Def (Stammfunktion)

Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt $F: D \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f, falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Bem: Da für $g(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt: $g'(x) = 0$, ist $F + c$ eine Stammfkt von f, wenn F eine S von f ist.

Die Menge aller Stammfunktionen zu einer Fkt f heißt das unbestimmte Integral von f

Notation: $\int f \, dx = F(x) + c \qquad c \in \mathbb{R}$

c ist unbestimmt
⤳ "unbestimmtes Int"

Wichtige Stammfunktionen ergeben sich aus den elementaren Ableitungen: z.B.

$$g(x) = x^{n+1}, n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = (n+1)x^n$$

d.h. für $h(x) := \frac{1}{n+1} g(x)$ gilt

$$h'(x) = \frac{1}{n+1} g'(x) = \frac{1}{n+1}(n+1)x^n = x^n$$

Ableitungsregeln $h(x) = c\,g(x)$ mit $c = \frac{1}{n+1}$

also ist $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ eine Stammfunkt von $f(x) = x^n$.

Ähnlich folgen: (Elementare Stammfunktionen)

$f(x) = \exp(x) \Rightarrow F(x) = \exp(x)$ ist Stammfkt von f

$f(x) = \sin(x) \Rightarrow F(x) = -\cos(x)$ ist Stammfkt von f

$f(x) = \cos(x) \Rightarrow F(x) = \sin(x)$ ist Stammfkt von f

$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln(|x|)$ ist Stammfkt von f

$f(x) = x^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$ ist Stammfkt von f

Achtung: $\ln(x)$ ist nur für $x \in (0,\infty)$ definiert und $\frac{1}{x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$(\ln(|x|))' = \ln'(|x|)\,|x|' = \frac{1}{|x|}|x|' = \begin{cases} \frac{1}{-x} \cdot (-1), & x<0 \\ \frac{1}{x} \cdot 1, & x>0 \end{cases}$$

Ähnlich ist dies für $\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$

zB ist dies für $\alpha = 1/2$:

$$\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} = \frac{1}{1-1/2} x^{1-1/2} = 2\sqrt{x}$$

$\sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ während $x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ nur für $x>0$ definiert ist.

Hauptsatz der Differential & Integralrechnung

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig & $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_{x=a}^{x=b} := F(b) - F(a)$$

Alternativ

Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F sei definiert als

$$F: [a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \int_a^x f(x)\,dx$$

Dann gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a,b]$

Aus dem Hauptsatz folgen:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b K f(x)\,dx = K \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{für } K \in \mathbb{R}$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Zur Integration eines Produkts $f(x)g(x)$ oder der Hintereinanderausführung von Funktionen $f(g(x))$ müssen die Produktregel & die Kettenregel im umgekehrten Sinn beachtet werden. Es gilt:

i) partielle Integration: Sind f, g differenzierbar auf $[a,b]$ so gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

ii) lineare Substitution:

Ist $f: D \to \mathbb{R}$ stetig & g auf $[a;b]$ differenzierbar mit $g([a,b]) \subset D$ dann gilt

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$$

Aufgabe in der Klausur

i) Berechnen Sie zu einer beliebigen Funktion $f : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ welche zweimal differenzierbar ist

$$\int_0^3 f'(x)\,dx$$

Lösung: Nach Hauptsatz gilt für stetige Funktionen g

$$\int_a^b g(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

mit G Stammfunktion zu g (D.h. $G'(x) = g(x)$)

Da f nach Vor. zweimal differenzierbar ist, ist f' insbesondere stetig und f ist offensichtlich Stammfunktion von f'. Also gilt nach dem Hauptsatz

$$\int_0^3 f'(x)\,dx = f(3) - f(0)$$

ii) Berechnen Sie $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Lösung:

Alternative I: Bringe $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ auf die Form $f(g(x))\,g'(x)$,

dann gilt $\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$.

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,x = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\,2x$$

Betrachte $g(x) := x^2-1 \Rightarrow g'(x) = 2x$

$f(x) := \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Dann ist

$$f(g(x))\,g'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{g(x)}}\cdot\cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{g(x)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \checkmark$$

Also gilt nach linearer Substitution

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^3 f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(1)}^{g(3)} f(x)\, dx$$

$$= \int_{1^2-1}^{3^2-1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$$

$g(x) = x^2-1$

$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x}\right]_{x=0}^{x=8}$$

$$= \sqrt{8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

jetzt el. Stammfkt bekannt so

$f(x) = x^{-\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}$ ist Stammfkt

$$\alpha = 1/2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{1-1/2} x^{1/2}$$

$$= 2\sqrt{x}$$

Alternative 2: $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

Substituiere (auf gut Glück) $z := x^2-1$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} z = 2x \quad | \cdot dx$$

$$\Rightarrow dz = 2x\, dx \quad | \tfrac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{2x} = dx$$

$$\Rightarrow \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_{\dots}^{\dots} \frac{\cancel{x}}{\sqrt{z}} \frac{1}{2\cancel{x}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\dots}^{\dots} \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{z}\right]_{\dots}^{\dots}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2-1}\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{8} - 2\sqrt{0}\right)$$

$$= \sqrt{8}$$

iii) Berechnen Sie

$$\int_2^x (t-1)\exp(-t)\,dt \qquad \text{für } x \geq 2$$

Wie verhält sich $F(x) = \int_2^x (t-1)\exp(-t)\,dt$ für $x \to \infty$?

Lösung: $\int_2^x (t-1)\exp(-t)\,dt$

mit partieller Integration:

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx$$

Idee: Bringe $(t-1)\exp(-t)$

auf die Form $f'(t)g(t)$ sodass $f(t)g'(t)$

im Besten Fall eine elementare Stammfunktion hat.

Bemerke:

Wenn $g(t) := \exp(-t) \Rightarrow g'(t) = -\exp(-t) = -g(t)$

$$\Rightarrow g'(t)f(t) = -g(t)f(t)$$

Wenn $g(t) := t-1 \Rightarrow g'(t) = 1 \Rightarrow g'(t)f(t) = f(t)$ ✓

sei $g(t) := t-1$ & $f'(t) := \exp(-t)$

dann ist

$$\int_2^x (t-1)\exp(-t)\,dt = \int_2^x f'(t)g(t)\,dt \overset{\text{partielle Integration}}{=} [f(t)g(t)]_{t=2}^{t=x} - \int_2^x f(t)g'(t)\,dx$$

benötigen also noch f d.h. Stammfunktion von f'

Nun ist $f'(t) = \exp(-t)$ also $f(t) = -\exp(-t)$

D.h. es gilt

$$\int_2^x (t-1)\exp(-t)\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_{t=2}^{t=x} - \int_2^x f(t)g'(t)\,dx$$

$$= \left[-\exp(-t)(t-1)\right]_{t=2}^{t=x} - \int_2^x -\exp(-t)\,dt$$

$$= -\exp(-x)(x-1) + \exp(-2) + \int_2^x \exp(-t)\,dt$$

$$= -\exp(-x)(x-1) + \exp(-2) + \left[-\exp(-t)\right]_{t=2}^{t=x}$$

$$= -\exp(-x)(x-1) + \exp(-2) + -\exp(-x) + \exp(-2)$$

$$= -\exp(-x)x + \cancel{\exp(-x)} + \exp(-2) \cancel{-\exp(-x)} + \exp(-2)$$

$$= -\exp(-x)x + 2\exp(-2)$$

$$= \frac{2}{\exp(2)} - \frac{x}{\exp(x)}$$

Da die Exponentialfkt schneller wächst als jede Potenz gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \int_2^x (t-1)\exp(-t)\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\exp(2)} - \frac{x}{\exp(x)}$$

$$= \frac{2}{\exp(2)} - \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp(x)}}_{=0}$$

$$= \frac{2}{\exp(2)}$$

iv) Berechnen Sie

$$F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\cos(t)\,dt \qquad \text{für} \quad x \geq -\frac{\pi}{2}$$

Ist F für $x \geq -\frac{\pi}{2}$ beschränkt? Geben Sie die Nullstellen von F in $[-\pi/2, 2\pi]$ an

<u>Lösung:</u> mit part. Integration

Ähnliches Vorgehen wie zuvor, Aber:

Egal wie f' oder g gewählt wird, man dreht sich im Kreis:

- Sei $f'(t) := \sin(t)$, $g(t) := \cos(t)$, dann ist $f(t) = -\cos(t)$ & $g'(t) = -\sin(t)$

Also gilt

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\cos(t)\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} f'(t)\,g(t)\,dt$$

$$\overset{p.I}{=} \Big[-\cos(t)\cos(t)\Big]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} (-\cos(t))(-\sin(t))\,dt$$

$$= \Big[-(\cos(t))^2\Big]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x} - \boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(t)\sin(t)\,dt}$$

Ist nicht einfacher geworden sondern bleibt gleich

Trick: Es gilt: $y = c - y \iff 2y = c \iff y = \frac{c}{2}$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\cos(t)\,dt = \left[-(\cos(t))^2\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(t)\sin(t)\,dt$$

$$\iff \quad 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\cos(t)\,dt = \left[-(\cos(t))^2\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x}$$

$$\iff \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-(\cos(t))^2\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x}$$

Also

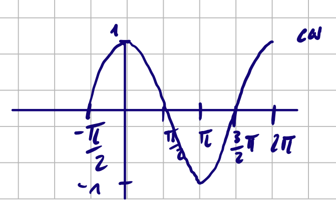
$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(t)\cos(t)\,dt &= \frac{1}{2}\left[-(\cos(t))^2\right]_{t=-\frac{\pi}{2}}^{t=x} \\ &= \frac{1}{2}\left(-(\cos(x))^2 + \underbrace{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2}_{=0}\right) \\ &= -\frac{1}{2}(\cos(x))^2 \end{aligned}$$

Nullstellen F in $[-\pi/2, 2\pi]$:

$$F(x) = 0 \iff -\tfrac{1}{2}\cos(x)^2 = 0$$
$$\iff \cos(x) = 0$$

Es gilt: $\cos(x) = 0 \iff x = \pi(k - 1/2),\ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Nullstellen von F in $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$ sind $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$



Integration durch Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}\,dx = ?$$

Idee: Bestimme Konstanten α, β sodass

$$\int \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}\,dx = \int \frac{\alpha}{x-a}\,dx + \int \frac{\beta}{x-b}\,dx$$

gilt. Dann ist

$$\int \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}\,dx = \int \frac{\alpha}{x-a}\,dx + \int \frac{\beta}{x-b}\,dx$$

$$= \alpha \ln(|x-a|) + \beta \ln(|x-b|)$$

Bestimmung α, β: Betrachte

$$\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} = \frac{\alpha(x-b)}{(x-a)(x-b)} + \frac{\beta(x-a)}{(x-b)(x-a)}$$

$$= \frac{\alpha x - \alpha b + \beta x - \beta a}{(x-a)(x-b)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)x - \alpha b - \beta a}{(x-a)(x-b)}$$

Damit

$$\frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$

gilt müssen α & β also

$$\alpha + \beta = R$$
$$-\alpha b - \beta a = S$$

lösen.

Vorgehen: Ist $\int \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}\,dx$ gesucht, löse das

LGS

$$\alpha+\beta = R$$
$$-\alpha b - \beta a = S$$

nach α & β. Dann ist

$$\int \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}\,dx = \alpha \ln(|x-a|) + \beta \ln(|x-b|) + C$$
$$C \in \mathbb{R}$$

Aufgabe in Klausur: Berechnen Sie

$$\int \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx$$

Lsg: $\frac{4}{(x-2)(x+2)} = \frac{Rx+S}{(x-a)(x-b)}$ für $R=0$, $S=4$

sowie $a=2$ & $b=-2$

Löse $\begin{array}{l}\alpha+\beta = R\\ -\alpha b-\beta a = S\end{array}$: $\begin{array}{l}\alpha+\beta = 0\\ -\alpha(-2)-\beta 2 = 4\end{array}$ $\Rightarrow$ $\alpha = -\beta$

$\alpha = -\beta$ in zweite Zeile liefert

$$-(-\beta)(-2) - 2\beta = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad -2\beta - 2\beta = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad -4\beta = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \beta = -1$$
$$\Rightarrow \quad \alpha = -\beta = 1$$

A 1/10

$$\int \frac{4}{(x-2)(x+2)}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)}\,dx + \int \frac{-1}{x+2}\,dx$$

$$= \ln(|x-2|) - \ln(|x+2|) + C$$

Uneigentliche Integrale

Ist $f:[a,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig und existiert

$$I = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

so nennt man I ein konvergentes uneigentliches Integral

Existiert der Grenzwert I nicht so heißt das uneigentliche Integral divergent

Analog für $f:(-\infty,b] \to \mathbb{R}$ stetig : $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

Analog für $f:(-\infty,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig :

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{für } c\in(-\infty,\infty)$$

Analog für $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ stetig :

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0} \int_{a+\varepsilon_1}^c f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_c^{b-\varepsilon_2} f(x)\,dx \quad \text{für } c\in(a,b)$$

Berechnung uneigentlicher Integrale

Bsp i) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$ für $x=0$ nicht def, $\frac{1}{\sqrt{x}}$ auf $(0,1]$ stetig

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_{x=\varepsilon}^{x=1} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon} = 2$$

ii) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x = \pm 1$ nicht def, auf $(-1,1)$ stetig

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{\varepsilon_1}^{c} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$+ \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c}^{1-\varepsilon_2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$=$

$\vdots$

$= \pi$