Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 7

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie folgende Integrale durch partielle Integration:

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int \sin^2(x)\,dx.$$

b) Berechnen Sie die Integrale

$$\int \sin(2x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$$

durch Substitution.

Lösung:

a) (i)

$$\int_0^\pi \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{\cos(x)}_{v'}\,dx \;=\; \underbrace{x\sin(x)}_{=0}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi 1\cdot\sin(x)\,dx \;=\; -\,(-\cos(x))\Big|_0^\pi$$
$$= -\Big(-\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\Big) - \Big(-(-\underbrace{\cos(0)}_{=1})\Big) \;=\; -1-1 \;=\; -2$$

(ii)

$$\int \sin^2(x)\,dx \;=\; \int \underbrace{\sin(x)}_{u}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{v'}\,dx \;=\; -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int \cos(x)\cdot\cos(x)\,dx$$
$$= -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int \cos^2(x)\,dx$$
$$\overset{\cos^2(x)=1-\sin^2(x)}{=} -\sin(x)\cdot\cos(x) + \int 1-\sin^2(x)\,dx$$
$$= -\sin(x)\cdot\cos(x) + x - \int \sin^2(x)\,dx$$

Daraus folgt

$$\int \sin^2(x)\,dx \;=\; \frac{1}{2}\Big(-\sin(x)\cdot\cos(x)+x\Big)+c\,, \quad c\in\mathbb{R}$$

b) (i) $\int \sin(2x)\,dx$:
Substitution: $u := 2x,\ \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2}$

$$\int \sin(2x)\,dx \overset{\text{Substitution}}{=} \int \sin(u)\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sin(u)\,du = \frac{1}{2}\Big(-\cos(u)\Big) + c$$
$$\overset{\text{Rücksubstitution}}{=} -\frac{1}{2}\cos(2x) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$:
Substitution: $u := x^2+2x+3,\ \frac{du}{dx} = 2x+2 \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2(x+1)}$

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx \overset{\text{Substitution}}{=} \int \frac{x+1}{u}\cdot\frac{du}{2(x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln(u) + c$$
$$\overset{\text{Rücksubstitution}}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Damit folgt für das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\Big(\ln(6) - \ln(3)\Big) = \frac{1}{2}\ln(2)$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie mithilfe der Regel

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (F \text{ Stammfunktion von } f)$$

das folgende Integral:

$$\int \ln(3x+5)\,dx.$$

Lösung:
Die Konstanten sind hier $a = 3$ und $b = 5$. Also folgt mit $f(x) = \ln(x)$ und

$$F(x) = \int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x \qquad \text{(siehe Vorlesung)}$$

sowie der angegebenen Regel

$$\int \ln(3x+5)\,dx = \frac{1}{3}F(3x+5)dx = \frac{1}{3}\Big((3x+5)\cdot\ln(3x+5) - 3x - 5\Big) + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x+4$.

a) Berechnen Sie die Riemannsche Unter- und Obersumme S_{min} bzw. S_{max} zur Funktion f über $[0,1]$ für die Partition $x_i = \frac{i}{3},\ i = 0,1,2,3$. Skizzieren Sie dazu ein entsprechendes Schaubild.

b) Berechnen Sie nun S_{min} und S_{max} für die allgemeine Partition $x_i = \frac{i}{N},\ i = 0, 1 \ldots, N$. Was passiert im Grenzwert $N \to \infty$? Vergleichen Sie den errechneten Wert mit dem Integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 -2x + 4\,dx.$$

Lösung:
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 4$.

a) Riemannsche Unter- und Obersumme:

$$\begin{aligned} S_{min} &= \sum_{i=1}^{3} f(\underline{w_i})(x_i - x_{i-1}) \\ S_{max} &= \sum_{i=1}^{3} f(\overline{w_i})(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Schaubild:

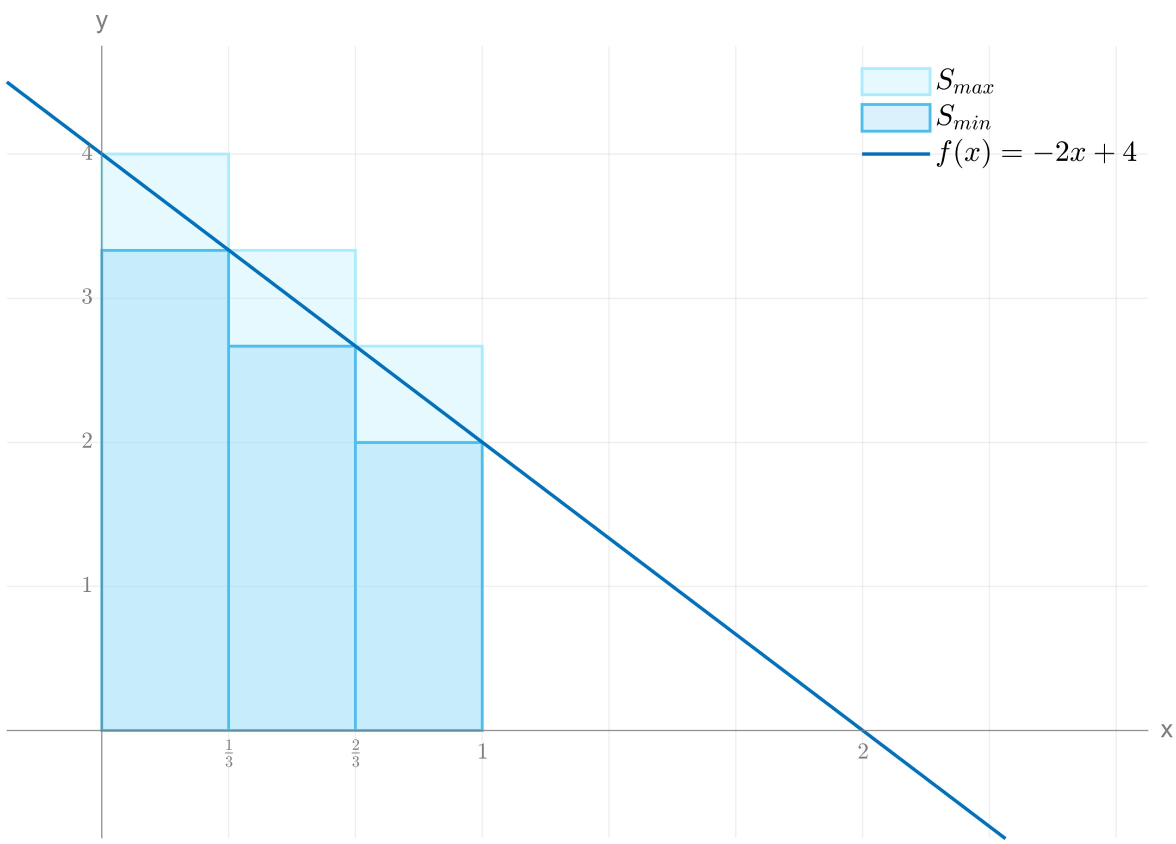

Abbildung 1: Funktion $f(x) = -2x + 4$, Riemannsche Unter- und Obersumme.

Hier gilt:

$$\begin{aligned} \underline{w_i} &= \frac{i}{3} & i = 1,2,3 \\ \overline{w_i} &= \frac{i-1}{3} & i = 1,2,3 \end{aligned}$$

(da f streng monoton fallend)

$$x_i - x_{i-1} = \frac{1}{3} \qquad i = 1,2,3$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} S_{min} &= \sum_{i=1}^{3} \left(-2 \cdot \frac{i}{3} + 4\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\left(-2 \cdot \frac{1}{3} + 4\right) + \left(-2 \cdot \frac{2}{3} + 4\right) + \left(-2 \cdot \frac{3}{3} + 4\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{10}{3} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{8}{3} \\ S_{max} &= \sum_{i=1}^{3} \left(-2 \cdot \frac{i-1}{3} + 4\right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \left(\left(-2 \cdot \frac{0}{3} + 4\right) + \left(-2 \cdot \frac{1}{3} + 4\right) + \left(-2 \cdot \frac{2}{3} + 4\right) \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(4 + \frac{10}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

b) Allgemeiner Fall:

$$\begin{aligned} \underline{w_i} &= \frac{i}{N} & i = 1,...,N \\ \overline{w_i} &= \frac{i-1}{N} & i = 1,...,N \\ x_i - x_{i-1} &= \frac{1}{N} & i = 1,...,N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{min} &= \sum_{i=1}^{N} f(\underline{w_i})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(-2 \cdot \frac{i}{N} + 4\right) \\ &= -\frac{2}{N^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} i}_{=\frac{N(N+1)}{2}} +4 = -\frac{2}{N^2} \cdot \frac{N(N+1)}{2} + 4 = -\left(1 + \frac{1}{N}\right) + 4 \\ &\overset{N\to\infty}{\to} -1 + 4 = 3 \\ S_{max} &= \sum_{i=1}^{N} f(\overline{w_i})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(-2 \cdot \frac{i-1}{N} + 4\right) \\ &= -\frac{2}{N^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (i-1)}_{=\frac{(N-1)N}{2}} +4 = -\frac{2}{N^2} \cdot \frac{N(N-1)}{2} + 4 = -\left(1 - \frac{1}{N}\right) + 4 \\ &\overset{N\to\infty}{\to} -1 + 4 = 3 \end{aligned}$$

d.h. $\lim\limits_{N\to\infty} S_{min} = \lim\limits_{N\to\infty} S_{max} = 3$ (f ist also über $[0,1]$ integrierbar).

Berechnung des Integrals:

$$\int\limits_0^1 -2x+4\,dx \;=\; \left(-x^2+4x\right)\Big|_0^1 \;=\; -1+4-0 \;=\; 3$$

Es gilt also $\lim\limits_{N\to\infty} S_{min} = \lim\limits_{N\to\infty} S_{max} = \int\limits_0^1 -2x+4\,dx = 3$ im Intervall $[0,1]$.

Das Team der Mathewerkstatt wünscht Ihnen Frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2024!