Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 2

Aufgabe 1

Lösen Sie die vorliegenden Gleichungen nach der jeweiligen Variablen auf:

$$\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha = \frac{3}{2}, \qquad \exp(2\xi) + 2\exp(\xi) = 8, \qquad \ln(\beta) + \ln(2\beta) = 3.$$

Lösung:

- Es gilt:

$$\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

Also $\alpha = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

- Es gilt:

$$\exp(2\xi) + 2\exp(\xi) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad (\exp(\xi))^2 + 2\exp(\xi) - 8 = 0$$

Substitution: Setze $z := \exp(\xi)$ und erhalte so die Gleichung

$$z^2 + 2z - 8 = 0$$

Lösung: $z = -1 \pm \sqrt{1+8} = -1 \pm 3 = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

Rücksubstitution liefert:

$$\exp(\xi) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \ln(2)$$

$$\exp(\xi) = -4 \quad \text{hat keine Lösung!}$$

- Es gilt:

$$\ln(\beta) + \ln(2\beta) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2\beta^2) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2\beta^2 = \exp(3)$$

  d.h. $\beta = \pm\sqrt{\frac{\exp(3)}{2}}$

  Es muss $\beta > 0$ gelten, also ist $\beta = \sqrt{\frac{\exp(3)}{2}}$ die einzige Lösung.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D_{max} \subset \mathbb{R}$ und den dazugehörigen Wertebereich der folgenden Funktionen:

$$f(x) = x - 2\sin(x), \qquad g(x) = \frac{1}{2 - \cos(2x)}, \qquad h(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 16}.$$

Lösung:

- $f(x) = x - 2\sin(x)$

  Definitionsbereich:

  Der Definitionsbereich von f ist $D_{max} = \mathbb{R}$

  Wertebereich:

  Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2\sin(x) \leq x + 2 \to -\infty \quad \text{für} \quad x \to -\infty \\ f(x) &= x - 2\sin(x) \geq x - 2 \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty \end{aligned}$$

  also $W_{max} = \mathbb{R}$

- $g(x) = \frac{1}{2-\cos(2x)}$

  Definitionsbereich:

  Es gilt:

$$|\cos(2x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 2 - \cos(2x) \neq 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

  Somit ist $D_{max} = \mathbb{R}$

  Wertebereich:

  Mit $|\cos(2x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt für g außerdem

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2 - \cos(2x)} \leq \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 \\ g(x) &= \frac{1}{2 - \cos(2x)} \geq \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

  also $W_{max} = [\frac{1}{3}, 1]$

- $h(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 16}$

  Definitionsbereich:

  Da der Begriff der Wurzel nur für nicht negative Werte definiert ist, muss für h gelten:

$$x^2 - 16 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4 \text{ oder } x \leq -4$$

  und somit ist $D_{max} = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

Wertebereich:

Es gilt

$$h(x) \;=\; 2 - \sqrt{x^2 - 16} \;\leq\; 2, \qquad h(x) \;\to\; -\infty \quad \text{für } x \to \pm\infty$$

also $W_{max} = (-\infty, 2]$

Aufgabe 3

Berechnen Sie alle Nullstellen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \frac{(x^3 + 3x^2 + 2x)(x^8 + 0,1)}{\exp(800x^5)}, \qquad g(x) = \frac{\cos(x^2) + 1}{|x| + 1}.$$

Lösung:

- Es gilt

$$f(x) \;=\; \frac{(x^3 + 3x^2 + 2x)(x^8 + 0,1)}{\exp(800x^5)} \;=\; \frac{x(x^2 + 3x + 2)(x^8 + 0,1)}{\exp(800x^5)}$$

  Da $x^8 + 0,1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x \;=\; 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + 3x + 2 \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad x \;=\; 0 \quad \text{oder} \quad x \;=\; -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} \;=\; \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases} \end{aligned}$$

  d.h. $x = 0$, $x = -1$ und $x = -2$ sind alle Nullstellen von f

- Es gilt

$$\begin{aligned} g(x) \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos(x^2) + 1 \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \cos(x^2) \;=\; -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \;=\; (2k+1)\pi \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \;=\; \pm\sqrt{(2k+1)\pi} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie mit den Mitteln der Vorlesung:

(i) $f(x) = x$ ist sowohl konvex als auch konkav;

(ii) $g(x) = |x|$ ist konvex;

(iii) $h(x) = -|x|$ ist konkav.

Lösung:

(i) $f(x) = x\ ,\ x \in \mathbb{R}$
Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \;=\; \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \;=\; \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

d.h. es gilt sowohl $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \;\leq\; \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ als auch $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \;\geq\; \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.
Also ist f sowohl konvex als auch konkav.

(ii) $g(x) = |x|\ ,\ x \in \mathbb{R}$
Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= |\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\leq} |\lambda x_1| + |(1-\lambda)x_2| \\
&= \lambda|x_1| + (1-\lambda)|x_2| \\
&= \lambda g(x_1) + (1-\lambda)g(x_2)
\end{aligned}$$

Also ist g konvex.

(iii) $h(x) = -|x|\ ,\ x \in \mathbb{R}$
Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned}
h(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= -\,|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2| \\
&\overset{\triangle\text{-Ungl.}}{\geq} -\,(|\lambda x_1| + |(1-\lambda)x_2|) \\
&= -\,(\lambda|x_1| + (1-\lambda)|x_2|) \\
&= \lambda(-|x_1|) + (1-\lambda)(-|x_2|) \\
&= \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)
\end{aligned}$$

Also ist h konkav.