Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 10

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = 2 + 2x^2 + y^2.$$

a) Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Höhenbedingung $f(x,1) = 3$?

b) Bestimmen Sie für die Punkte $(x,1) \in \mathbb{R}^2$ die Darstellung des Tangentialraums, wobei x die Bedingung aus a) erfülle.

c) Bestimmen Sie alle Punkte $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$ mit horizontaler Tangentialebene.

d) Sind die Punkte aus c) lokale Minima?

Lösung:
Sei $f(x,y) = 2 + 2x^2 + y^2$.

a) Es gilt:

$$f(x,1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + 2x^2 + 1 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

b) Tangentialraum an f für $(x,y) = (0,1)$:

$$T_{(0,1)}(f) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1) \right\}$$

Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

und damit folgt:

$$\begin{aligned} T_{(0,1)}(f) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 + 0 \cdot (x-0) + 2 \cdot (y-1) \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2y + 1 \right\} \end{aligned}$$

c) Es gilt:

$$T_{(\bar{x},\bar{y})}(f) \text{ ist horizontale Tangentialebene} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

Partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) \;=\; 4\bar{x} \;\overset{!}{=}\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \bar{x} \;=\; 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \;=\; 2\bar{y} \;\overset{!}{=}\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \bar{y} \;=\; 0$$

d.h. $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ ist der einzige Punkt mit horizontaler Tangentialebene.

d) Überprüfe, ob $(\bar{x},\bar{y})$ ein lokales Minimum ist. Dafür muss gelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\bar{x},\bar{y}) \;>\; 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\bar{x},\bar{y}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\bar{x},\bar{y}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\bar{x},\bar{y})\right)^2 \;>\; 0$$

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 4\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 2\,, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) = 0$$

Damit folgt

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\bar{x},\bar{y}) \;=\; 4 \;>\; 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\bar{x},\bar{y}) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(\bar{x},\bar{y}) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(\bar{x},\bar{y})\right)^2 \;&=\; 4 \cdot 2 - 0 \\ &=\; 8 \;>\; 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

und somit ist $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ ein lokales Minimum.

Aufgabe 2

Gegeben sei die Funktion

$$h(x_1,x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von h und skizzieren Sie diesen in der (x_1,x_2)-Ebene. Wie lautet der Wertebereich von h?

b) Bestimmen Sie den Gradienten ∇h. Hat ∇h Nullstellen auf dem Definitionsbereich von h?

Lösung:
Sei $h(x_1,x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$.

a) Maximaler Definitionsbereich:
Es muss gelten $x_1^2 + x_2^2 - 1 > 0$ d.h.

$$D_h \;=\; \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 > 1\right\}$$

Skizze:

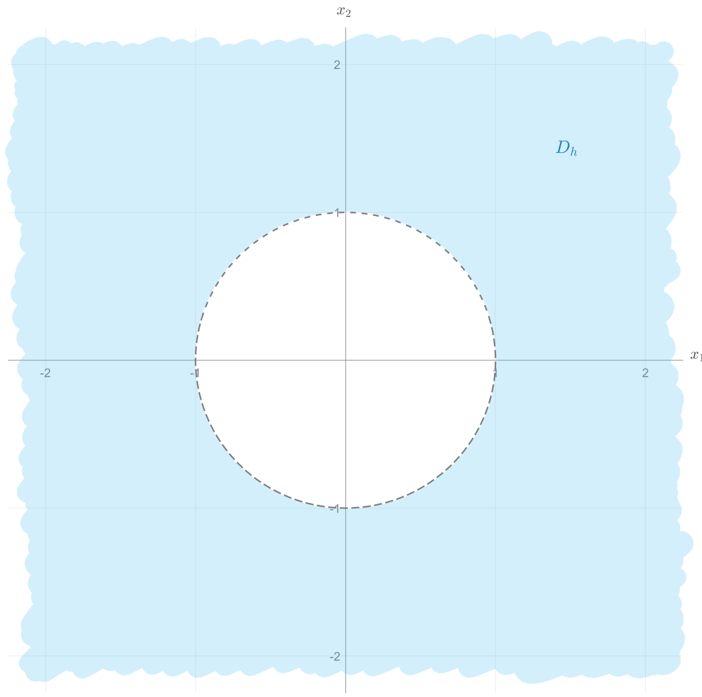

Abbildung 1: Maximaler Definitionsbereich D_h von $h(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1)$.

Wertebereich: $W_h = \mathbb{R}$ (wie im Eindimensionalen!)

b) Gradient:

$$\frac{\partial h}{\partial x_1}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1} \cdot 2x_1 \,, \quad \frac{\partial h}{\partial x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1} \cdot 2x_2$$

Somit ist der Gradient von h:

$$\nabla h(x_1, x_2) \;=\; \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 - 1} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Nullstellen:

$$\begin{aligned} \nabla h(\bar{x_1}, \bar{x_2}) \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (\bar{x_1}, \bar{x_2}) \;=\; (0,0) \;\notin\; D_h \\ &\Rightarrow \quad \nabla h \text{ hat keine Nullstellen auf } D_h \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sei die Funktion $f(x, y) = 2x - \ln(y)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, \varphi(x)) = 0$.

b) Berechnen Sie die Ableitung $\varphi'(x)$, einmal explizit und einmal durch implizites Differenzieren der Gleichung $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Lösung:
Sei $f(x,y) = 2x - \ln(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Es gilt:

$$f(x,y) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(y) \;=\; 2x \quad \Leftrightarrow \quad y \;=\; \exp(2x) \;=:\; \varphi(x)$$

d.h. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \exp(2x)$ erfüllt $f(x, \varphi(x)) = 0$.

b) (i) explizites Differenzieren:

$$\varphi'(x) \;=\; 2\exp(2x)$$

(ii) implizites Differenzieren:

$$\begin{aligned} 0 \;=\; f(x,\varphi(x)) \;\Rightarrow\; 0 &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,\varphi(x))\right) \\ \Leftrightarrow\; 0 &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,\varphi(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \end{aligned}$$

Da $\frac{\partial}{\partial y} f(x,\varphi(x)) = -\frac{1}{\exp(2x)} \neq 0$, gilt für $\varphi'(x)$:

$$\varphi'(x) \;=\; -\frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x,\varphi(x))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x,\varphi(x))} \;=\; -\frac{2}{-\frac{1}{\varphi(x)}} \;=\; 2\varphi(x) \;=\; 2\exp(2x)$$

Aufgabe 4

Vorgelegt sei die Funktion

$$g(x,y) = \exp(y) + y^3 + x^2 - 2.$$

a) Zeigen Sie mithilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal bei $(x_0, y_0) = (1,0)$ nach y auflösbar ist, d. h. es existiert lokal eine Funktion φ mit $g(x, \varphi(x)) = 0$.

b) Berechnen Sie $\varphi'(1)$.

Lösung:
Sei $g(x,y) = \exp(y) + y^3 + x^2 - 2$.

a) Sei $(x_0, y_0) = (1,0)$.
Es gilt $g(x_0,y_0) = g(1,0) = \exp(0) + 0^3 + 1^2 - 2 = 0$.
Partielle Ableitung von g nach y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} g(x,y) &\;=\; \exp(y) + 3y^2 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y} g(x_0,y_0) &\;=\; \exp(0) \;=\; 1 \;\neq\; 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass die Gleichung $g(x,y) = 0$ lokal bei $(x_0, y_0) = (1,0)$ nach y auflösbar ist, d.h. es gibt eine differenzierbare Funktion $\varphi : U_\varepsilon(1) \to \mathbb{R}$ (für ein $\varepsilon > 0$) mit $\varphi(1) = 0$ und $g(x,\varphi(x)) = 0$ für $x \in U_\varepsilon(1)$.

b) Ableiten der Gleichung $g(x,\varphi(x)) = 0$ liefert:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,\varphi(x)) + \frac{\partial}{\partial y} g(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(x) \;=\; -\frac{\frac{\partial}{\partial x} g(x,\varphi(x))}{\frac{\partial}{\partial y} g(x,\varphi(x))}$$

Für $x = 1$ gilt: $\quad \varphi'(1) \;=\; -\frac{2\cdot 1}{\exp(0) + 3\cdot 0^2} \;=\; -2$