Vektoren Ist $N \in \mathbb{N}$ so nennt man $\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$ mit $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}$ einen Vektor aus $\mathbb{R}^N$. Die Zahlen $v_1, \dots, v_N$ nennt man Komponenten des Vektors. Ein Vektor aus $\mathbb{R}^N$ hat immer genau N Komponenten.

Addition & Subtraktion zweier Vektoren mit der gleichen Anzahl an Komponenten ist komponentenweise definiert:

Für $v, w \in \mathbb{R}^N$ mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$ gilt

$$v \pm w = \begin{pmatrix} v_1 \pm w_1 \\ \vdots \\ v_N \pm w_N \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl (einem "Skalar") ist komponentenweise definiert: Für $c \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^N$ mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$ gilt:

$$c\,v = \begin{pmatrix} c v_1 \\ \vdots \\ c v_N \end{pmatrix}$$

Länge von Vektoren:

Ist $v \in \mathbb{R}^N$ mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$

heißt

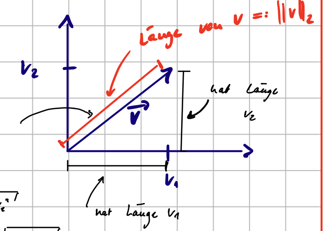
$$\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (v_i)^2}$$

die Länge des Vektors v

bzw. die euklidische Norm von v.

Bem

Sei $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$



Es gilt
$\|v\|_2^2 = v_1^2 + v_2^2$
(Pythagoras)
$\Rightarrow \|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Länge von v ist $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

Es gibt weitere Normen im $\mathbb{R}^N$, bspw. die Supremumsnorm

$$\|v\|_\infty := \sup \{ |v_i| \mid i = 1, \ldots, N \}$$

Für $k = \infty$ oder $k = 2$ gilt

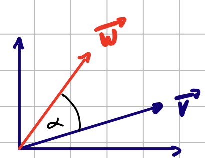
$$\|v\|_k \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

$$\|v\|_k = 0 \iff v = 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^N$$

$$\|\lambda v\|_k = |\lambda| \, \|v\|_k \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \;\&\; \forall v \in \mathbb{R}^N$$

$$\|v + w\|_k \leq \|v\|_k + \|w\|_k$$

Winkel zwischen Vektoren



Gesucht ist α. Es gilt: Für alle $v, w \in \mathbb{R}^N$ gilt

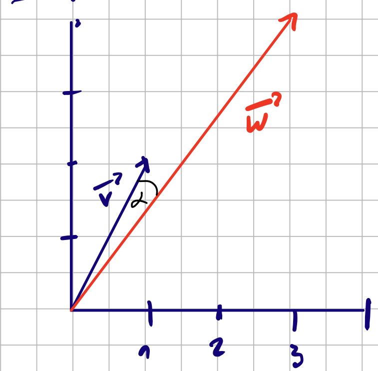
$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_2 \, \|w\|_2}$$

Also
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|_2 \, \|w\|_2}\right)$$

Dabei ist $\langle v, w \rangle$ eine andere Schreibweise für $\sum_{i=1}^{N} v_i w_i$

wenn $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}$ & $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{pmatrix}$

Bsp für $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ & $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$



Es gilt

$\langle v, w \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$

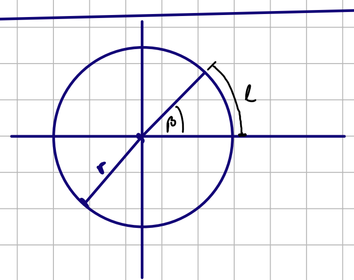
$\|v\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$\|w\|_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$\Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{11}{5\sqrt{5}}\right) \approx 0{,}18$ rad

↑ Ergebnis in Radian im Bogenmaß

Zwsch rad & Grad



$u = 2\pi r$ Umfang Kreis mit Radius r

"rad" ist die Einheit des Bogenmaßes

Bogenmaß: Die zu einem Winkel β eindeutig zugeordnete Länge des Kreisbogens l

Man legt fest 2π rad entspr $360°$

$\Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$

$\Rightarrow 0{,}18 \text{ rad} = 0{,}18 \cdot \frac{180°}{\pi} = 10{,}31°$

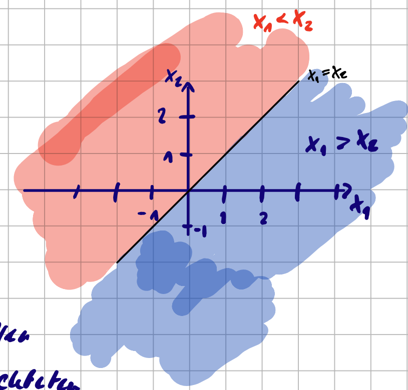
Teilmengen des $\mathbb{R}^N$

$M = \{ (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid \text{Spezifikation} \}$

Bsp $\quad M = \{ \underbrace{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2}_{} \mid \underbrace{x_1 < x_2}_{} \}$

"welche x_1, x_2 müssen betrachtet werden?"

was erfüllen die betrachteten (x_1, x_2)



Aufgabe in Klausur

Skizzieren Sie die Mengen

i) $\quad M_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x_1 \le 2,\ 0 \le 4 - x_1^2 - x_2 \}$

ii) $\quad M_2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_1^2 + x_2^2 \le 4 \}$

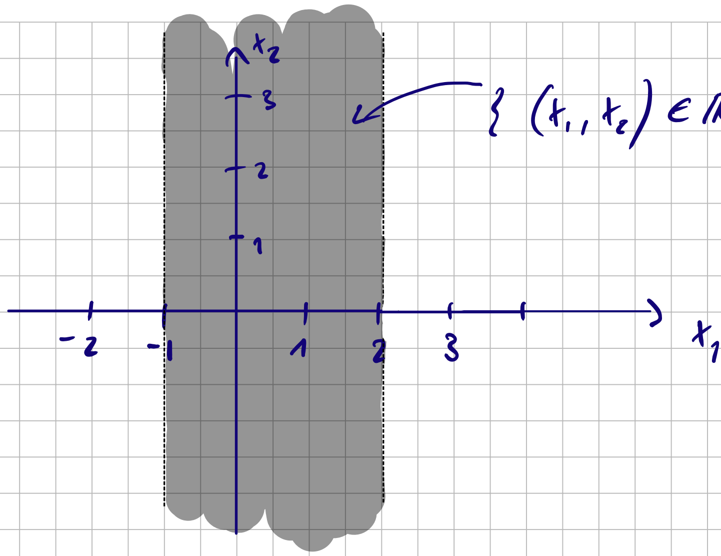
iii) $\quad M_3 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le 1 \}$

i) $\quad M_1 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x_1 \le 2,\ 0 \le 4 - x_1^2 - x_2 \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x_1 \le 2 \text{ und } 0 \le 4 - x_1^2 - x_2 \}$

$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x_1 \le 2 \}$

$\cap \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le 4 - x_1^2 - x_2 \}$



$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 2\}$ inkl. gestrichelter Linie

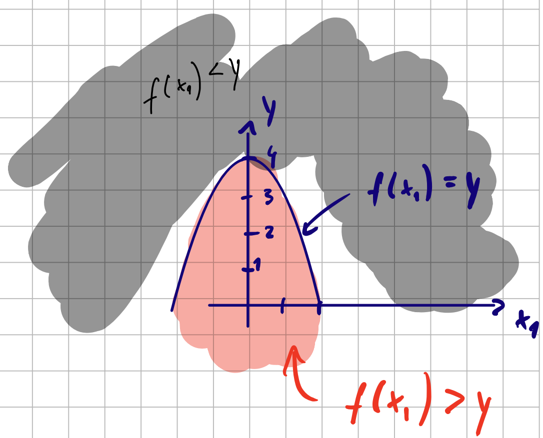
$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 4 - x_1^2 - x_2\}$

$0 \leq 4 - x_1^2 - x_2 \quad | + x_2$

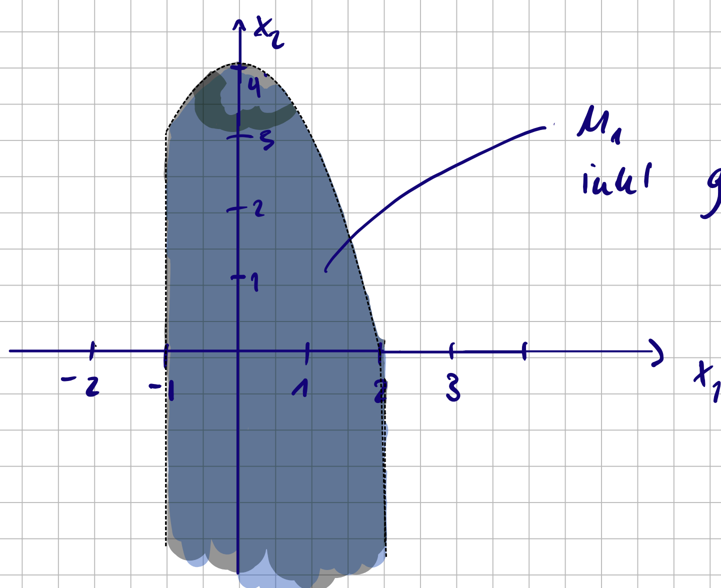
$\Leftrightarrow \quad x_2 \leq 4 - x_1^2$

Idee: $y := x_2$ & $f(x_1) := 4 - x_1^2$

$x_2 \leq 4 - x_1^2 \Leftrightarrow y \leq f(x_1)$



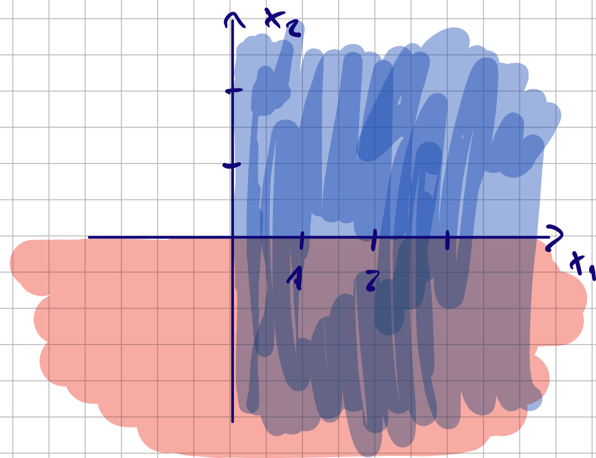
$\Longrightarrow M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x_1 \leq 2\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq 4 - x_1^2 - x_2\}$



M_1 inkl gestrichelter Linie

Beschriftung der Achsen sehr wichtig!

ii) $M_2 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0 , x_2 \leq 0 , x_1^2 + x_2^2 \leq 4 \}$



$x_1 \geq 0$

$x_2 \leq 0$

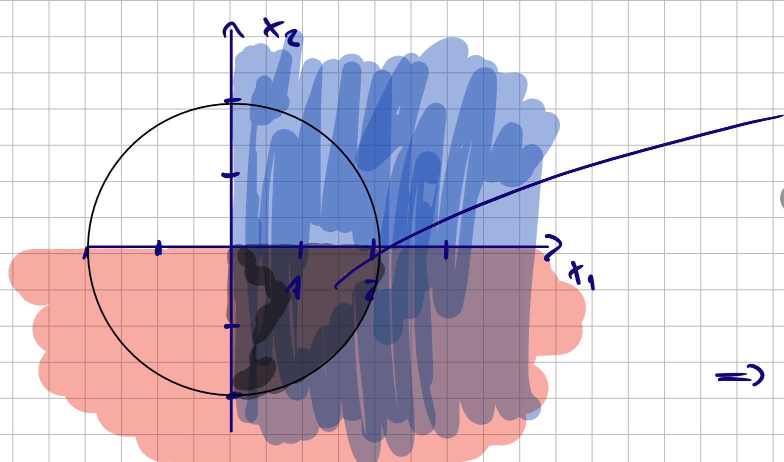
$x_1^2 + x_2^2 \leq 4$:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ ist Kreisgleichung mit Radius r und Mittelpunkt (x_0, y_0)

$\Longrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 - x_0)^2 + (x_2 - y_0)^2$ für $(x_0, y_0) = (0,0)$

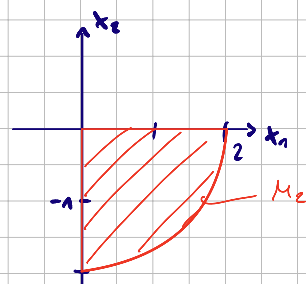
und $4 = 2^2$

$\Longrightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 4$ ist Flächeninhalt des Kreises mit Radius 2 und Mittelpkt $(0,0)$



$= M_2$ inkl. Rand

$\Longrightarrow$

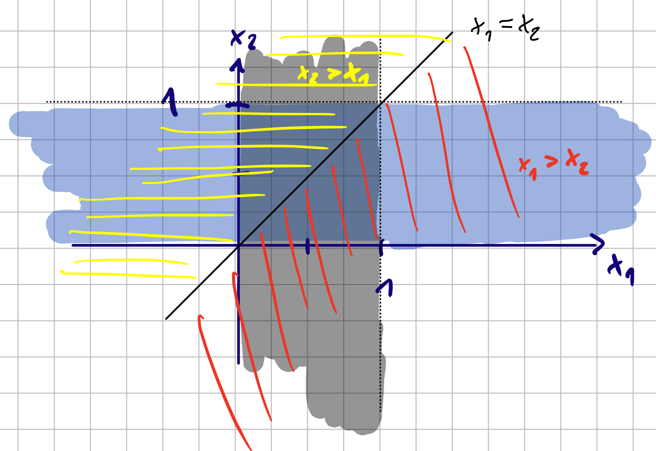


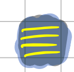
iii) $$M_3 = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le x_2 \le 1 \}$$

$$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_1 \le 1 \}$$

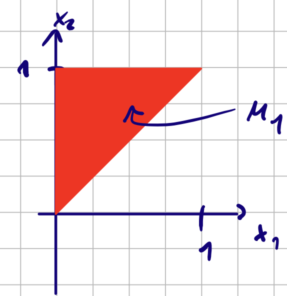
$$\cap \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x_2 \le 1 \}$$

$$\cap \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \le x_2 \}$$



 $= M_1$ inkl. Abschnitt $x_1 = x_2$, y Achse

$\Longrightarrow$



Funktionen in ND

Betrachte $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^N$

(d.h. f hat nun N Variablen $x_1, \dots, x_N$)

z.B. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

Partielle Ableitung : Merkregel: Man leitet eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$ partiell nach x_k (für $k = 1, .., N$) indem man f nur als Funktion von x_k auffasst, die übrigen Variablen als Konstanten betrachtet und wie gewohnt ableitet

Beispiel $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^3 + \sqrt{x_3^7}$

Gesucht : $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3)$, $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3)$, $\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3)$

Betrachte x_2 & x_3 als Konstanten c, d

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1^2 + c^2 + \sqrt{d^7} \right)$$

$$= 2x_1$$

die Ableitung von Konstanten ist 0

$\frac{c}{d}$

Betrachte x_1 & x_3 als Konstanten c, d

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(c^2 + x_2^2 + \sqrt{d^7} \right)$$

$$= 2x_2$$

Betrachte x_1 & x_2 als konstanten c, d

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(c^2 + d^2 + \sqrt{x_3^7}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_3}\sqrt{x_3^7} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3\right)^{\frac{7}{2}}$$

$$= \frac{7}{2}\left(x_3\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{7}{2}\sqrt{x_3^5}$$

Also $\quad \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} f(x_1, x_2, x_3) = \frac{7}{2}\sqrt{x^5}$$

Wie im eindimensionalen Fall nennt man eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$, in $x^* \in D$ partiell nach x_k für ein $k \in \{1, \dots, N\}$ differenzierbar, falls

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k^* + h, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*) - f(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_N^*)}{h}$$

existiert. In diesem Fall setzt man

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x^*) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k^* + h, x_{k+1}^*, \ldots, x_N^*) - f(x_1^*, \ldots, x_{k-1}^*, x_k^*, x_{k+1}^*, \ldots, x_N^*)}{h}$$

f heißt

- partiell nach x_k für ein $k \in \{1, \ldots, N\}$ differenzierbar, falls f in allen $x^* \in D$ partiell nach x_k $k \in \{1, \ldots, N\}$ differenzierbar ist
- partiell differenzierbar, falls f nach allen x_k partiell differenzierbar ist.

Gradient: Ist $f: D \to \mathbb{R}$, $D \in \mathbb{R}^N$ dann nennt man

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_N} f(x) \end{pmatrix}$$

den Gradient von f

Tangentialebene / Tangentialraum

einer Fkt $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$ im Punkt $x_0 \in D$:

$$T_{x_0}(f) = \left\{ (x_1, \dots, x_N, v) \in \mathbb{R}^{N+1} \;\middle|\; v = f(x_0) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)(x_j - x_{0_j}) \right\}$$

Tangentialebene $T_{x_0}(f)$ heißt horizontal falls
$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0) = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, N\}$$
gilt. D.h. falls $\nabla f(x_0) = 0$

Aufgabe in Klausur:

Gegeben

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto (x-1)\exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{2}y^2\right)$$

Bestimmen Sie alle Punkte mit horizontaler Tangentialebene und geben Sie diese Ebene an

Finde also (x^*, y^*) s.d. $\nabla f(x^*, y^*) = 0$ bzw.

$$\nabla f(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x^*, y^*) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x^*, y^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((x-1)\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right)$$

$$= \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left((x-1)\right)}^{=1}\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)$$

$$+ (x-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right) + (x-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right)$$

Weiter ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\cdot 2\left(-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$= -\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)(x-1)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right) + (x-1)\frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right) + (x-1)\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\left(-(x-1)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\left(1-(x-1)^2\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)\left(1-x^2+2x-1\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}y^2\right)x(2-x)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left((x-1)\exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{2}y^2\right)\right)$$
$$= (x-1)\exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{2}y^2\right) y$$

Es gilt daher

$$\nabla f(x,y) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{2}y^2\right) x(2-x) &= 0 \\ (x-1)\exp\left(-\tfrac{1}{2}(x-1)^2+\tfrac{1}{2}y^2\right) y &= 0 \end{aligned} \quad \left| \begin{aligned} &\cdot \frac{1}{\exp(\dots)} \\ &\cdot \frac{1}{\exp(\dots)} \end{aligned} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} x(2-x) &= 0 \\ (x-1)y &= 0 \end{aligned}$$

$x(2-x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ oder $x = 2$

Fall 1 $x = 0$:

dann lautet 2. Gl

$$-y = 0$$

also gilt

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \text{für}$$
$$(x^*, y^*) = 0,0$$

Fall 2 $x = 2$:

Dann lautet die zweite Gl $y = 0$

also gilt

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \text{für}$$
$$(x^*, y^*) = (2,0)$$

$\Rightarrow$ A: Die Tangentialebene von f ist nur in $(x^*, y^*) = (0,0)$ & $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (2, 0)$ horizontal.

Die Tangentialebenen dort lauten

$$T_{(x^*,y^*)}(f) = \{ (x,y,v) \mid v = f(x^*,y^*) + \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} f(x^*,y^*)}^{=0}(x-x^*) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} f(x^*,y^*)}_{\substack{=0 \\ \text{da horizontal}}}(y-y^*) \}$$

$$= \{ (x,y,v) \mid v = f(x^*,y^*) \}$$

mit

$$f(x^*,y^*) = (x^*-1) \exp\left(-\tfrac{1}{2}(x^*-1)^2 + \tfrac{1}{2}y^{*2}\right)$$
$$= -1 \exp\left(-\tfrac{1}{2}(-1)^2\right)$$
$$= -\exp(-1/2)$$

und analog

$$T_{(\tilde{x},\tilde{y})}(f) = \{ (x,y,v) \mid v = f(\tilde{x},\tilde{y}) \}$$

mit $f(\tilde{x},\tilde{y}) = (\tilde{x}-1) \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\tilde{x}-1)^2 + \tfrac{1}{2}\tilde{y}^2\right)$

$$= 1 \exp\left(-1/2 \, (1)^2\right)$$

Lokale Auflösbarkeit

Satz über implizite Funktionen

Ist $F: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ differenzierbar und gilt

$$F(x_1^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*) = 0 \quad \text{sowie}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} F(x_1^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*) \neq 0$$

dann gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ und eine differenzierbare Fkt $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_1^*, \dots, x_n^*) = x_{n+1}^*$ und

$$F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}$

Für die Fkt φ gilt dann wegen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial x_{n+1}} F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Also

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{- \frac{\partial}{\partial x_j} F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))}{\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n))}$$

Aufgabe in Klausur

Gegeben $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto (x-1)\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2\right)$

Zeigen Sie dass die Gleichung $f(x,y) = 1$ in $(x_0, y_0) = (2,1)$ lokal nach y auflösbar ist.

Welchen Funktionswert hat die auflösende Fkt φ an der Stelle 2 ?

Vor. für Satz

i) $f(x_0,y_0) = 1$:

$$f(x_0,y_0) = (x_0-1)\exp\left(-\frac{1}{2}(x_0-1)^2 + \frac{1}{2}y_0^2\right)$$
$$= (2-1)\exp\left(-1/2\,(2-1) + \frac{1}{2}\,1^2\right)$$
$$= 1 \checkmark$$

ii) $\partial/\partial y\, f(x_0,y_0) \neq 0$:

Es ist (vgl. oben)

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = (x-1)\exp\left(-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}y^2\right) y$$

also $$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) = (2-1)\exp\left(-\frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{2}\,1^2\right) 1$$
$$\neq 0$$

S.ü. impl. F

$\Longrightarrow$ $f(x,y) = 1$ ist in $(x_0, y_0) = (2,1)$

lokal nach y auflösbar

D.h. es gibt eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $x_0 = 2$ und eine diffbare Fkt $y : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ mit $y(x_0) = y_0$.

Also gilt $y(2) = 1$

<u>Höhere Ableitung</u> Wie im 1D-Fall können partielle Ableitungen höherer Ordnung betrachtet werden.

Für $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$ bezeichnet

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right)$$

Die partielle Ableitung von $\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$ in Richtung x_k.

Um diese zu berechnen, berechnet man zunächst die partielle Ableitung in der klammer wie gewohnt

Das Ergebnis fasst man als Funktion (z.B. $g(x) := \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)$) auf und berechnet anschließend die partielle Ableitung dieser Funktion in Richtung x_k

<u>Bsp</u>: Gesucht: $\partial/\partial x_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)\right)$

für $f(x_1, x_2) = 2x_1 x_2 + \frac{1}{1+x_1^2} 2x_1$

Berechne zuerst $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$: $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 2x_1$

Setze $g(x_1, x_2) := 2x_1$. Berechne nun

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2) = 2$$

daher ist $\partial/\partial x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} 2x_1$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, x_2)$$

$$= 2$$

Für gewisse Funktionen gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\right)$$

d.h. die Reihenfolge der Differentiationen ist egal

Satz von Schwarz: Ist $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ zwei mal total differenzierbar (d.h. alle part. Abl. zweiter Ord ex & sind stetig) dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\right)$$

für alle $x \in D$ & $j, k \in \{1, \dots, N\}$

Aufgabe in Klausur:

Kann es eine 2x stetig diffbare Fkt g geben mit

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos(2x+y) + 5xy^2 \\ \cos(2x+y) + 10xy \end{pmatrix} \; ?$$

A: Für 2x stetig diffbare Fkt g gilt nach Satz von Schwarz

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)\right)$$

Nun ist

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(2x+y) + 5xy^2 \\ \cos(2x+y) + 10xy \end{pmatrix}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\cos(2x+y) + 5xy^2\right)$$
$$= -2\sin(2x+y) + 10xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(2x+y) + 10xy\right)$$
$$= -2\sin(2x+y) + 10x$$

Also $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \neq \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} g(x,y)$

D.h. so eine Fkt kann es nicht geben

totales Differential

Ist $f: D \to \mathbb{R}$ mit $D \subset \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so nennt man

$$df(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \, dx_i$$

das totale Differential von f bezgl. x_i

Klausuraufgabe: Es gilt

$$x^4 + 3x^2y + y^5 \sin(2x) - 6 = 0$$

Welcher Zusammenhang herrscht zwischen den Differentialen dx & dy?

A: Sei $g(x,y) = x^4 + 3x^2y + y^5 \sin(2x) - 6 = 0$

dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 4x^3 + 6xy + 2y^5 \cos(2x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 3x^2 + 5y^4 \sin(2x)$$

Also

$$0 = dg(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} g(x,y)\, dx + \frac{\partial}{\partial y} g(x,y)\, dy$$

$$= \left(4x^3 + 6xy + 2y^5 \cos(2x)\right) dx$$

$$+ \left(3x^2 + 5y^4 \sin(2x)\right) dy$$

Nichtlineare Optimierung

Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$ 2x total differenzierbar

Notwendige Bed für relatives Extremum :

Ist $x^* \in D$ ein rel. Extremum von f dann gilt

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Hinreichende Bedingung (für $N=2$)

$x^* = (x_1^*, x_2^*)$ ist

- relatives Maximum von f, falls

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^*)\right) < 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^*)\right) \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x^*)\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x^*)\right) \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^*)\right) > 0$$

- relatives Minimum von f, falls

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^*)\right) > 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^*)\right) \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x^*)\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x^*)\right) \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^*)\right) > 0$$

Extrema unter Nebenbed. (der Lagrange-Ansatz)

Zu gegebenem $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$ und $g: D \to \mathbb{R}$

suche $x^* \in D$ sodass $f(x^*)$ möglichst groß (klein)

und $g(x^*) = 0$ erfüllt ist:

Not.: $$\text{Max} \overset{!}{=} f(x)$$ $$\text{udN.} \quad g(x) = 0$$ $$\left(\begin{array}{l} \text{Min} \overset{!}{=} f(x) \\ \text{udN.} \quad g(x) = 0 \end{array}\right)$$

"unter der Nebenbedingung"

Bem: Ist x^* relatives Maximum von f, dann ist x^* relatives Minimum von $-f$

$\Rightarrow$ Es genügt sich auf das Lösen von

$$\text{Max} \overset{!}{=} f(x)$$
$$\text{udN} \quad g(x) = 0$$

zu beschränken.

__Lagrange__ : Vorgehen für $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$

Für $x = (x_1, x_2)$

i) Bilde $\mathcal{L}(x, \lambda) := f(x) + \lambda g(x)$

ii) Berechne $\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla f(x) + \lambda \nabla g(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$

iii) Löse $\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = 0$

Lösungen sind relative Extrema
(Art der Extremums unbekannt)

Wie man die Art der rel. Extrema bestimmt
ist Stoff von Mathe II :)

__Aufgabe in Klausur__

Berechnen Sie mögliche rel. Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 2y \exp(x - 1)$$

unter der Nebenbedingung $3 = x + 2y$
mit der Methode von Lagrange

Lösung : Setze $g(x, y) := 3 - x - 2y$

i) Bilde $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$

$$= 2y \exp(x-1) + \lambda (3 - x - 2y)$$

ii) Berechne $\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda)$:

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}(x,y,\lambda) \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(x,y,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) + \lambda \frac{\partial}{\partial x} g(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Es ist $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \exp(x-1) \\ 2 \exp(x-1) \end{pmatrix}$

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Also

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2y \exp(x-1) - \lambda \\ 2 \exp(x-1) - 2\lambda \\ 3 - x - 2y \end{pmatrix}$$

iii) Löse $\nabla L(x, y, \lambda) = 0$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 2y\exp(x-1) - \lambda &= 0 & &\mid +\lambda \\ 2\exp(x-1) - 2\lambda &= 0 & &\mid +2\lambda;\ \cdot 1/2 \\ 3 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2y\exp(x-1) &= \lambda \\ \exp(x-1) &= \lambda \\ 3 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Gleichsetzen der ersten zwei Gleichungen

$$2y\exp(x-1) = \exp(x-1) \quad \Big| \cdot \frac{1}{\exp(x-1)}$$

$$\overset{\exp(x-1) > 0}{\Longleftrightarrow} \quad 2y = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = 1/2$$

$y = 1/2$ in 3. Gleichung liefert

$$3 - x - 1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = 2$$

Dies in $\lambda = \exp(x-2)$ liefert $\lambda = 1$

A: Das rel. Extrema liegt bei $(x^*, y^*) = (2, 1)$ mit dem Lagrange-Multiplikator $\lambda^* = 1$