Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Schropp

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 8

Aufgabe 1

Berechnen Sie folgendes Integral durch Partialbruchzerlegung:

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+2x-12}\,dx.$$

Lösung:
Es gilt $\int \frac{2x+1}{2x^2+2x-12}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}\,dx.$
Nullstellen des Nenners des Integranden:

$$x^2+x-6 \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$x^2+x-6 \;=\; (x-2)(x+3) \quad\Rightarrow\quad \frac{2x+1}{x^2+x-6} \;=\; \frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)} \overset{!}{=} \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} \;=\; \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ = \frac{(A+B)x+3A-2B}{(x-2)(x+3)}$$

Koeffizientenvergleich:

$$A+B \;=\; 2 \quad\Leftrightarrow\quad B \;=\; 2-A \tag{1}$$

$$3A-2B \;=\; 1 \tag{2}$$

Einsetzen von (1) in (2) liefert:

$$3A-2(2-A) \;=\; 1 \quad\Leftrightarrow\quad 5A-4 \;=\; 1 \quad\Leftrightarrow\quad A \;=\; 1$$

$A=1$ in (1) liefert dann:

$$B \;=\; 2-1 \;=\; 1$$

Also:

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+2x-12}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|+c\;, \qquad c\in\mathbb{R}$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale:

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{(2-x)^3}}\,dx, \qquad \int_{0}^{\infty}\sin(x)\,dx, \qquad \int_{1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2x-2}}\,dx.$$

Geben Sie jeweils eine geometrische Interpretation an.

Lösung:

(i) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{(2-x)^3}}\,dx$:
Uneigentliches Integral, da es ein Integral auf unbeschränktem Intervall ist.

$$\int\limits_{\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{(2-x)^3}}\,dx \;=\; \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1}(2-x)^{-\frac{3}{2}}\,dx \;=\; \lim_{a\to-\infty}\left(-2\Big(2-x\Big)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-1)\right)\Bigg|_{a}^{1}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2-x}}\right)\Bigg|_{a}^{1} \;=\; \lim_{a\to-\infty}\left(2-\frac{2}{\sqrt{2-a}}\right) \;=\; 2$$

Geometrische Interpretation:

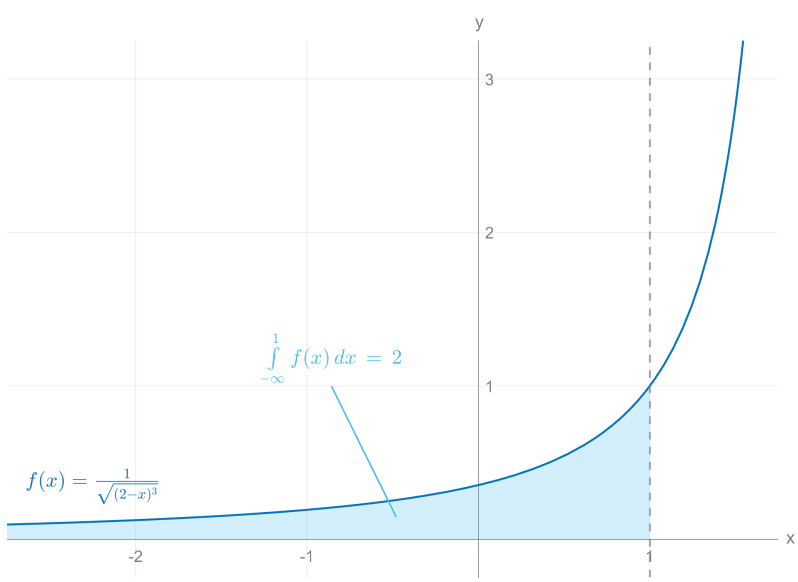

Abbildung 1: Geometrische Interpretation des Integrals $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{\sqrt{(2-x)^3}}\,dx$.

(ii) $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$:
Uneigentliches Integral, da es ein Integral auf unbeschränktem Intervall ist.

$$\int_0^\infty \sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \sin(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big(-\cos(x)\Big)\Big|_0^b$$
$$= \lim_{b\to-\infty}\Big(-\cos(b)+1\Big) \quad \text{existiert nicht!}$$

Geometrische Interpretation:

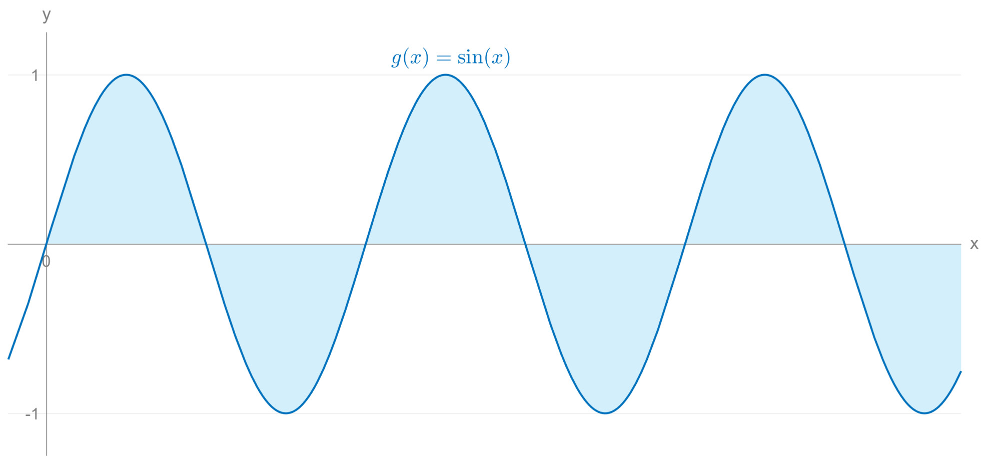

Abbildung 2: Geometrische Interpretation des Integrals $\int_0^\infty \sin(x)\,dx$.

Bemerkung:
Da der Grenzwert nicht existiert, heißt das uneigentliche Integral divergent.

(iii) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x-2}}\,dx$:
Uneigentliches Integral, da das Integral eine nicht definierte Intervallgrenze hat.

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x-2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{1}{\sqrt{2x-2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(2\Big(2x-2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}\right)\Big|_{1+\varepsilon}^2$$
$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\Big(\sqrt{2}-\sqrt{2\varepsilon}\Big) = \sqrt{2}$$

Geometrische Interpretation:

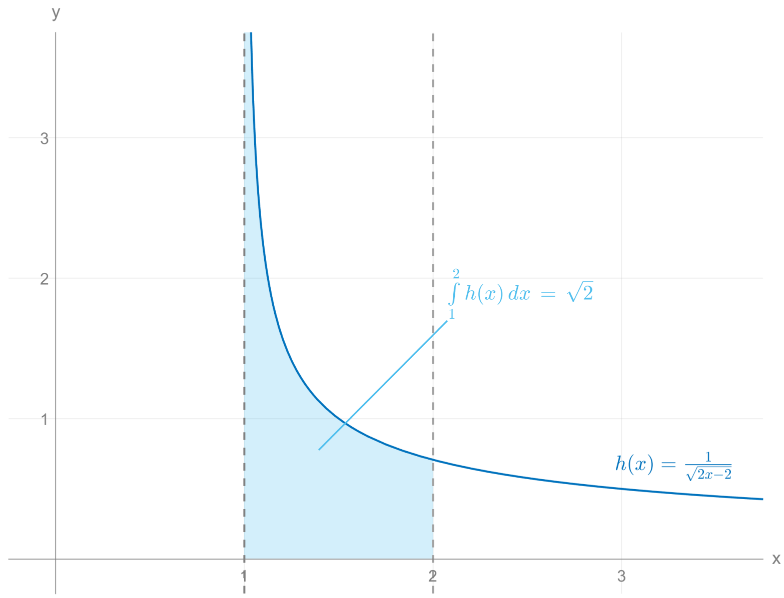

Abbildung 3: Geometrische Interpretation des Integrals $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2x-2}}\,dx$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \exp(x),\ x \leq 0, \\ \cos(x),\ 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2},\ x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\pi} f(x)\,dx$ und geben Sie eine geometrische Interpretation an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\pi} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} \exp(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x - \frac{\pi}{2}\,dx \\
&= \lim_{a\to-\infty} \exp(x)\Big|_a^0 + \sin(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= \lim_{a\to-\infty} \Big(1 - \exp(a)\Big) + 1 + \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{4}\right)\right) \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{8}\pi^2 \\
&= 2 + \frac{1}{8}\pi^2
\end{aligned}$$

Geometrische Interpretation:

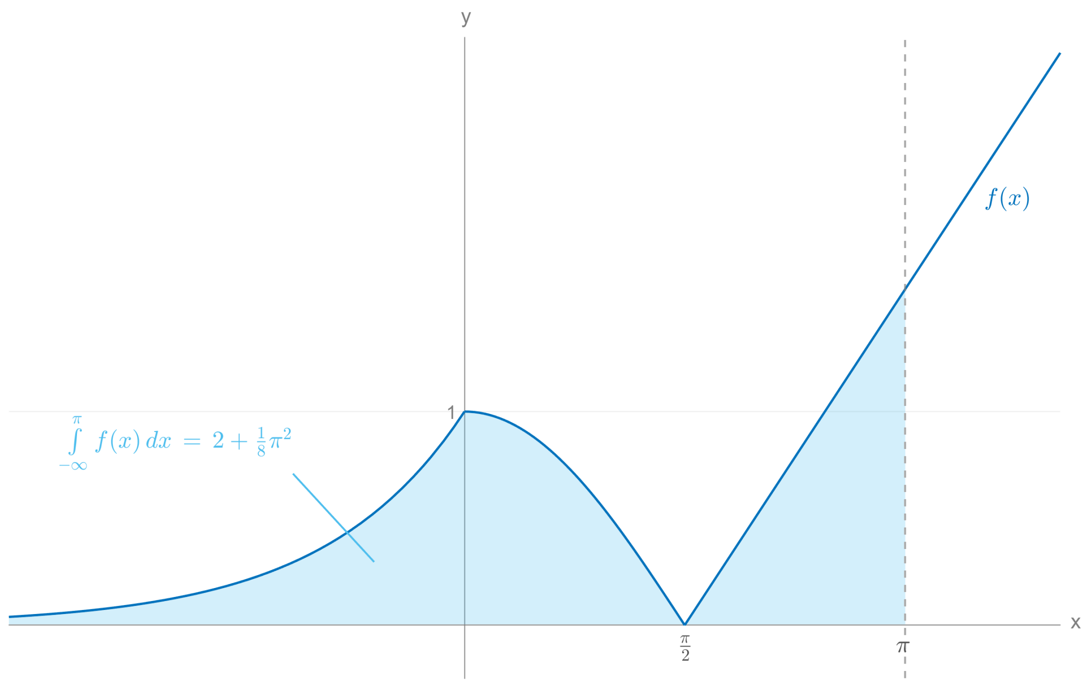

Abbildung 4: Geometrische Interpretation des Integrals $\int_{-\infty}^{\pi} f(x)\,dx$.

Aufgabe 4

Die Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$ schließen im Intervall $[-\pi, \pi]$ eine Fläche ein. Berechnen Sie diese und veranschaulichen Sie das Ergebnis in einem Schaubild.

Lösung:
Sei $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \cos(x)$.
Schnittpunkte von f und g:

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sin(x) = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(x) = 1$$

Lösungen in $[-\pi, \pi]$:

$$x_1 = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$
$$x_2 = x_1 - \pi = -\frac{3}{4}\pi \approx -2.3562$$

x_1 und x_2 sind die Integrationsgrenzen. In $[x_2, x_1]$ gilt $g(x) \geq f(x)$ und somit gilt für die eingeschlossene Fläche:

$$\begin{aligned}\int_{x_2}^{x_1} g(x) - f(x)\,dx &= \Big(\sin(x) - (-\cos(x))\Big)\Big|_{x_2}^{x_1} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} \approx 2,8284\end{aligned}$$

Schaubild:

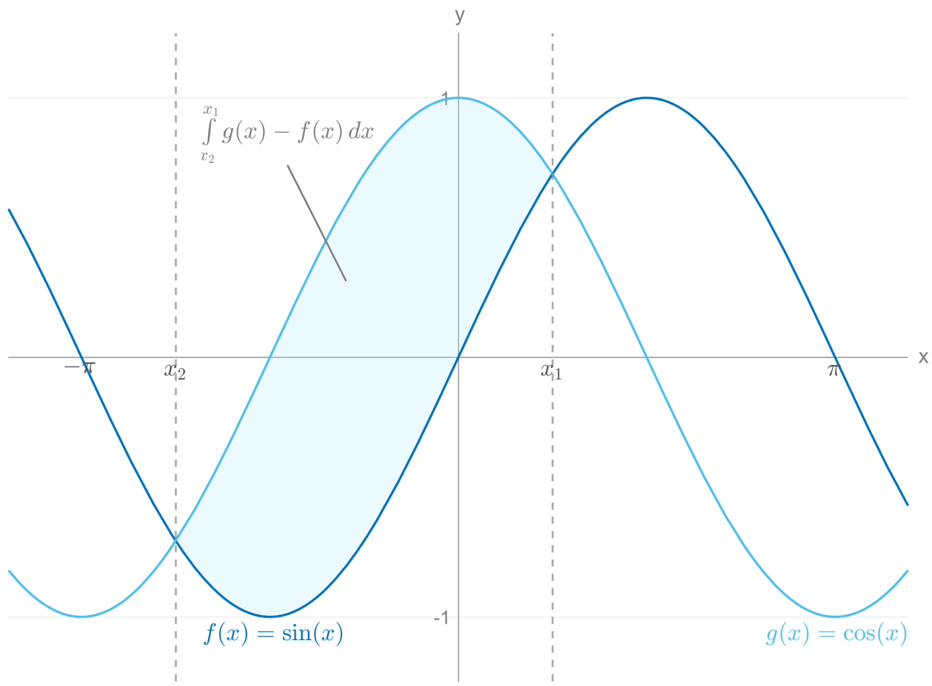

Abbildung 5: Die Funktionen f und g sowie die eingeschlossene Fläche $\int_{x_2}^{x_1} g(x) - f(x)\,dx$.