- Stetigkeit
- Differenzierbarkeit
- Anwendungen : Taylor
  de L'Hospital

Stetigkeit

<u>Def:</u> $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$ wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x_n \to x_0$ für $n \to \infty$, gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x_0$$

Gilt dies für alle $x_0 \in D$ so heißt f stetig in D.

<u>Alternativ:</u> $f: D \to \mathbb{R}$ heißt stetig in $x_0 \in D$ falls für den Links bzw. Rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$ bzw. $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ gilt:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

Mit "$\lim_{x \nearrow x_0} f(x)$" bzw. "$\lim_{x \searrow x_0} f(x)$"

ist dabei das Verhalten des Funktionswerts $f(x)$ (bzw der Grenzwert) gemeint, wenn sich die Variable x von

Auf dem Zahlenstrahl ist x also links von x_0 zu finden

- links dem Wert x_0 (also $x < x_0$) nähert. Schreibweise: $\lim_{x \nearrow x_0}$ (Linksseitiger Grenzwert)

  x ist kleiner als x_0 daher nähert sich "von unten"

- rechts dem Wert x_0 (also $x > x_0$) nähert. Schreibweise: $\lim_{x \searrow x_0}$

  Rechtsseitiger Grenzwert

Wichtig Gilt für eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ in x_0:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \searrow x_0} f(x)$$

so sagt man der Grenzwert von f in x_0 existiert und schreibt

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Bem: Die meisten elementaren Funktionen sind stetig.

Beispiele stetiger Funktion

$f(x) = \exp(x)$

$f(x) = \ln(x)$

$f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}$

$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad n \in \mathbb{N}$

$f(x) = |x|$

$f(x) = \sin(x)$

$f(x) = \cos(x)$

$f(x) = g(x) + h(x)$

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

wenn g & h stetig sind

Unstetigkeiten werden oft durch die Komposition von Funktionen oder das Abschnittsweise definieren einer Funktion erzeugt

Aufgabe in der Klausur

Für $a, b \in \mathbb{R}$ sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \exp(2x + a), & x \geq 0 \\ -2\sin(x + \pi) + b, & x < 0 \end{cases}$$

Wie müssen a & b gewählt werden dass f stetig ist.

<u>Lsg</u> : $g(x) = \exp(2x+a)$ & $h(x) = -2\sin(x+\pi)+b$ sind stetig für sich (für beliebige $a,b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow$ Wenn f unstetig ist dann in $x=0$.

Es gilt

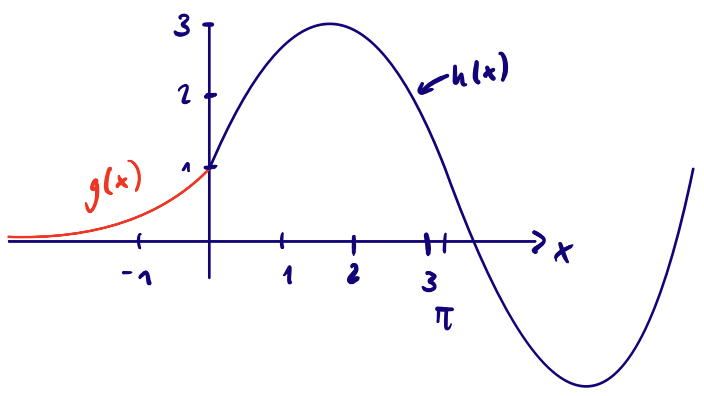
$$g(0) = \exp(a)$$
$$h(0) = -2\underbrace{\sin(\pi)}_{=0} + b = b$$

Damit f in $x=0$ stetig ist (ein glattes Übergang von h in g) muss

$$g(0) = h(0)$$
$$\Leftrightarrow \exp(a) = b$$

gelten. D.h für $b = \exp(a)$ ist f stetig

<u>Bsp</u> : für $a=0$ & $b = \exp(a) = 1$:



Differenzierbarkeit

$f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$ falls der Grenzwert der Funktion

$$h \mapsto \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

in 0 existiert. In diesem Fall setzt man

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

und nennt den Grenzwert die Ableitung der Funktion f in x_0.

Bem
- Ist f in allen $x_0 \in D$ differenzierbar, so nennt man f differenzierbar auf D
- Differenzierbarkeit impliziert immer Stetigkeit

Ableitungsregeln: Seien $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $c, d \in \mathbb{R}$. Es gilt:

- für $h(x) := f(x) + c$ ist $h'(x) = f'(x)$.
- für $h(x) := cf(x)$ ist $h'(x) = cf'(x)$.
- für $h(x) := f(x) + g(x)$ ist $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- für $h(x) := f \circ g(x) = f(g(x))$

  ist $h'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$ (Kettenregel)
- für $h(x) := f(x)g(x)$

  ist $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (Produktregel)
- für $h(x) := \dfrac{f(x)}{g(x)}$

  ist $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$ (Quotientenregel)
- Ist f umkehrbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann gilt

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad \text{(Umkehrregel)}$$

für alle $y \in \mathbb{W}_f$.

Elementare Ableitungen:

Es gilt: Ist $\alpha, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und

- $f(x) = \exp(cx)$ dann ist $f'(x) = c\exp(x)$
- $f(x) = \ln(x)$ dann ist $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = x^n$ dann ist $f'(x) = n x^{n-1}$
- $f(x) = x^{-n}$ dann ist $f'(x) = -n x^{-n-1}$
- $f(x) = x^\alpha$ dann ist $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
- $f(x) = \sin(x)$ dann ist $f'(x) = \cos(x)$
- $f(x) = \cos(x)$ dann ist $f'(x) = -\sin(x)$

Anwendungen

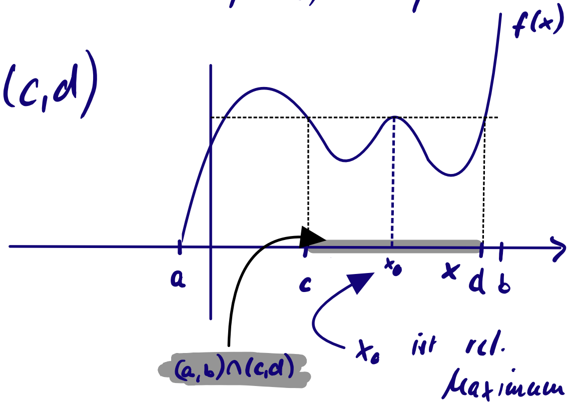
- Extremwertaufgaben
- Lokale Approximation von Funktionen

Extremwertaufgaben: Zu einer gegebenen Funktion $f:(a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ ist ein $x_0 \in (a,b)$ gesucht sodass $f(x_0)$ maximal oder minimal ist.

Def: $x_0 \in (a,b)$ heißt relatives (lokales) Maximum bzw. Minimum falls ein Intervall (c,d) existiert, welches x_0 enthält, sodass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(x_0) \leq f(x)$$

für alle $x \in (a,b) \cap (c,d)$



Ist f differenzierbar auf (a,b) so gilt:

Ist x_0 relatives Extremum (also rel. Max. oder rel. Min.) dann gilt $f'(x_0) = 0$

Ist f sogar zweimal differenzierbar und gilt für ein $x_0 \in (a,b)$ $f'(x_0)$ sowie

i) $f''(x_0) > 0$, dann ist x_0 lokales Min.

ii) $f''(x_0) < 0$, dann ist x_0 lokales Max.

iii) $f''(x_0) = 0$, dann müssen weitere Analysen erfolgen

Taylor: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ mit der Vereinbarung $0! = 1$

Die endliche Reihe

$$p_n(x, x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)^1}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)(x-x_0)^j}{j!}$$

heißt n-tes Taylorpolynom einer Funktion

Aufgabe in der Klausur

Gegeben sei $f(x) = 2\exp(1-x^2) - 2\exp(-1)$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in $x_0 = 1$.

Es ist

$$p_2(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2$$

sowie

$$f'(x) = 2\exp(1-x^2)(-2x) = 4x\exp(1-x^2)$$

$$f''(x) = 4\exp(1-x^2) + 4x\exp(1-x^2)(-2x)$$
$$= 4\exp(1-x^2)(1-2x^2)$$

$x_0 = 1$ einsetzen liefert

$$f(1) = 2 - 2\exp(-1) = 2(1-\exp(-1))$$

$$f'(1) = 4\cdot 1\exp(1-1^2) = 4$$

$$f''(1) = 4\exp(1-1^2)(1-2(1)^2) = -4$$

$$\Rightarrow p_2(x,1) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2$$
$$= 2(1-\exp(-1)) + 4(x-1) + 1/2\cdot 4(x-1)^2$$

Grenzwerte mit de l'Hospital

Gesucht: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

wenn $f(x)\to\infty$ & $g(x)\to\infty$ für $x\to x_0$

oder $f(x)\to 0$ & $g(x)\to 0$ für $x\to x_0$

Es gilt

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

wenn $f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und

$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0$ & $g^{(n)}(x_0) \neq 0$

Hier ist auch $x_0 = \infty$ zugelassen, d.h

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

falls $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ existiert.

Aufgabe in der Klausur

Berechnen die

i) $\lim_{x\to 0} x^{-1}\left(\sqrt{4+x} - 2\right)$

ii) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{4x^2}$

i) Es gilt:

$$x^{-1}\left(\sqrt{4+x} - 2\right) = \frac{\left(\sqrt{4+x} - 2\right)}{x}$$

dann ist nach L'Hospital

$$\lim_{x \to 0} x^{-1} \left(\sqrt{4+x} - 2 \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{4+x} - 2 \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}}{1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$= 1/4$$

ii) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{4x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin(2x)}{8x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \cos(2x) \, 2}{8}$$

$$= \frac{1}{2}$$