Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

WS 2023/2024

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 9

Aufgabe 1

Gegeben seien im $\mathbb{R}^2$ die Vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} \beta \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie für $\alpha = \beta = 1$ den Winkel $\angle(v, w)$ zwischen den Vektoren v und w. Machen Sie eine entsprechende Skizze dazu.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ stehen die Vektoren v und w senkrecht aufeinander?

Lösung:

a) Sei $\alpha = \beta = 1$.
Skizze:

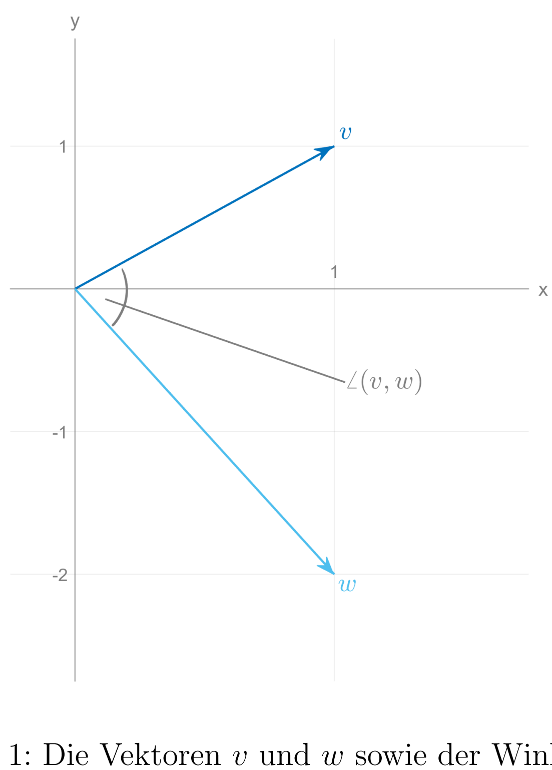

Abbildung 1: Die Vektoren v und w sowie der Winkel $\angle(v, w)$.

Nach Vorlesung gilt für den Winkel $\angle(v,w)$:

$$\cos\left(\angle(v,w)\right) \;=\; \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|} \;=\; \frac{\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\|\cdot\left\|\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right\|} \;=\; \frac{1-2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Daraus folgt im Bogenmaß:

$$\angle(v,w) \;=\; \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \;\approx\; 1,8925$$

Im Gradmaß: $\angle(v,w) \;\approx\; 108,43°$

b) Bedingung für $v \perp w$:

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left\langle \begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\beta\\-2\end{pmatrix}\right\rangle \;=\; 0\\ &\Leftrightarrow \quad \beta - 2\alpha \;=\; 0\\ &\Leftrightarrow \quad \beta \;=\; 2\alpha\end{aligned}$$

d.h. für $\beta = 2\alpha$ gilt $v \perp w$ (unendlich viele Lösungen!).
Bsp.: $\alpha = 1$ und $\beta = 2$.

Aufgabe 2

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

(i) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-2)^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$,

(ii) $\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : (a+3)^2 + (b-2)^2 > 4\}$,

(iii) $\left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0,5 < u \leq 4, v = \frac{1}{u}\right\}$,

(iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, |y| \leq 2, |x| > 1\}$.

Lösung:

(i) $M_1 := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-2)^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$:
Kreisgleichung: $(x_1-2)^2 + x_2^2 = 1$
M_1 ist daher der Rand eines Kreises mit Radius $r = 1$ und Mittelpunkt $(2,0)$.

Skizze:

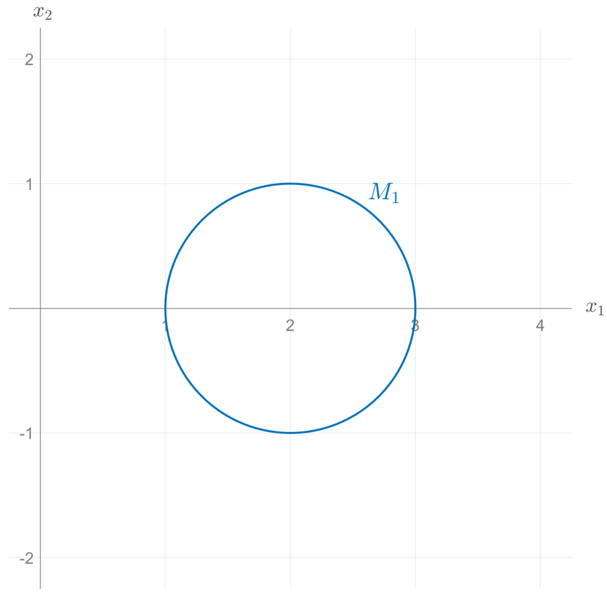

Abbildung 2: Die Menge $M_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$.

(ii) $M_2 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \, (a + 3)^2 + (b - 2)^2 > 4\}$:
Kreisgleichung: $(a + 3)^2 + (b - 2)^2 = 4$
M_2 ist daher das Komplement zum Kreis mit Rand mit Radius $r = 2$ und Mittelpunkt $(-3, 2)$.
Skizze:

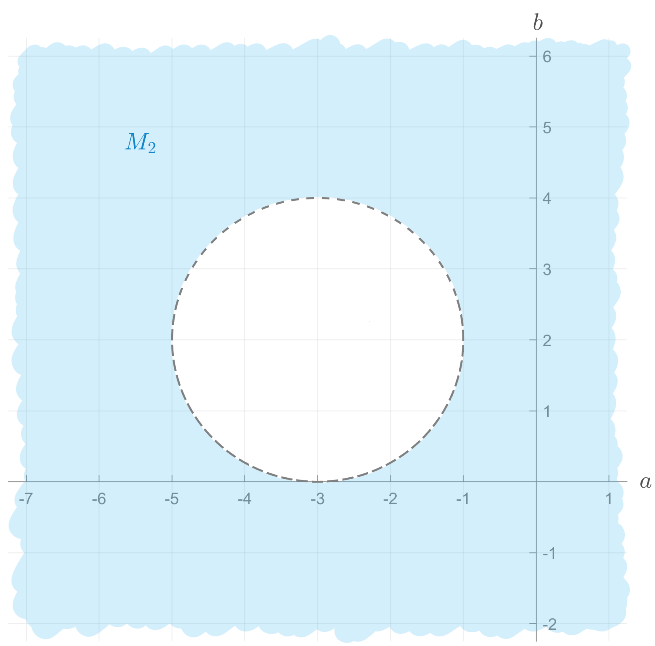

Abbildung 3: Die Menge $M_2 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \, (a + 3)^2 + (b - 2)^2 > 4\}$.

(iii) $M_3 := \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ 0,5 < u \leq 4, v = \frac{1}{u}\right\}$:
Skizze:

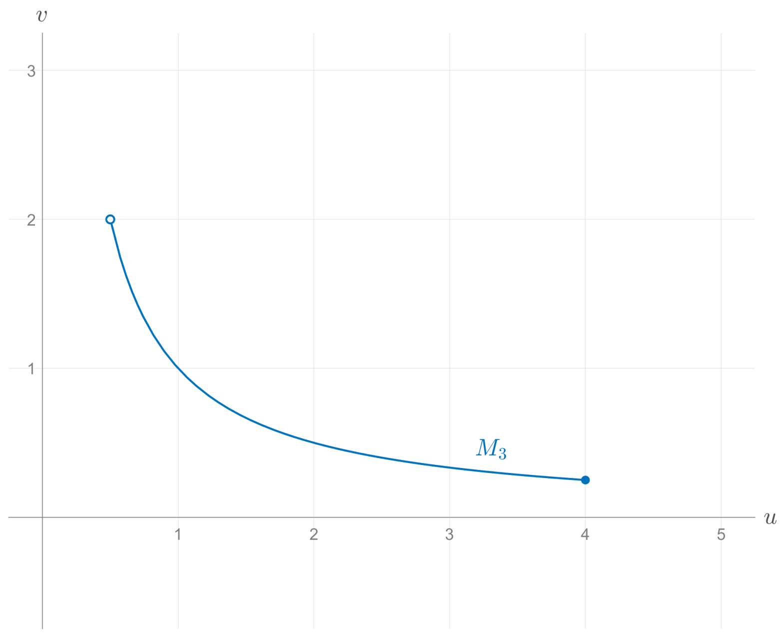

Abbildung 4: Die Menge $M_3 = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 :\ 0,5 < u \leq 4, v = \frac{1}{u}\right\}$.

(iv) $M_4 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y, |y| \leq 2, |x| > 1\}$:

$$|y| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq y \leq 2\,, \qquad |x| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \text{ oder } x > 1$$

Skizze:

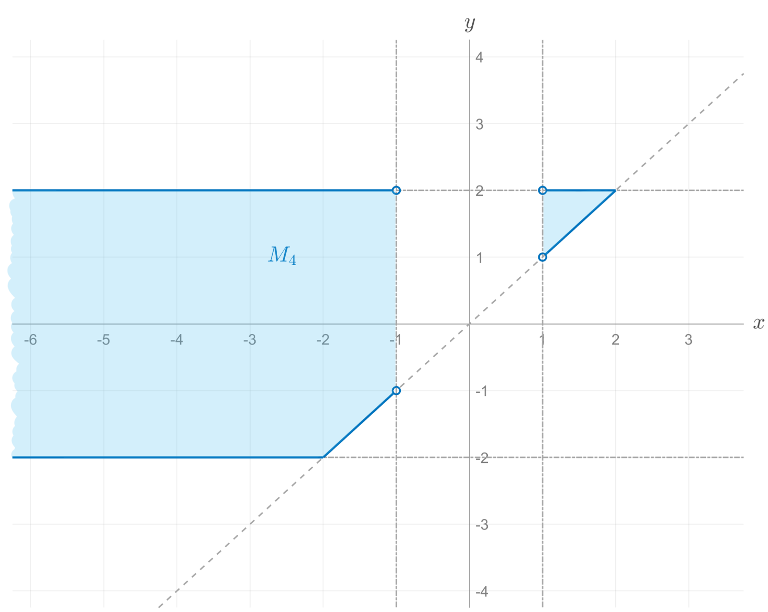

Abbildung 5: Die Menge $M_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y, |y| \leq 2, |x| > 1\}$.

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion

$$f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von f und berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x, y, z)$.

b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\nabla f(x, y, z) = 0.$$

Lösung:

Sei $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

a) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}^3$

Gradient:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 2x\ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y\ , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z$$

Somit ist der Gradient von f:

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 2x &=& 0 \\ 2y &=& 0 \\ 2z &=& 0 \end{array} \\ &\Leftrightarrow \quad x = y = z = 0 \end{aligned}$$

d.h. nur $(x, y, z) = 0$ erfüllt $\nabla f(x, y, z) = 0$.

Aufgabe 4

Gegeben sei die Funktion

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = xy.$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D von f und skizzieren Sie die Höhenlinien zu den Höhen $h = 0, 1, 4$.

b) Geben Sie die Tangentialebene im Punkt $(1, 1)$ an.

c) Gibt es einen Punkt $(x_0, y_0) \in D$ mit horizontaler Tangentialebene? Falls ja, geben Sie diese Ebene an.

Lösung:
Sei $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy$

a) Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}^2$
Höhenlinien:
Bedingung: $f(x,y) = h$ für $h = 0, 1, 4$
Für $h = 0$ gilt:

$$f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \text{ oder } \ y = 0$$

Für $h \neq 0$ gilt:

$$f(x,y) = h \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = h \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{h}{x}$$

Somit ist $y_1 = \frac{1}{x}$ die Höhenlinie zu $h = 1$ und $y_4 = \frac{4}{x}$ zu $h = 4$.

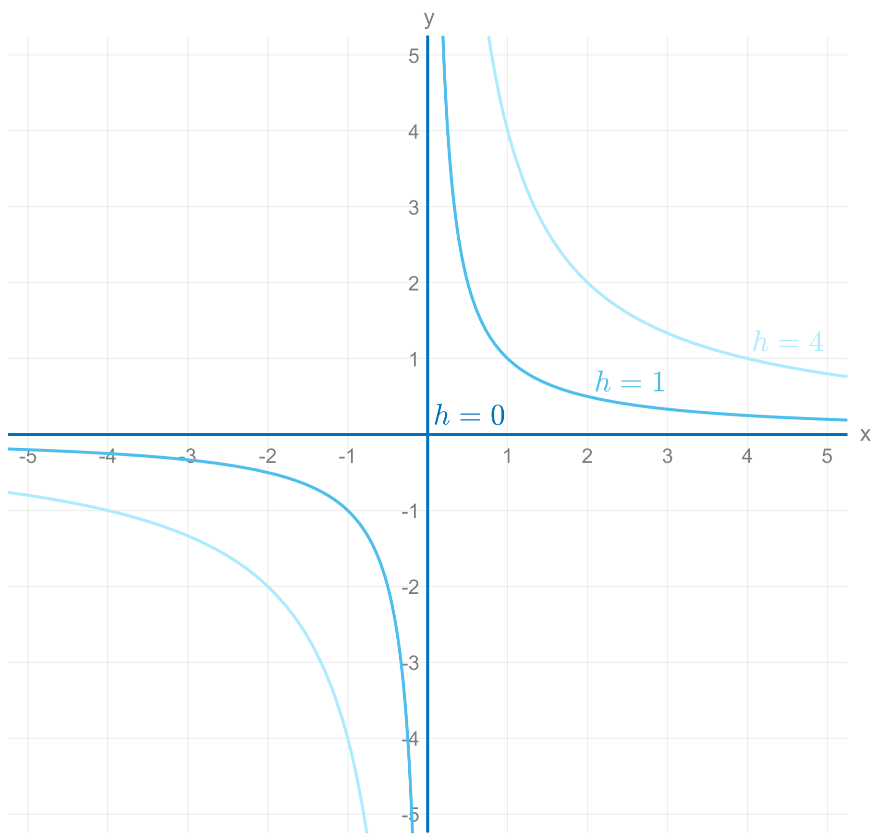

Abbildung 6: Höhenlinien zu den Höhen $h = 0$, $h = 1$ und $h = 4$.

b) Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$$

Tangentialebene im Punkt $(1,1)$:

$$\begin{aligned} T_{(1,1)}(f) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,(y-1) \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + 1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y - 1 \right\} \end{aligned}$$

c) Bedingung für horizontale Tangentialebene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \;=\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_0, y_0) \;=\; 0$$

Damit folgt:

$$T_{(0,0)}(f) \;=\; \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; z = 0\big\} \qquad \text{(x- y-Ebene)}$$