?*

Proposition 2

Eine lexikographische Potenz Δ^Γ ist 2-transitiv, wenn Γ transitiv und Δ 2-transitiv sind.

[5]Seien a_1, a_2, b_1, b_2 wie oben gegeben. Man definiere $\sigma(a) = (a - a_1)\frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} + a_2$.

Diese Proposition sagt aber nichts über viele interessante Fälle. Zum Beispiel über den Fall, wo der Exponent eine Ordinalzahl ist.

Satz [H2], [W]

Sei α eine hauptadditive Ordinalzahl. Dann ist $\mathbb{R}^\alpha$ 2-transitiv.

(α ist **hauptadditiv**[6], wenn es eine Ordinalzahlpotenz von ω ist. Das ist der Fall genau dann, wenn α isomorph zu jedem seiner nicht-leeren Endstücke ist.)

Heute werden wir die Umkehrung beweisen:

Satz 1 [HKM]

Sei α eine beliebige Ordinalzahl. Wenn $\mathbb{R}^\alpha$ 2-transitiv ist, dann ist α hauptadditiv.

Unser Hauptsatz über 2-Transitivität ist:

Satz 2 [HKM] [7]

Sei Δ eine abzählbare Ordinalzahl ≥ 2, mit dem kleinsten Element 0 als Basispunkt. Dann ist $\Delta^{\mathbb{R}}$ ohne sein kleinstes Element 2-transitiv.

[6] Das bedeutet, α ist ein *Monom* in der **Cantorschen Normalform**.

[7] Der Beweis ist anspruchsvoll, wir werden ihn im heutigen Vortrag nicht betrachten.

(b) Isomorphie-Invariante.

Wir haben die folgende Frage studiert:

$$\textit{Folgt aus } \mathbb{R}^{\Gamma} \simeq \mathbb{R}^{\Gamma'}, \textit{ daß auch } \Gamma \simeq \Gamma' \textit{ ?}$$

Satz [K]

Sei α eine Ordinalzahl, und J eine angeordnete Menge, in die die angeordnete Menge $\mathbb{R}$ *nicht* einbettbar ist. Wir nehmen an, daß $\mathbb{R}^{\alpha}$ sich in $\mathbb{R}^{J}$ einbetten läßt. Dann läßt sich auch α in J einbetten. Insbesondere, wenn α und β verschiedene Ordinalzahlen sind, dann gilt $\mathbb{R}^{\alpha} \not\simeq \mathbb{R}^{\beta}$.

Und wenn die Exponenten nicht wohlgeordnet sind?

Manchmal liefert Satz [K] einen entscheidenden Test:

Beispiel 1

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \not\simeq \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$.

(Weil *jede* abzählbare Ordinalzahl in $\mathbb{Q}$ einbettbar ist...)

Aber manchmal ist der Test nicht schlüssig, und wir müssen mehr Arbeit leisten:

Satz 4 [HKM] [8]

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \not\simeq \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$.

Satz 3 [HKM] [9]

Sei α eine beliebige unendliche abzählbare Ordinalzahl. Dann gilt $\mathbb{R}^{\alpha^*+\alpha} \simeq \mathbb{R}^{\alpha}$.

Wir wollen jetzt die wesentlichen Beweisideen für Satz 1 und Satz 3 [HKM] beschreiben. Hierzu brauchen wir ...

[8] Der Beweis ist anspruchsvoll, wir werden ihn im heutigem Vortrag nicht betrachten.

[9] Wir beweisen eigentlich den folgenden Satz: Seien α und β Ordinalzahlen, mit α abzählbar und β unendlich. Dann gilt $\mathbb{R}^{\alpha^*+\beta} \simeq \mathbb{R}^{\beta}$.

ARITHMETISCHE GESETZE:

(1) $\Gamma \vec{\amalg} \Gamma' \simeq \Sigma_{\gamma\in\Gamma} \Gamma'$.

(2) Die Operationen $+$ und $\vec{\amalg}$ sind assoziativ, aber im allgemeinen nicht kommutativ.

(3) $(\Gamma + \Gamma') \vec{\amalg} \Gamma'' \simeq (\Gamma \vec{\amalg} \Gamma'') + (\Gamma' \vec{\amalg} \Gamma'')$.

(4) $(\Gamma_1 + \Gamma_2)^* \simeq \Gamma_2^* + \Gamma_1^*$ und $(\Gamma_1 \vec{\amalg} \Gamma_2)^* \simeq \Gamma_1^* \vec{\amalg} \Gamma_2^*$.

(5) $(\Delta^\Gamma)^* \simeq (\Delta^*)^\Gamma$.

(6) $\Delta^{\Gamma+\Gamma'} \simeq \Delta^\Gamma \vec{\amalg} \Delta^{\Gamma'}$.

(7) Sei $\{\Gamma_i; i \in I\}$ eine Familie angeordneter Mengen, mit einer angeordneten Menge I als Indexmenge. Dann gilt

$$\Delta^{\Sigma_{i\in I}\Gamma_i} \simeq \mathop{\mathbf{H}}_{i\in I} \Delta^{\Gamma_i}$$

(hier ist der Basispunkt von Δ^{Γ_i} $\mathbf{0}$, die Folge mit leerem Träger).

(8) Insbesondere gilt $\Delta^{\Gamma \vec{\amalg} \Gamma'} \simeq (\Delta^{\Gamma'})^\Gamma$.

(9) $\Delta^{\Gamma_1} \simeq \Delta^{\Gamma_2}$ und $\Delta^{\Gamma_1'} \simeq \Delta^{\Gamma_2'} \Rightarrow \Delta^{\Gamma_1+\Gamma_1'} \simeq \Delta^{\Gamma_2+\Gamma_2'}$.

(10) $\Delta^{\Gamma_1} \simeq \Delta^{\Gamma_2} \Rightarrow \Delta^{\Gamma_1 \vec{\amalg} \Gamma'} \simeq \Delta^{\Gamma_2 \vec{\amalg} \Gamma'}$.

Wir brauchen außerdem ...

Ein wichtiges Hilfsmittel.

Eine angeordnete Menge A ist C_{00}, oder: **hat abzählbare Koterminalität**, wenn sowohl die Kofinalität als auch die Koinitialität von A gleich $\aleph_0$ sind. Das bedeutet, es gibt eine koinitiale und kofinale Teilmenge von A, die isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.

Unser wichtiges Hilfsmittel ist:

Proposition 3

Sei A eine 2-transitive C_{00}-angeordnete Menge. Dann ist A isomorph zu allen seinen konvexen C_{00}-Teilmengen.

Will man diese Proposition auf 2-transitive C_{00} lexikographische Potenzen und ihre konvexen Teilmengen anwenden, so sind die folgenden Beobachtungen nützlich:

Bemerkung

Sei Γ eine angeordnete Menge und $F \neq \emptyset$ ein Endstück von Γ. Dann ist Δ^F isomorph zu einer konvexen Teilmenge von Δ^Γ.

Proposition 4

Sei Γ eine angeordnete Menge, und Δ eine angeordnete Menge mit Basispunkt $0 \in \Delta$. Dann ist die lexikographische Potenz Δ^Γ C_{00}, wenn Γ ein kleinstes Element hat und Δ C_{00} ist, oder wenn Γ abzählbare Koinitialität hat und 0 kein Endpunkt von Δ ist.

Wir können nun diese Tatsachen benutzen, um das Folgende zu zeigen:

Proposition 5

Die angeordneten Mengen $\mathbb{R}^{\omega^*+\omega}$ und $\mathbb{R}^{\omega}$ sind isomorph und 2-transitiv.

Beweis:

$\mathbb{R}^{\omega}$ ist konvex in $\mathbb{R}^{\omega^*+\omega}$ nach unserer Bemerkung. Beide sind C_{00}-angeordnete Mengen nach Proposition 4. $\mathbb{R}^{\omega^*+\omega}$ ist die dem Laurentreihenkörper $\mathbb{R}((\mathbb{Z}))$ zugrundeliegende angeordnete Menge. Daher ist $\mathbb{R}^{\omega^*+\omega}$ eine 2-transitive angeordnete Menge. Jetzt wende man Proposition 3 an. $\square$

Beispiel 2

$\mathbb{R}^{\omega^*+\omega} \simeq \mathbb{R}^{\omega}$. Allerdings sind die entsprechenden anti-lexikographischen Potenzen nicht isomorph. Wenn sie es wären, so folgte aus Proposition 1, daß $\mathbb{R}^{\omega^*+\omega} \simeq \mathbb{R}^{\omega^*}$, und somit $\mathbb{R}^{\omega} \simeq \mathbb{R}^{\omega^*}$. Nach Satz [K] ist das aber unmöglich, weil ω sich nicht in ω^* einbetten läßt.

Der Beweis von **Satz 3** folgt nun im wesentlichen durch Induktion. Ohne die Annahme der Abzählbarkeit ist dieser Satz *nicht richtig*:

Beispiel 3

Sei κ eine überabzählbare reguläre Kardinalzahl. Dann sind $\mathbb{R}^{\kappa^*+\kappa}$ und $\mathbb{R}^{\kappa}$ *nicht* isomorph. In der Tat, $\mathbb{R}^{\kappa}$ ist C_{00} nach Proposition 4, während aber $\mathbb{R}^{\kappa^*+\kappa}$ Kofinalität κ hat.

Wir können nun **Satz 1** beweisen:

Beweis: Sei $\alpha \neq 1$ und φ ein nichtleeres Endstück von α. Dann sind $\mathbb{R}^{\alpha}$ und $\mathbb{R}^{\varphi}$ C_{00} nach Proposition 4, und $\mathbb{R}^{\varphi}$ ist konvex nach unserer Bemerkung. Mit Proposition 3 folgt $\mathbb{R}^{\alpha} \simeq \mathbb{R}^{\varphi}$. Also ist $\alpha \simeq \varphi$ nach Satz [K]. Somit ist α hauptadditiv. $\square$

Ein Beispiel von etwas anderer Art:

Beispiel 4

Die angeordneten Mengen $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $\mathbb{R}^{\mathbb{R}+\mathbb{R}}$ sind isomorph und 2-transitiv.

Beweis:
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}+\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \vec{\amalg} \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (nach AR(6)).
Außerdem gilt $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{<0}}$ (da die Exponenten isomorph sind).
Desweiteren gilt $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{\geq 0}}$, denn $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{\geq 0}}$ ist konvex in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nach unserer Bemerkung, und beide sind C_{00} nach Proposition 4.
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist 2-transitiv (da es die dem Potenzreihenkörper $\mathbb{R}((\mathbb{R}))$ zugrundeliegende angeordnete Menge ist).
Jetzt wende man Proposition 3 an.
Damit gilt $\mathbb{R}^{\mathbb{R}+\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{<0}} \vec{\amalg} \mathbb{R}^{\mathbb{R}^{\geq 0}} \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (nach AR(9)). $\square$

****

TEIL IV.

Algebraische Motivation und Anwendungen in [K-K-S1] und [K-K-S2].

Als wir versuchten, eine Exponentialfunktion auf Potenzreihenkörpern zu definieren, stießen wir auf die folgende Frage:

Wann läßt sich Γ *konvex in* Δ^Γ *einbetten?*

Satz [K-K-S2]

Seien Γ und Δ_γ, $\gamma \in \Gamma$, nichtleere angeordnete Mengen. Für jedes $\gamma \in \Gamma$ sei 0_γ ein Basispunkt, der nicht letztes Element von Δ_γ ist. Wir nehmen an, daß Γ kein letztes Element hat und daß Γ' eine kofinale Teilmenge von Γ ist. Dann gibt es *keine* konvexe Einbettung

$$\iota : \Gamma' \to \mathop{\mathbf{H}}_{\gamma\in\Gamma} \Delta_\gamma \, .$$

Korollar 1

Seien Γ und Δ nichtleere angeordnete Mengen ohne letzte Elemente, und sei ein Basispunkt 0 in Δ fixiert. Dann gibt es *keine* konvexe Einbettung

$$\iota : \Gamma \to \Delta^\Gamma \, .$$

Korollar 2

Sei G eine nichttriviale angeordnete Abelsche Gruppe und $K = \mathbb{R}((G))$. Dann erlaubt $(K, <)$ *keine* Exponentialfunktion.

Beweis:

Hat K eine Exponentialfunktion, so gilt $G \simeq \mathbb{R}((G^{<0}))$, als angeordnete Gruppen. Dies induziert eine konvexe Einbettung von $G^{<0}$ in $\mathbb{R}((G^{<0}))$. Widerspruch. $\square$

****