Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 6

Aufgabe 1

Bestimmen Sie das Taylorpolynom 1. und 2. Grades der Funktion $f(x) = \ln(x-1)$ an der Stelle $x_0 = 2$ und zeichnen Sie die Graphen von f und der linearen Approximation (Taylorpolynom vom Grad 1) qualitativ mit passendem Definitionsbereich in ein Schaubild.

Lösung:

$$\text{Taylorpolynom 1. Grades bei } x_0\text{:} \quad p_1(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)$$

$$\text{Taylorpolynom 2. Grades bei } x_0\text{:} \quad p_2(x, x_0) = p_1(x, x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$$

Sei $f(x) = \ln(x-1)$ und $x_0 = 2$. Es gilt $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ und $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$
Somit lauten das Taylorpolynom 1. und 2. Grades von f an der Stelle $x_0 = 2$:

$$p_1(x, 2) \;=\; \ln(1) + 1 \cdot (x-2) \;=\; x - 2$$

$$p_2(x, 2) \;=\; \underbrace{x-2}_{=p_1(x,2)} + \frac{1}{2}(-1)(x-2)^2 \;=\; x - 2 - \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) \;=\; -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$$

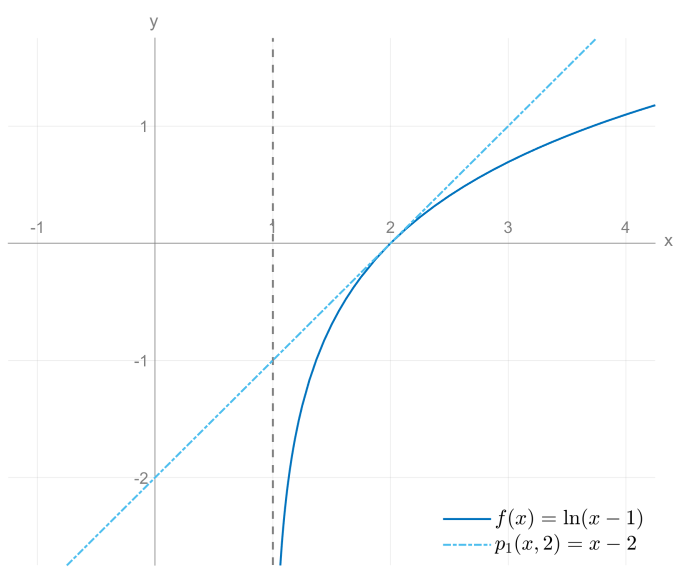

Abbildung 1: Funktion $f(x) = \ln(x-1)$ und Taylorpolynom 1. Grades $p_1(x, 2) = x - 2$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 - \cos(x)}{x}$$

sowohl mittels Taylorentwicklung als auch mit der Regel von l'Hospital.

Lösung:

Lösung mittels Taylorentwicklung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 - \cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2x + 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(x - 2 + \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \ldots\right) = -2
\end{aligned}$$

Lösung mit der Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-1)^2 - \cos(x)}{x} \overset{l'Hospital}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2(x-1) + \sin(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \Big(2x - 2 + \sin(x)\Big) = -2$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} + \exp\left(\frac{1}{2}x\right) \quad \text{und} \quad g(x) = -\cos(3x) + \sqrt{x}.$$

Lösung:

Für $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \exp\left(\frac{1}{2}x\right)$ gilt:

$$F(x) = \frac{1}{x} + 2\exp\left(\frac{1}{2}x\right) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Weiter gilt für $g(x) = -\cos(3x) + \sqrt{x}$:

$$G(x) = -\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos(x),\ x \in [-1, 1]$.

(i) Geben Sie das n-te Taylorpolynom $p_n(x, x_0)$ an der Stelle $x_0 = 0$ an, wobei n gerade sein soll.

(ii) Führen Sie eine Abschätzung des Restgliedes R_n durch.

(iii) Wie ist mithilfe von (ii) $n \in \mathbb{N}$ zu wählen, damit $|f(x) - p_n(x, x_0)| < 0,01$ für $x \in [-1, 1]$ gilt?

Lösung:
Sei $f(x) = \cos(x),\ x \in [-1,1]$.

(i) Nach Vorlesung gilt:

$$f'(x) = -\sin(x), \quad f''(x) = -\cos(x), \quad f'''(x) = \sin(x), \quad f^{(4)}(x) = \cos(x), \quad ...$$

Sei $x_0 = 0$. Dann gilt:

$$f(x_0) = 1, \quad f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = -1, \quad f'''(x_0) = 0, \quad f^{(4)}(x_0) = 1, \quad ...$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} f(x) \ &= \ \cos(x) \ = \ f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + ... \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \end{aligned}$$

n-tes Taylorpolynom für gerades n an der Stelle $x_0 = 0$:

$$p_n(x,x_0) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \ = \ \sum_{l=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!}$$

(ii) Für das Restglied R_n gilt nach dem Satz von Taylor:

$$R_n \ = \ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi) \quad , \quad \xi \in (-1,1)$$

Für $x_0 = 0$ folgt:

$$|R_n| \ = \ \underbrace{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}_{\leq \frac{1}{(n+1)!}\ ,\ \text{da } x \in [-1,1]} \cdot |\underbrace{f^{n+1}(\xi)}_{\leq 1}| \ \leq \ \frac{1}{(n+1)!}$$

(iii) Es gilt für $x \in [-1,1]$

$$|f(x) - p_n(x,x_0)| \ = \ |R_n| \ \leq \ \frac{1}{(n+1)!} \ \overset{!}{<} \ 0,01$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{(n+1)!} \ < \ 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)! \ > \ 100$$

d.h. wähle $n = 4$, da

$$(4+1)! \ = \ 120 \quad \text{und} \quad (3+1)! \ = \ 24$$