Lösungen zu Blatt 1

Aufg. 1

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 1+2 \\ 3+4 & 3+4 \\ 5+6 & 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \\ 20 & 8 \end{pmatrix}$$

$B \cdot C$ ist nicht möglich, da Spaltenzahl von $B \neq$ Zeilenzahl von C

$D \cdot B$ geht:

$$D \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+2 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Nein, die Gleichheit ist i. A. falsch! Gegenbsp.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

c) Eine 2×2-Matrix ist invertierbar, falls $D = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0$ (vgl. Satz 9, Kapitel V). Hier gilt $D = 2 \cdot 6 - 5 \cdot 1 = 7 \neq 0$

$\Rightarrow$ E^{-1} existiert.

$$E^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 & -1/7 \\ -5/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

Aufg. 2

(i) a, b, c sind linear unabhängig genau dann, wenn

$$\operatorname{rg}((a, b, c)) = 3.$$

Bestimmung des Rangs von (a, b, c):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda = -3/2 \\ \lambda = -5/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -5/2 & -3/2 \end{pmatrix} \quad \lambda = -5/3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Zeilenstufenform!}$$

$$\Rightarrow \quad rg((a, b, c)) = 3$$

$$\Rightarrow \quad a, b, c \text{ sind linear unabhängig.}$$

<u>Alternative:</u> (direkte Anwendung der Def.)

Betrachte

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3\lambda_1 = 5\lambda_1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda_1 = 0}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_3 = 0}}$$

Die erste Zeile liefert schließlich $\underline{\underline{\lambda_2 = 0}}$

$\Rightarrow$ a, b, c lin. unabh.!

(ii) Es gilt

$$e = 2 \cdot d = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ d und e sind lin. abhängig!

Aufg 3

(i)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \lambda = -2 \\ \lambda = -3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -8 & -6 \end{array}\right) \quad \lambda = -\tfrac{3}{2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \text{ Zeilenstufenform!}$$

$\Rightarrow \quad x_3 = 3$ (Rückwärts auflösen!)

$\Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 3) = -6$

$\Rightarrow \quad x_1 = 2 - 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-6) = 5$

(ii)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 5y + 10z &= 0 \\ 2x + 5y + 8z &= 2 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 2 \end{array}\right) \quad \text{Vertausche zweite und dritte Zeile!}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 8 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = -2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \end{array}\right) \quad \lambda = -5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \text{Zeilenstufenform!}$$

Mit $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$rg(\hat{A}) = rg(A) = rg(A \mid b) = rg(\hat{A} \mid \hat{b}) = 2$$

$\Rightarrow$ das LGS $Ax = b$ ist lösbar!

Aber wegen $2 < 3 =$ Anzahl der Unbekannten, ist die Lösung nicht eindeutig!

Setze nun $z = s$ ($s \in \mathbb{R}$ beliebig!), dann liefert rückwärts auflösen:

$$y = -2s \quad \text{und}$$

$$x = 1 - 2y - 3z = 1 + 4s - 3s = 1 + s.$$