Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 4

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Grenzwerte der unten stehenden Folgen und Reihe für $n \to \infty$:

$$a_n = \frac{(n+2)^2}{(4n-2)^2}, \quad b_n = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{\frac{n}{3}}, \quad c_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt[3]{s^j},\ 0 < s < 1.$$

Lösung:

(i) Es gilt:

$$a_n = \frac{(n+2)^2}{(4n-2)^2} = \frac{n^2+4n+4}{16n^2-16n+4} = \frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{16-\frac{16}{n}+\frac{4}{n^2}} \to \frac{1}{16} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

(ii) Es gilt:

$$b_n = \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{\frac{n}{3}} = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n}{3}}$$

Setze $m = 2n$ und erhalte (wegen $n \to \infty \Rightarrow m \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{\frac{m}{6}} = \underbrace{\left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right)}_{=\exp(1)=\mathrm{e}}^{\frac{1}{6}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{6}} = \exp\left(\frac{1}{6}\right)$$

(iii) Es gilt:

$$c_n = \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt[3]{s^j} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(s^{\frac{1}{3}}\right)^j = \sum_{j=1}^{n}\left(s^{\frac{1}{3}}\right)^{j-1}$$

Da $0 < s^{\frac{1}{3}} < 1$ (wegen $0 < s < 1$) gilt, folgt mit der geometrischen Reihe

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{1-s^{\frac{1}{3}}}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die Grenzwerte für $x \to \infty$ für die Funktionen

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-3)^2} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{(\sqrt{x}-3)^4}{\sqrt{x^5}+2}.$$

Lösung:

(i) Es gilt:

$$f(x) \;=\; \frac{2x^2}{(x-3)^2} \;=\; \frac{2x^2}{x^2-6x+9} \;=\; \frac{2}{1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}} \;\to\; \frac{2}{1} \;=\; 2 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

(ii) Es gilt:

$$g(x) \;=\; \frac{(\sqrt{x}-3)^4}{\sqrt{x^5}+2} \;\overset{(*)}{=}\; \frac{x^2-12x^{\frac{3}{2}}+54x-108x^{\frac{1}{2}}+81}{x^{\frac{5}{2}}+2} \;=\; \frac{1-\dfrac{12}{x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{54}{x}-\dfrac{108}{x^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{81}{x^2}}{x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{x^2}}$$

$(*)$ $\quad (a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$

Es folgt:

$$g(x) \;\to\; 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

Bemerkung:

Es folgt $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, da

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12}{x^{\frac{1}{2}}}=0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{54}{x}=0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{108}{x^{\frac{3}{2}}}=0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{81}{x^2}=0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{2}} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} 1 = 1$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f(x) = \exp(2x)\sin(x), \quad g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right), \quad h(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}.$$

Lösung:

(i) $f'(x) \;=\; 2\exp(2x)\sin(x)+\exp(2x)\cos(x) \;=\; \exp(2x)\Big(2\sin(x)+\cos(x)\Big)$

(ii) $g'(x) \;=\; \dfrac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \;=\; -\frac{1}{x}$

(iii) $h'(x) \;=\; \dfrac{-\sin(x)x^2-\cos(x)\cdot 2x}{x^4} \;=\; -\dfrac{x\sin(x)+2\cos(x)}{x^3}$

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $f(x) = |x|$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

Lösung:

Sei $f(x) = |x|$. Zu zeigen f ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar d.h. der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{für} \quad x = 0$$

existiert nicht.

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

Da der rechtsseitige ungleich dem linksseitigen Grenzwert ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ nicht.

Also ist $f(x) = |x|$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar.