Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 1

Aufgabe 1

Gegeben seien die beiden Mengen

$$A = \{1,2,3,4\} \quad \text{und} \quad B = [3,6].$$

Berechnen Sie folgende Mengenoperationen: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ und $B \backslash A$.

Lösung:
Es seien $A = \{1,2,3,4\}$, $B = [3,6]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \,|\, x \in A \,\text{oder}\, x \in B\} \\
&= \{x \,|\, x \in \{1,2,3,4\} \,\text{oder}\, x \in [3,6]\} \\
&= \{x \,|\, x \in \{1,2\} \,\text{oder}\, x \in [3,6]\} \\
&= \{1,2\} \cup [3,6]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \{x \,|\; x \in A \,\text{und}\, x \in B\} \\
&= \{x \,|\, x \in \{1,2,3,4\} \,\text{und}\, x \in [3,6]\} \\
&= \{x \,|\, x \in \{3,4\}\} \\
&= \{3,4\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \setminus B &= \{x \,|\, x \in A \,\text{und}\, x \notin B\} \\
&= \{x \,|\, x \in \{1,2,3,4\} \,\text{und}\, x \notin [3,6]\} \\
&= \{x \,|\, x \in \{1,2\}\} \\
&= \{1,2\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B \setminus A &= \{x \,|\, x \in B \,\text{und}\, x \notin A\} \\
&= \{x \,|\, x \in [3,6] \,\text{und}\, x \notin \{1,2,3,4\}\} \\
&= \{x \,|\, x \in (3,4) \cup (4,6]\} \\
&= (3,4) \cup (4,6] \\
&=]3,4[\cup]4,6]
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Geben Sie alle Teilmengen der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ an.

Lösung:
Die Teilmengen der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ lauten:

$$
\begin{aligned}
&\{\},\\
&\{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{d\},\\
&\{a,b\},\ \{a,c\},\ \{a,d\},\ \{b,c\},\ \{b,d\},\ \{c,d\},\\
&\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\},\ \{b,c,d\},\\
&\{a,b,c,d\} = M
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $2x + 11 > 10 - 5x$.

b) $\frac{4}{x} \leq 2$.

c) $5 - 2|x - 3| \leq 3$.

Lösung:

a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
2x + 11 > 10 - 5x \quad &\Leftrightarrow \quad 7x > -1\\
&\Leftrightarrow \quad x > -\frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{7}\}$

b) Betrachte $\frac{4}{x} \leq 2$ mit $x \neq 0$. Um die Ungleichung mit x zu multiplizieren, betrachten wir zwei FÃ¤lle:

(i) Fall 1: $x > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{x} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \leq 2x\\
&\Leftrightarrow \quad 2 \leq x
\end{aligned}
$$

d.h. $x > 0$ und $x \geq 2$ liefert $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

(ii) Fall 2: $x < 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{4}{x} \leq 2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4 \geq 2x\\
&\Leftrightarrow \quad 2 \geq x
\end{aligned}
$$

d.h. $x < 0$ und $x \leq 2$ liefert $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

Insgesamt ergibt sich $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ oder } x \geq 2\}$

c) Es gilt

$$\begin{aligned} 5 - 2|x-3| \leq 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 2 \leq 2|x-3| \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \leq |x-3| \end{aligned}$$

Ungleichungen betragsfrei:

$$1 \leq |x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{für } x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{für } x < 3 \end{cases}$$

Erhalte zwei Ungleichungen:

(i) <u>Fall 1:</u> $1 \leq x - 3$ fÃ¼r $x \geq 3$

$$1 \leq x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4$$

ergibt mit $x \geq 3$: $x \geq 4$, d.h. $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$

(ii) <u>Fall 2:</u> $1 \leq -x + 3$ fÃ¼r $x < 3$

$$1 \leq -x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$$

ergibt mit $x < 3$: $x \leq 2$, d.h. $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

Insgesamt ergibt sich $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4 \text{ oder } x \leq 2\}$

Aufgabe 4

Stellen Sie folgende Funktionen qualitativ graphisch dar:

a) $f(x) = 2 - |x|$.

b) $g(x) = |x+1| + |x-1|$.

c) $h(x) = \max(x, 1-x)$.

Lösung:

a)

$$f(x) \;=\; 2 - |x| \;=\; 2 - \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \;=\; \begin{cases} 2-x & \text{für } x \geq 0 \\ 2+x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

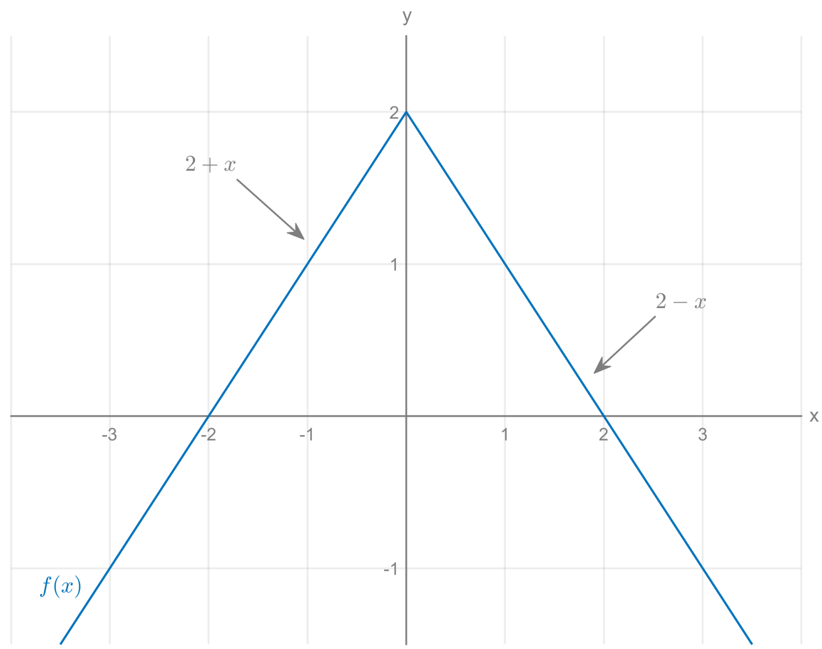

Abbildung 1: Die Funktion $f(x) = 2 - |x|$.

b)

$$g(x) \;=\; |x+1| + |x-1| \;=\; \left\{ \begin{array}{ll} x+1 & \text{für } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{für } x < -1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{ll} x-1 & \text{für } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{für } x < 1 \end{array} \right\}$$

Dies ergibt vier FÃ¤lle:

(i) $x \geq -1$ und $x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad x \geq 1$:

$$g(x) \;=\; x+1+x-1 \;=\; 2x \quad \text{für} \quad x \geq 1$$

(ii) $x \geq -1$ und $x < 1$:

$$g(x) \;=\; x+1+(-x+1) \;=\; 2 \quad \text{für} \quad -1 \leq x < 1$$

(iii) $x < -1$ und $x \geq 1$:
Dieser Fall geht nicht!

(iv) $x < -1$ und $x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < -1$:

$$g(x) \;=\; -x-1+(-x+1) \;=\; -2x \quad \text{für} \quad x < -1$$

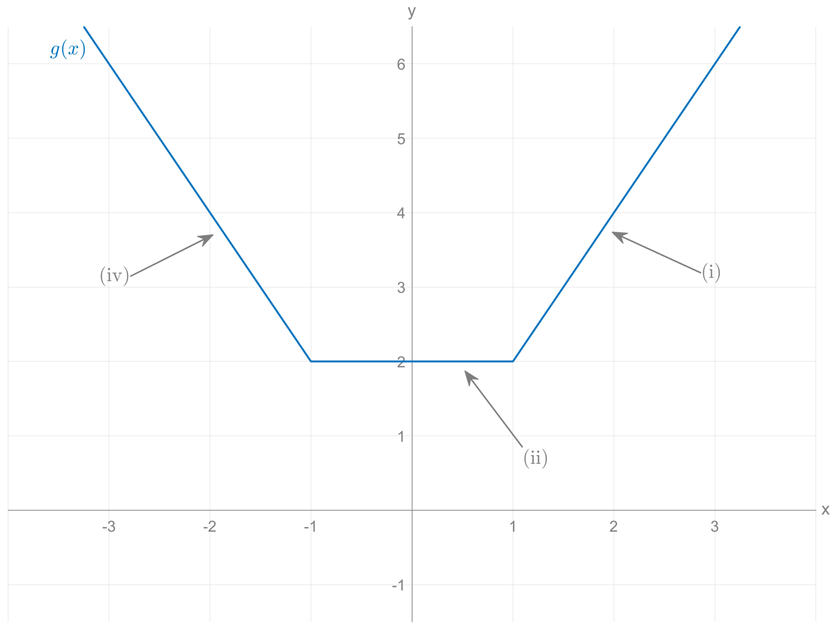

Abbildung 2: Die Funktion $g(x) = |x + 1| + |x - 1|$.

c)

$$h(x) \;=\; max(x, 1-x) \;=\; \begin{cases} x & \text{für } 1-x \leq x \\ 1-x & \text{für } 1-x > x \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} x & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \\ 1-x & \text{für } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

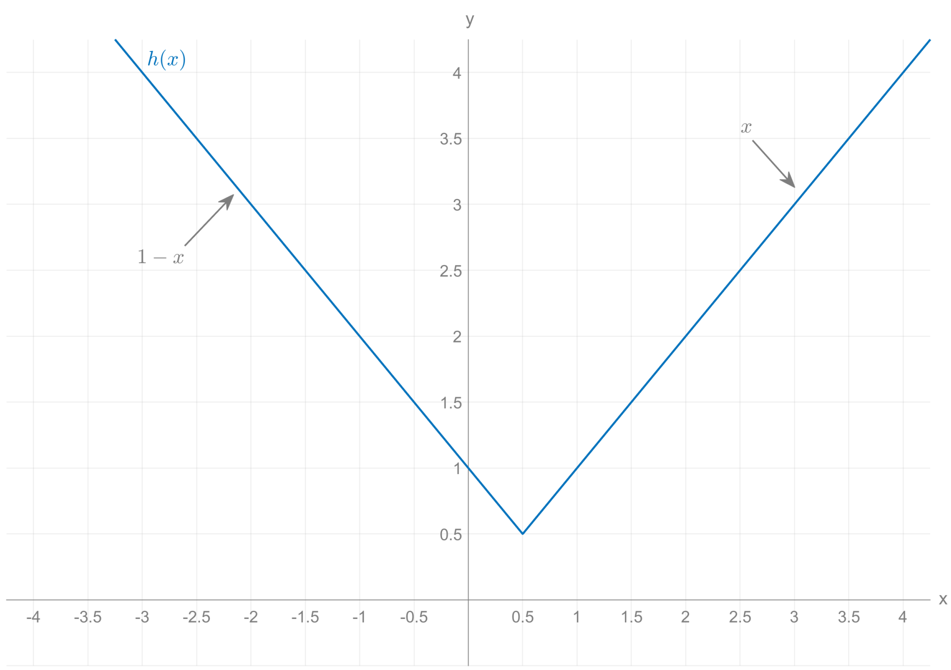

Abbildung 3: Die Funktion $h(x) = \max(x, 1-x)$.

Bemerkung: Dem Schaubild entnimmt man $h(x) = |x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}$