Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 5

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+2},\ x \geq 0$ eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt. Berechnen Sie die Ableitung von f^{-1} mittels der Umkehrregel.

Lösung:
Sei $f(x) = \frac{x-1}{x+1},\ x \geq 0$. Dann gilt:

$$f'(x) \;=\; \frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2} \;=\; \frac{3}{(x+2)^2} \;>\; 0 \quad \text{für } x \geq 0$$

Somit ist f streng monoton wachsend für $x \geq 0$ und daher existiert f^{-1}.
Die Umkehrregel lautet:

$$(f^{-1})'(x) \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Berechnung der Umkehrfunktion f^{-1}:

$$y \;=\; \frac{x-1}{x+2} \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)y \;=\; x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x \;=\; -\frac{2y+1}{y-1}$$

d.h. $f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-1}$.
Ableitung mittels der Umkehrregel:

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(x) \;&=\; \frac{1}{\frac{3}{(f^{-1}(x)+2)^2}} \overset{f^{-1}(x) = -\frac{2x+1}{x-1}}{=} \frac{1}{3}\left(-\frac{2x+1}{x-1}+2\right)^2 \;=\; \frac{1}{3}\left(-\frac{2x+1}{x-1}+\frac{2(x-1)}{x-1}\right)^2 \\ &=\; \frac{1}{3}\left(-\frac{2x+1-2x+2}{x-1}\right)^2 \;=\; \frac{9}{3(x-1)^2} \;=\; \frac{3}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Bemerkung:
Die Ableitung der Umkehrfunktion hätte man auch direkt durch ableiten von $f^{-1}(x)$ berechnen können, aber in der Aufgabenstellung wurde explizit mit Hilfe der Umkehrregel gefordert.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \ln(x),\ x > 0$ strikt konkav ist.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist die Funktion $g(x) = x^\alpha,\ x > 0$ strikt konkav bzw. strikt konvex?

c) Bestimmen Sie für die Funktion $h(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$ diejenigen Teilintervalle auf $\mathbb{R}$, auf denen h konkav bzw. konvex ist.

Lösung:

a) Für $f(x) = \ln(x),\ x > 0$ gilt $f'(x) = \frac{1}{x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. Damit folgt f ist strikt konkav.

b) Für $g(x) = x^\alpha,\ x > 0$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ und $g''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$.

(i) Fall $\alpha < 0$ oder $\alpha > 1$:

$$g''(x) > 0 \quad \text{für} \quad x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad g \text{ strikt konvex für } x > 0$$

(ii) Fall $0 < \alpha < 1$:

$$g''(x) < 0 \quad \text{für} \quad x > 0 \qquad \Rightarrow \qquad g \text{ strikt konkav für } x > 0$$

Bemerkung:
Für $\alpha = 1$ ist g sowohl konvex als auch konkav

c) Für $h(x) = -x^3 + 2x^2 + 1$ gilt $h'(x) = -3x^2 + 4x$ und $h''(x) = -6x + 4$.
Nullstelle von $h''(x)$:

$$h''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

Daraus folgt

(i) Für $x \leq \frac{2}{3}$ gilt $h''(x) \geq 0$ und somit ist h konvex für $x \in (-\infty, \frac{2}{3}]$
(ii) Für $x \geq \frac{2}{3}$ gilt $h''(x) \leq 0$ und somit ist h konkav für $x \in [\frac{2}{3}, \infty)$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie die Extrema der Funktion $f(x) = \exp(x-1) - x$ und fertigen Sie ein qualitatives Bild der Funktion.

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x-1) - x \\ f'(x) &= \exp(x-1) - 1 \\ f''(x) &= \exp(x-1) \end{aligned}$$

Notwendiges Kriterium für Extrema:

$$f'(\bar{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exp(\bar{x} - 1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = 1$$

Hinreichendes Kriterium für Extrema:

$$f''(\bar{x}) = \exp(0) = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \text{ ist Minimalstelle von } f$$

Verhalten von f für $x \to \pm\infty$:

- $x \to \infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x-1) - x \overset{(*)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} - x = 1 + \frac{x-1}{1!} + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + ... - x \\ &= \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + ... = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k!} \quad \to \quad \infty \end{aligned}$$

  (∗) Reihenentwicklung von exp: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^k}{k!}$

- $x \to -\infty$:

$$f(x) = \underbrace{\exp(x-1)}_{\to 0} - x \approx -x \quad \to \quad \infty$$

Schaubild:

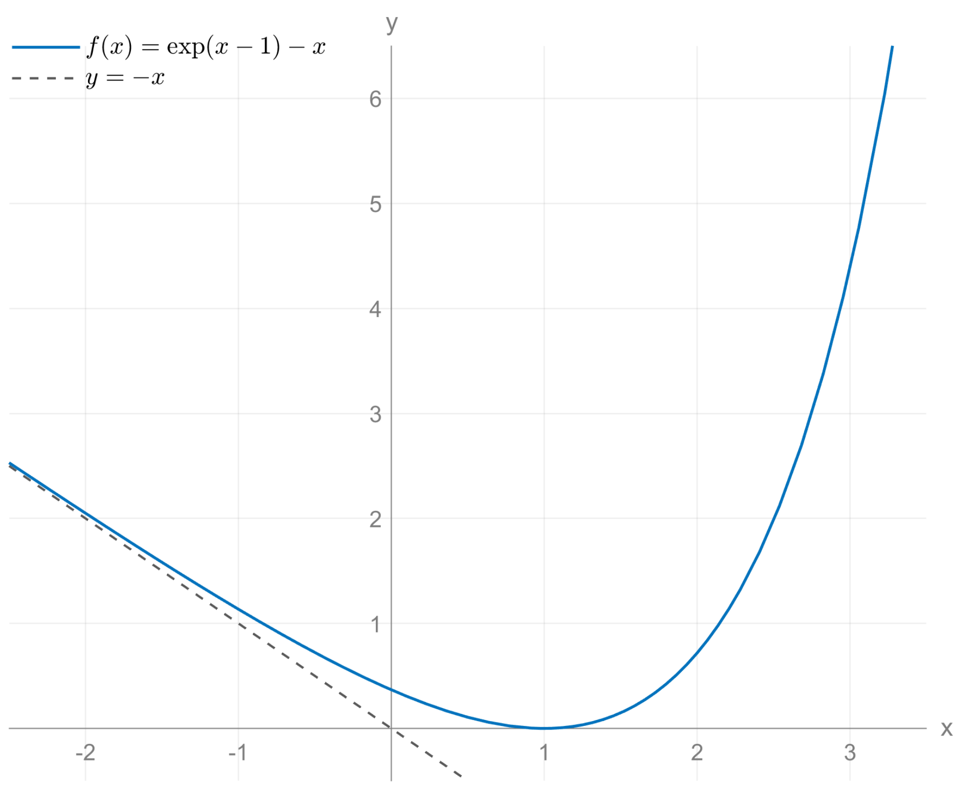

Abbildung 1: Die Funktion $f(x) = \exp(x-1) - x$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$ für $|x| < 1$.

a) Bestimmen Sie für $N = 0, 1, 2$ die ersten drei Glieder $\sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ der Potenzreihe für f.

b) Geben Sie mittels der geometrischen Reihe die gesamte Potenzreihe von f an.

c) Skizzieren Sie die Funktion f gemeinsam mit dem dritten Glied der Potenzreihe ($N = 2$) in ein Schaubild für $|x| < 1$.

Lösung:

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{x+1} \quad \text{für} \quad |x| < 1 \\
f'(x) &= \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} \\
f''(x) &= -\frac{2}{(x+1)^3}
\end{aligned}$$

Ersten drei Glieder der Potenzreihe:

$$\begin{aligned}
N = 0: \quad & f(0) = \frac{0}{0+1} = 0 =: p_0(x, 0) \\
N = 1: \quad & f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x = 0 + \frac{1}{1!}x = x =: p_1(x, 0) \\
N = 2: \quad & f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x + \frac{-2}{2!}x^2 = x - x^2 =: p_2(x, 0)
\end{aligned}$$

b) Geometrische Reihe für $|x| < 1$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{i-1} = \frac{1}{1-x}$$

Somit ist die Potenzreihe von f:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} = x \cdot \frac{1}{1-(-x)} = x \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-x)^{i-1} = x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{i+1}$$

c) Schaubild:

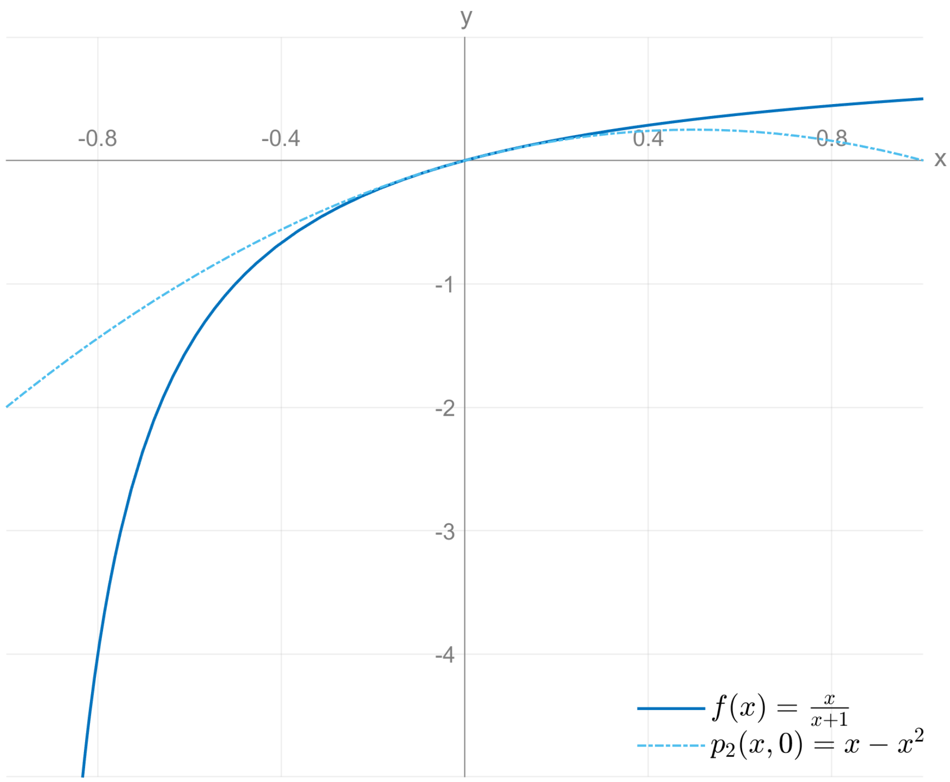

Abbildung 2: Die Funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$ und das Polynom $p_2(x, 0) = x - x^2$.

d.h. nahe $x = 0$ sieht f aus wie $p_2(x, 0) = x - x^2$.