Universität Konstanz *WS 2023/2024*
Fachbereich Mathematik und Statistik
J. Rohleff

Lösungen der
Übungsaufgaben der Mathewerkstatt im WiSe

http://www.math.uni-konstanz.de/∼schropp/wiwimath.html

Blatt 11

Aufgabe 1

a) Untersuchen Sie die Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$ auf lokale Minima und Maxima.

b) Gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + y$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2+1$?

Lösung:

a) Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$.
Notwendige Bedingung $\nabla f(x,y) = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big) + x\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(-x)\\
&= \underbrace{\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)}_{>0}(1-x^2) \overset{!}{=} 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = \pm 1\\
\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= x\underbrace{\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)}_{>0}(-y) \overset{!}{=} 0 \quad\overset{x=\pm1}{\Leftrightarrow}\quad y = 0
\end{aligned}$$

Somit sind $(-1,0)$ und $(1,0)$ mögliche Extremstellen.
Hinreichendes Kriterium:
Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) &= \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(-x)(1-x^2) + \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(-2x)\\
&= \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(x^3-3x)\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) &= x\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(-y)(-y) + x\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(-1)\\
&= x\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(y^2-1)\\
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} f(x,y) &= \exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)(-y)(1-x^2) = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} f(x,y) \qquad \text{(Satz von Schwarz)}
\end{aligned}$$

Für $(x, y) = (-1, 0)$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(-1,0) \;=\; \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big)(-1+3) \;>\; 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(-1,0) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(-1,0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(-1,0)\right)^2 \;=\; 2\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big) \cdot \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big) - 0 \;>\; 0$$

Somit ist $(-1, 0)$ ein lokales Minimum.
Für $(x, y) = (1, 0)$ gilt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,0) \;=\; \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big)(1-3) \;<\; 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(1,0) \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(1,0) - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(1,0)\right)^2 \;=\; \left(-2\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big)\right) \cdot \left(-\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big)\right) - 0 \;>\; 0$$

Somit ist $(1, 0)$ ein lokales Maximum.

b) Hier ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) \;=\; 2x+1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y) \;=\; 2x$$

Da nach dem Satz von Schwarz für zweimal stetig differenzierbare Funktionen $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x,y)$ gelten muss und dies hier nicht der Fall ist $(2x + 1 \neq 2x)$, kann es keine Funktion f mit der Eigenschaft geben!

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie das totale Differential der Funktionen $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ und $g(x, y, z) = xyz$.

b) Das totale Differential sei durch $dy = (\exp(x) + x)\, dx$ gegeben. Welcher Zusammenhang besteht zwischen y und x?

c) Welche Abhängigkeit besteht zwischen da, db und dc, falls für drei Größen a, b und c die Beziehung $a^2b^2c^2 = 0$ gilt?

Lösung:

a) (i) Sei $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$.

$$\begin{aligned} df(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\, dx + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\, dy \\ &= \frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}\, dy \end{aligned}$$

(ii) Sei $g(x, y, z) = xyz$.

$$\begin{aligned} dg(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x} g(x,y,z)\, dx + \frac{\partial}{\partial y} g(x,y,z)\, dy + \frac{\partial}{\partial z} g(x,y,z)\, dz \\ &= yz\, dx + xz\, dy + xy\, dz \end{aligned}$$

b)

$$dy \;=\; (\exp(x) + x)\; dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} \;=\; \exp(x) + x \;=\; y'(x)$$

Daraus folgt der Zusammenhang zwischen y und x:

$$y(x) \;=\; \int \exp(x) + x \, dx \;=\; exp(x) + \frac{1}{2}x^2 + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

c) Für $f(a,b,c) = a^2b^2c^2$ gilt unter Voraussetzungen $f(a,b,c) = 0$.
Weiter gilt

$$\frac{\partial}{\partial a} f(a,b,c) \;=\; 2ab^2c^2\,, \quad \frac{\partial}{\partial b} f(a,b,c) \;=\; 2a^2bc^2\,, \quad \frac{\partial}{\partial c} f(a,b,c) \;=\; 2a^2b^2c$$

Daraus folgt

$$0 \;=\; df(a,b,c) \;=\; \left(2ab^2c^2\right)\, da + \left(2a^2bc^2\right)\, db + \left(2a^2b^2c\right)\, dc$$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2(y-x) + 1$.

a) Zeigen Sie: Die Höhenlinie zur Höhe $h = 0$ ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $(1,-1)$ und dem Radius 1.

b) Wie lautet die Tangentenrichtung der Höhenlinie aus a) im Punkt $(1,0)$? Zeigen Sie außerdem, dass der Gradient von f und die Tangentenrichtung der Höhenlinie im Punkt $(1,0)$ senkrecht aufeinander stehen. Machen Sie sich eine entsprechende Skizze dazu.

Lösung:
Sei $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2(y-x) + 1$.

a) Für die Höhe $h = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x,y) \;=\; 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2(y-x) + 1 \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y+1)^2 \;=\; 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Höhenlinie zur Höhe $h = 0$ ist ein Kreis mit Mittelpunkt $(1,-1)$ und Radius 1.

b) Betrachte die Gleichung $f(x,y) = 0$.
Es gilt:

$$f(1,0) = 0 \text{ (d.h.}(1,0)\text{liegt auf der Höhenlinie)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(1,0) = 2 \neq 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen existiert eine Funktion

$$\varphi : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R} \quad (\varepsilon > 0)$$

mit $\varphi(1) = 0$ und $f(x, \varphi(x)) = 0$ für $x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$.
Höhenlinie zu f zur Höhe $h = 0$ als Kurve im $\mathbb{R}^2$:

$$T : (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}^2\,, \quad T(x) = \begin{pmatrix} x \\ \varphi(x) \end{pmatrix}$$

Tangentenrichtung:

$$T'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(x) \end{pmatrix}, \quad x \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$$

Im Punkt $(1,0)$, also $T(1)$, gilt: $T'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi'(1) \end{pmatrix}$.

$$\text{Mit} \quad \varphi'(1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,\varphi(1))}{\frac{\partial f}{\partial y}(1,\varphi(1))} = -\frac{0}{2} = 0 \quad \text{folgt also} \quad T'(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Gradient $\perp$ Tangentenrichtung:</u>
Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 2y+2 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$\langle \nabla f(1,0), T'(1) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0 \qquad \checkmark$$

<u>Skizze:</u>

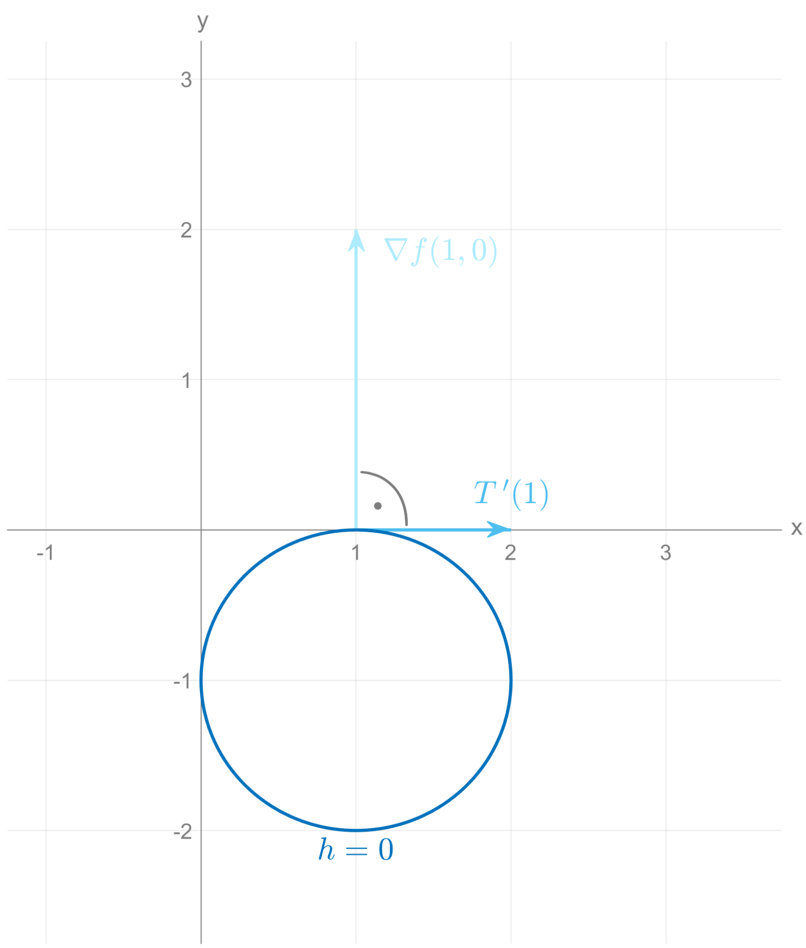

Abbildung 1: Höhenlinie zur Höhe $h = 0$, Tangentenrichtung $T'(1)$ und Gradient $\nabla f(1,0)$.

Aufgabe 4

Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ die Kurve $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(s) = (1, r\cos(s), r\sin(s))^T$, $r > 0$.

a) Skizzieren Sie die Kurve für den Fall $r = 1$.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve f für ein beliebiges $r > 0$.

Lösung:

Sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $f(s) = (1, r\cos(s), r\sin(s))^T$, $r > 0$ eine Kurve im $\mathbb{R}^3$.

a) Skizze für $r = 1$:

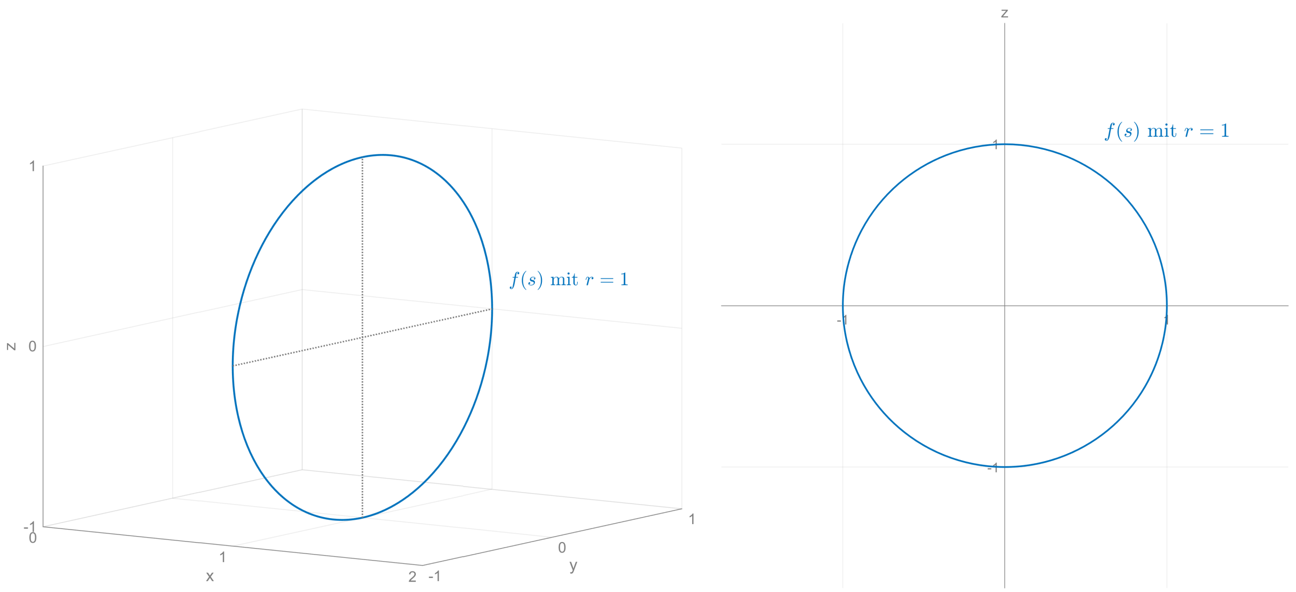

Abbildung 2: Die Kurve $f(s) = (1, \cos(s), \sin(s))^T$.

b) Länge der Kurve f:

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(s)\|_2 \, ds$$

Mit $f'(s) = (0, -r\sin(s), r\cos(s))$ folgt

$$L = \int_0^{2\pi} \|f'(s)\|_2 \, ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{0^2 + r^2\sin^2(s) + r^2\cos^2(s)} \, ds$$

$$\overset{\sin^2(s)+\cos^2(s)=1}{=} \int_0^{2\pi} r \, ds = [rs]_0^{2\pi} = 2\pi r$$

Bemerkung:

Dies ist die bekannte Formel zur Berechnung eines Kreisumfangs.

Aufgabe 5

Gegeben seien die Funktionen $f(x,y) = x + y$ und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.

a) Berechnen Sie mögliche Extremalwerte von f unter der Nebenbedingung $g(x,y) = 0$ mithilfe der Methode von Lagrange.

b) Berechnen Sie eine Lösung der Aufgabe aus a) durch Elimination einer Variablen.

Lösung:
Sei $f(x,y) = x + y$ und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2$.

a) Lagrange-Ansatz:

$$L(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} & \tfrac{\partial}{\partial x} L(x,y,\lambda) &= 1 + 2\lambda x \overset{!}{=} 0 \\
&\text{(ii)} & \tfrac{\partial}{\partial y} L(x,y,\lambda) &= 1 + 2\lambda y \overset{!}{=} 0 \\
&\text{(iii)} & \tfrac{\partial}{\partial \lambda} L(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 2 \overset{!}{=} 0
\end{aligned}$$

Aus (i) und (ii) folgt $\quad \lambda x = \lambda y \;\Leftrightarrow\; \lambda(x-y) = 0$
Angenommen $\lambda = 0 \overset{(i)}{\Rightarrow} 1 = 0$ Widerspruch! Also ist $\lambda \neq 0$.
Daraus folgt $x - y = 0$, d.h. $x = y$.
Aus (iii) folgt $2x^2 = 2$, d.h. $x = y = \pm 1$ und mit (i) folgt dann $\lambda = -\frac{1}{2x} = \mp\frac{1}{2}$.
Lösung: $\quad (\bar{x},\bar{y}) = (\pm 1, \pm 1)\,, \quad \bar{\lambda} = \mp\frac{1}{2}$

b) Elimination von y:
$g(x,y) = 0$ liefert:

$$x^2 + y^2 - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{2 - x^2} =: \varphi(x)$$

Einsetzen in f:

$$f(x,\varphi(x)) = x \pm \sqrt{2 - x^2}$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(x,\varphi(x)) &= 1 + \frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{2-x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \overset{!}{=} 0 \quad \text{(i)} \qquad \text{oder} \\
\frac{\partial}{\partial x} f(x,\varphi(x)) &= 1 - \frac{1\cdot(-2x)}{2\sqrt{2-x^2}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \overset{!}{=} 0 \quad \text{(ii)}
\end{aligned}$$

Fall (i):

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 \quad \Rightarrow y = +\sqrt{2-1} = 1$$

Fall (ii):

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -\sqrt{2-1} = -1$$

Lösung: $\quad (\bar{x},\bar{y}) = (\pm 1, \pm 1)$