Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 3

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Umkehrbarkeit:

(i) $f(x) = \frac{1}{x},\ D_f = [1, \infty[$.

(ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-2},\ D_f =]2, \infty[$.

(iii) $f(x) = -2x^2,\ D_f = [-1, 1]$.

Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion f^{-1} sowie deren Definitionsbereich an.

Lösung:

(i) $f(x) = \frac{1}{x},\ D_f = [1, \infty)$
Nach Skript ist f streng monoton fallend auf $D_f = [1, \infty)$, also existiert f^{-1}.
Bestimmung von f^{-1}:

$$y = \frac{1}{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{y} =: f^{-1}(y)$$

Definitionsbereich von f^{-1}:
Wertebereich von f: $W_f = (0, 1] \quad \Rightarrow \quad D_{f^{-1}} = W_f = (0, 1]$

(ii) $f(x) = \frac{x+1}{x-2},\ D_f =]2, \infty[$
Zeige, f ist streng monoton fallend auf D_f. Für $x_2 > x_1 > 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+1}{x_1-2} > \frac{x_2+1}{x_2-2} \quad &\Leftrightarrow \quad (x_1+1)(x_2-2) > (x_2+1)(x_1-2) \\
&\Leftrightarrow \quad x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 > x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 2 \\
&\Leftrightarrow \quad -3x_1 > -3x_2 \\
&\Leftrightarrow \quad x_1 < x_2
\end{aligned}$$

$x_1 < x_2$ ist nach Voraussetzung erfüllt und somit ist gezeigt, dass f streng monoton fallend ist, daher existiert f^{-1}.
Bemerkung: Hier eventuell nochmal die Äquivalenzumformungen erklären.

Bestimmung von f^{-1}:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{x-2} \quad &\Leftrightarrow \quad y(x-2) = x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad xy - 2y = x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(y-1) = 2y+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2y+1}{y-1} =: f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Definitionsbereich von f^{-1}:
Wertebereich von f:

$$\begin{aligned} &f(x) \to \frac{x}{x} = 1 \quad \text{für } x \to \infty \\ &f(x) \to \infty \qquad\quad \text{für } x \to 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad D_{f^{-1}} = W_f = (1, \infty)$

(iii) $f(x) = -2x^2,\ D_f = [-1, 1]$
f^{-1} existiert nicht, da f nicht streng monoton auf D_f ist!

Aufgabe 2

Bei einem Zinssatz von 3% wird ein Grundkapital angelegt. Nach wieviel Jahren hat sich das Grundkapital verdoppelt, falls Zinsen mitverzinst werden?

Lösung:
Sei K_0 das Grundkapital. Die Formel mit Zinseszins nach n Jahren mit $p = 3\%$ lautet:

$$K_n = K_0(1 + 0,03)^n$$

Das Grundkapital verdoppelt sich, d.h.:

$$\begin{aligned} &2K_0 = K_0(1 + 0,03)^n \\ \Leftrightarrow \quad &2 = 1,03^n \\ \Leftrightarrow \quad &ln(2) = n \cdot ln(1,03) \\ \Leftrightarrow \quad &n = \frac{ln(2)}{ln(1,03)} \approx 23,45 \end{aligned}$$

d.h. nach 24 Jahren hat sich K_0 verdoppelt.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die nachfolgenden Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz:

$$a_n = \frac{1}{n+1}, \quad b_n = (-1)^n \frac{1}{3^n} + 1, \quad c_n = \frac{n^2-1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Hinweis: Berechnen Sie zur Veranschaulichung jeweils die ersten vier Folgeglieder.

Lösung:

(i) $a_n = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{5}$$

Monotonie:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 < n+2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 < 2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ a_n ist streng monoton fallend.

Beschränktheit:

$$\begin{aligned} &\text{nach oben:} \quad a_n \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \\ &\text{nach unten:} \quad a_n > 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Konvergenz:

Monotonie und Beschränktheit liefert Konvergenz (Satz aus dem Skript!), d.h. a_n ist konvergent.

Dieser Satz sagt aus, dass a_n konvergiert, also ein Grenzwert existiert, nicht jedoch gegen welche Zahl.

Verwende hierzu die ε-Definition:

Zeige, dass $a = 0$ der Grenzwert von a_n ist.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N+1} < \varepsilon$ (so ein N existiert!). Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

(ii) $b_n = (-1)^n \frac{1}{3^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$

$$b_1 = \frac{2}{3}, \quad b_2 = \frac{10}{9} \approx 1,111, \quad b_3 = \frac{26}{27} \approx 0,963, \quad b_4 = \frac{82}{81} \approx 1,012$$

Monotonie:

b_n ist nicht monoton, da für alle geraden n gilt $b_n > 1$ und ungeraden n gilt $b_n < 1$.

Beschränktheit:

$$\text{nach oben:} \quad b_n \leq \frac{1}{9} + 1 = \frac{10}{9} \quad (\text{nehme } n = 2)$$
$$\text{nach unten:} \quad b_n \geq -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \quad (\text{nehme } n = 1)$$

Konvergenz:
(hier greift der Satz aus (i) nicht, da b_n nicht monoton ist!)
Zeige mit der ε-Definition, dass $b = 1$ der Grenzwert von b_n ist.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{3^N} < \varepsilon$, dann gilt für alle $n \geq N$:

$$|b_n - b| = \left|(-1)^n \frac{1}{3^n} + 1 - 1\right| = \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{3^N} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 1$$

(iii) $c_n = \frac{n^2-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{3}{2}, \quad c_3 = \frac{8}{3}, \quad c_4 = \frac{15}{4}$$

Monotonie:

$$\begin{aligned} c_{n+1} > c_n \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)^2 - 1}{n+1} > \frac{n^2-1}{n} \\ &\Leftrightarrow \quad n^3 + 2n^2 > n^3 + n^2 - n - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad n^2 + n + 1 > 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ c_n ist streng monoton wachsend.
Beschränktheit:

nach oben: unbeschränkt
nach unten: $c_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Konvergenz:
Es gilt $c_n = n - \frac{1}{n} \to \infty$ für $n \to \infty$, d.h. c_n ist nicht konvergent, also divergent.

Aufgabe 4

a) Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit dem Summenzeichen:

$$s = 2 + 4 + 6 + 8 + 10, \qquad r = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$$

Wie lautet allgemein die zugehörige n-te Partialsumme? Konvergieren die entsprechenden Reihen dazu?

b) Nach Vorlesung gilt für die geometrische Reihe

$$\sum_{i=1}^{n} \rho^{i-1} = \frac{1-\rho^n}{1-\rho}, \; n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1} = \frac{1}{1-\rho}, \; |\rho| < 1.$$

Gegeben sei nun $\rho = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie $s_n = \sum_{i=2}^{n+1} \rho^i$ für $n = 10$ sowie $\lim_{n\to\infty} s_n$.

Lösung:

a) $$s = 2+4+6+8+10 = 2(1+2+3+4+5) = 2\sum_{i=1}^{5} i = \sum_{i=1}^{5} 2i$$
$$r = 1+3+5+7+9 = \sum_{k=1}^{5}(2k-1)$$
Allgemein als n-te Partialsumme:
$$s_n = \sum_{i=1}^{n} 2i \geq 2n \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$
$$r_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) \geq 2n-1 \to \infty \quad \text{für} \quad n \to \infty$$
$\Rightarrow$ die entsprechenden Reihen konvergieren nicht.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=2}^{n+1} \rho^i = \sum_{i=3}^{n+2} \rho^{i-1} = \sum_{i=1}^{n} \rho^{i-1} - \rho^{1-1} - \rho^{2-1} + \rho^{(n+1)-1} + \rho^{(n+2)-1} \\ &= \frac{1-\rho^n}{1-\rho} - 1 - \rho + \rho^n + \rho^{n+1} \end{aligned}$$

Sei nun $\rho = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} s_{10} &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10+1} \approx 0,4995 \\ \lim_{n\to\infty} s_n &= \sum_{i=1}^{\infty} \rho^{i-1} - 1 - \rho + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \rho^n}_{=0 \text{ für } \rho=\frac{1}{2}} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \rho^{n+1}}_{=0 \text{ für } \rho=\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = 2 - 1,5 = 0,5 \end{aligned}$$